Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2017. № 2(18). C. 53-58. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2017-18-2-53-58

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.676

МОДЕЛЬ ДИФФУЗИОННОГО ПРОЦЕССА С ТЯЖЕЛЫМИ ХВОСТАМИ В РАСПРЕДЕЛЕНИИ

И. С. Захаров

Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4
E-mail: torn64@mail.ru

Разработан генератор устойчивых случайных величин. Проведено численное моделирование диффузионного процесса с тяжелым хвостом.

Ключевые слова: устойчивые случайные величины, диффузия, тяжелый хвост,процесс Леви, диффузионный пакет

MATHEMATICAL MODELING

MSC 60G52

MODEL OF THE DIFFUSION PROCESS WITH HEAVY TAILS IN THE DISTRIBUTION

I. S. Zakharov

Vitus Bering Kamchatka State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky, Pogranichnaya st., 4, Russia
E-mail: torn64@mail.ru

A generator of stable random variables is developed. Numerical simulation of the diffusion process with a heavy tail

Keywords: stable random variables, diffusion, heavy tail, Levy process, diffusion packet.

Введение

Особенностью фрактального движения Леви является его свойство масштабной инвариантности (самоподобия). Также, приращения процесса кроме самоподобия, еще и зависимы друг от друга и имеют одновременные распределения со степенными асимптотиками, т.н. «тяжелыми хвостами». Фрактальное броуновское движение имеет математическую трактовку и легко применимо к моделированию самоподобного трафика. Гауссовские процессы имеют конечную дисперсию. Фрактальное движение Леви есть более общий случай и может быть применено для моделирования интенсивностей в сетевом трафике или скоростей, которые имеют большие дисперсии(теоретически бесконечную). Так же, искусственно полученные трассы профилей трафика могут быть важны для испытаний или тестирования существующих компьютерных систем.

Важной особенностью экспоненциальных распределений, по сравнению с нормальным распределением, является значительно более высокая вероятность реализации более сильных (сильнее отклоняющихся от нормы) событий. Еще более значительные отклонения характерны для следующего «канонического» типа распределения - степенного.

Степенное распределение широко распространено в физических системах разной природы [1]. При этом плотность вероятности $f(A)$ возникновения события с амплитудой A уменьшается с ростом A по степенному закону:

$$f(A) = cA^{1+\beta}, c, \beta > 0.$$

При анализе физических систем величине A обычно соответствует энергия или характерный размер рассматриваемых событий или объектов, реже их длительность. Степенное распределение(называемое так же распределением Парето) называется «самоподобным» из-за следующего его свойства. Если рассмотреть некоторое возможное значение A_1 и увеличенное в α раз ($\alpha > 1$) возможное значение αA_1, то соотношение частот, с которыми эти значения наблюдаются в большой выборке, не зависит от $_1$ и равно $\alpha^{1+\beta}$. Иными словами, на каждое наблюденное значение αA_1 в среднем приходится $\alpha^{1+\beta}$ наблюденных значений A_1, т.е. соотношение частот событий не зависит от их масштаба, что и является выражением принципа самоподобия [2].

Генератор устойчивых случайных величин

В условиях, когда радиус корреляции скоростей фильтрации конечен, дисперсия является классической(фиковской), и размер области, содержащей основная масса примеси, возрастает по закону $\Delta \sim t^{1/2}$ Однако многие экспериментальные исследования [3] показывают аномальное, не являющиеся классическим поведение(нефиковское) при дисперсии примеси, когда видно, что $\Delta \sim t^{1/\alpha}$, причем $\alpha \neq 2$.

Есть несколько видов моделей аномальной дисперсии [4]. В одном из них используется факт, что диффузия может быть описана процессом стохастического движения частиц(CTRM — Continuous Time Random Walk Theory). Если дисперсия смещения частицы в одном шаге блуждания конечна, этот процесс носит классический характер, и $\alpha = 2$. К нефиковской диффузии приводит процесс блуждания с распределением смещений, при котором конечной дисперсии смещения не существует. Такие распределения названы распределениями Леви, а сам процесс блуждания частицы с таким распределением называют полетами Леви [5]. В этом случае оказывается, что $\alpha < 2$, т.е. распространение вещества идет быстрее, нежели при классической диффузии (супердиффузия).

При использовании модели случайных блужданий на практике возникает известная трудность, заключающаяся в необходимости получения случайных последовательностей смещений с распределением с бесконечной дисперсией.

Важную роль в CTRM играют случайные величины с устойчивыми распределениями. Функция распределения случайной величины $F(X)$ называется устойчивой в широком смысле, если нормированная сумма n одинаково распределенных (с функцией распреде ления $F(X)$) случайных величин $\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{a_n}-b_n$ имеет определенную функцию распределения $G(X)$ при $n\to\infty$ (a_b, b_n, — некоторые константы). Тогда говорят, что распределение F принадлежитк области притяжения распределения G. Если нормированная сумма n одинаково распределенных с функцией распределения $F(X)$ случайных величин при $n\to\infty$ выполняет ту же функцию распределения $F(X)$(т.е. функции $G(X)$ и $F(X)$ совпадают), распределение $F(X)$ называется строго устойчивым. Строго устойчивые распределения обладают тем свойством, что сумма (нормированная) любого количества одинаково распределенных случайных величин имеет то же распределение.

Смысл строго устойчивых распределений ясен: интегральные смещения(сумма ряда смещений) имеют такое же распределение, как отдельные смещения, и распределение частиц сохраняет подобие самому себе независимо от числа смещений.

Расчет строго устойчивых случайных величин с тяжелыми хвостами затруднен т.к. отсутствуют аналитические выражения описывающие функцию плотности вероятности распределения и обратную. Исключениями являются распределения Гаусса, Коши и Леви [6].

Аналитическое приближение сначала было получено для для распределений с $\alpha < 1$, а потом обобщено на любые α. Генераторы такого типа называют точными [7].

Алгоритм моделирования :

1) Сгенерировать две равномерно распределенных величины $U \in U(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ и $W \in U(0,1)$.

2) $E = -\ln W$

3) Если $\alpha \neq 1$ вычислить:

   а) $B(\alpha,\beta) = \dfrac{\arctan(\beta\tan\frac{\pi}{2})}{\alpha}$

   б) $S(\alpha,\beta) = (1+\beta^2\tan^2\dfrac{\pi\alpha}{2})^{\dfrac{1}{2\alpha}}$

   в) $X = S(\alpha,\beta)\dfrac{\sin\alpha(U+B(\alpha,\beta))}{(\cos U)^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\dfrac{\cos(U-\alpha(U+B(\alpha,\beta)))}{E}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$

4) Если $\alpha = 1$ вычислить:

$$X = \frac{2}{\pi}(\frac{\pi}{2}+\beta U)\tan U - \beta\ln\frac{\frac{\pi}{2}E\cos U}{\frac{\pi}{2}+\beta U}$$

5) Установить:

$$|Y| = \begin{cases} \sigma X + \mu & \text{для } \alpha \neq 1 \\ \sigma X + \frac{2}{\pi}\beta \ln \sigma + \mu & \text{для } \alpha = 1 \end{cases}$$

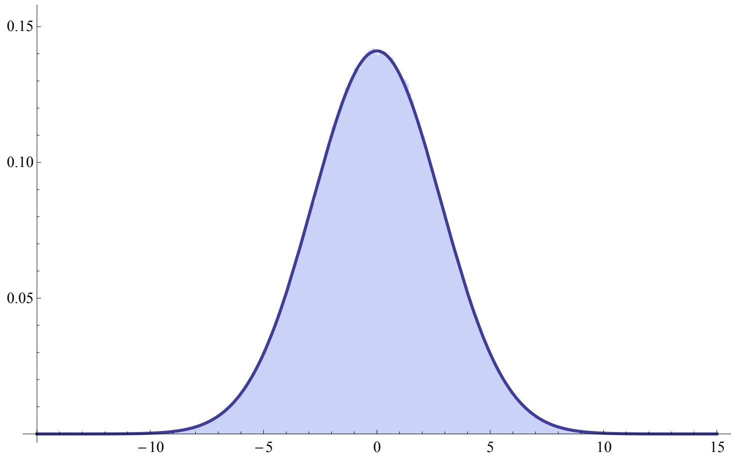

Рис. 1. Нормальное распределение $exp(-x^2/16)/(4\sqrt{\pi})$ и генератор устойчивого с параметрами $\alpha = 2, \mu = 0, \sigma = 2, N = 10^5$.

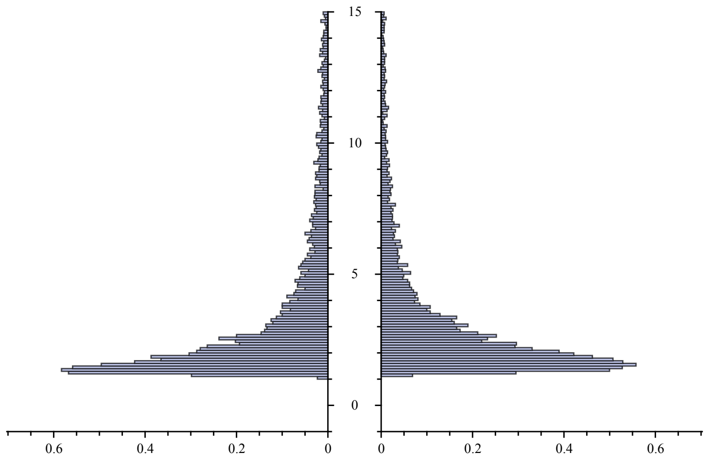

Рис. 2. Распределение Леви $exp(-1/(2x-2))(1/(x-1))^{3/2})/(\sqrt{2\pi})$ и генератор устойчивого с параметрами $\alpha = 0.5, \beta = 1, \mu = 1, \sigma = 1, N = 10^5$.

Модель диффузионного процесса

В модели генерируются траектории множества точек, случайно смещающихся на каждом временном шаге и распределение смещения есть распределение Леви. Вероятностные уравнения для координат частиц в процессе стохастического смещения:

$$x_i^{n+1} = x_i^n + \Delta t^{1/\alpha}\xi_i,$$

где x_i^n — координата i-й точки в n-й шаг времени; ξ_i — случайная величина, полученая на основе предложенного базового алгоритма для генерирования устойчивой случайной величины в широком смысле либо является суммой таких величин(аппроксимация строго устойчивой случайной величины); Δt — временной шаг; α — параметр степенного распределения [4].

Приведенное уравнение дает смещение частицы за один временной шаг. В случае строгой устойчивости распределения ξ_i, при таком определении этого смещения изменение распределения частиц за произвольное время T не будет зависеть от временного шага. В этом случае из уравнений движения частиц следует, что пространственный масшаб распределениячастиц меняется со временем, как $r \sim t^{1/\alpha}$. Другими словами, движение автомодельно, и автомодельная координата имеет вид $r/t^{1/\alpha}$.

Результаты численного моделирования(в пакете Mathematica):

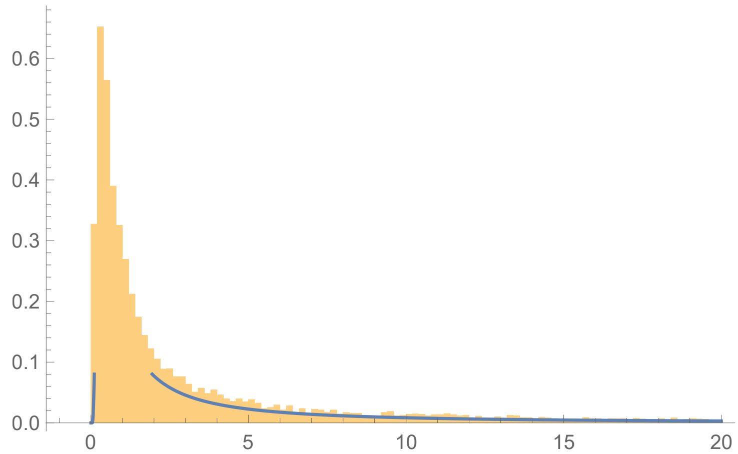

Рис. 3. Устойчивое распределение $\alpha = 0.5, \beta = -1 N = 10^3$ и распределение Леви

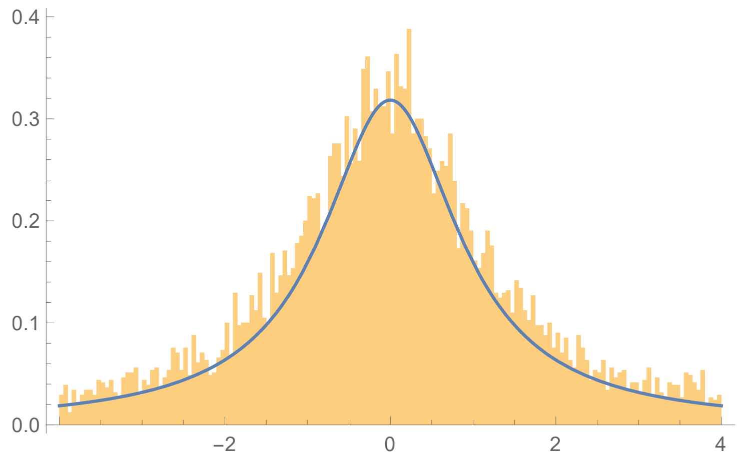

Рис. 4. Устойчивое распределение $\alpha = 1, \beta = 0, N = 10^3$ и распределение Коши

Заключение

Таким образом на языке C++ на основе точной модели реализован генератор устойчивых случайных величин. Проведено сравнение результатов с вырождеными значениями с аналитическими функциями. В пакете Mathematica проведено прямое численное моделирование диффузионного процесса с тяжелыми хвостами. Полученый результат соответствует аналитическим вырожденым случаям.

Список литературы

[1] Шредер В., *Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая.*, РХД, Москва-Ижевск, 2001, 528 с. [Shreder V. Fraktaly, haos, stepennye zakony. Miniatjury iz beskonechnogo raja. Moskva-Izhevsk: RHD, 2001. 528].

[2] Шустер Г., *Детерминированный Хаос: Введение.*, Мир, Москва, 1988, 253 с. [Shuster G. Determinirovannyj Haos: Vvedenie. Moskva. Mir, 1988. 253].

[3] Писаренко В. Ф. Родкин М. В., *Распределения с тяжелыми хвостами: приложения к анализу катастроф.*, **38**, Вычислительная сейсмология, Москва, 2009, 242 с. [Pisarenko V. F. Rodkin M. V. Raspredelenija s tjazhelymi hvostami: prilozhenija k analizu katastrof. vol. 38. Moskva. Vychislitel'naja sejsmologija, 2009. 242].

[4] Головизнин В. М. Сороковикова О. Мелькина М. Короткин А., *Стохастический подход к моделированию распространения примеси в трещиноватых и сильнонеоднородных средах: Связь стохастического моделирования и подходов, использующих уравнения дробной диффузии.*, ИБРАЭ РАН, 2005, 34 с. [Goloviznin B. M. Sorokovikova O. Mel'kina M. Korotkin A. Stohasticheskij podhod k modelirovaniju rasprostranenija primesi v treshhinovatyh i sil'noneodnorodnyh sredah: Svjaz' stohasticheskogo modelirovanija i podhodov, ispol'zujushhih uravnenija drobnoj diffuzii. IBRAJe RAN, 2005. 34].

[5] Учайкин В. В., *Метод дробных производных*, Артишок, Ульяновск, 2012, 512 с. [Uchajkin V. V. Metod drobnyh proizvodnyh. Ul'janovsk: Artishok, 2012. 512].

[6] Феллер В., *Введение в теорию вероятности.*, Наука, Москва, 1987, 752 с. [Feller V. Vvedenie v teoriju verojatnosti. Moskva. Nauka, 1987. 752].

[7] Архипов С. В. Багрова И. А., *О моделировании односторонних устойчивых случайных величин*, Вестник Тверского государственного университета, 2009, 53–62 с. [Arhipov S. V. Bagrova I. A. O modelirovanii odnostoronnih ustojchivyh sluchajnyh velichin. Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo universiteta. 2009. 53–62.].

Список литературы (ГОСТ)

[1] Шредер В. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. Москва-Ижевск: РХД, 2001. 528 с.

[2] Шустер Г. Детерминированный Хаос: Введение. М.: Мир, 1988. 253 с.

[3] Писаренко В. Ф. Родкин М. В. Распределения с тяжелыми хвостами: приложения к анализу катастроф. Т. 38. М.: Вычислительная сейсмология, 2009. 242 с.

[4] Головизнин В. М. Сороковикова О. Мелькина М. Короткин А. Стохастический подход к моделированию распространения примеси в трещиноватых и сильнонеоднородных средах: Связь стохастического моделирования и подходов, использующих уравнения дробной диффузии. ИБРАЭ РАН, 2005. 34 с.

[5] Учайкин В. В. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2012. 512 с.

[6] Феллер В. Введение в теорию вероятности. М.: Наука, 1987. 752 с.

[7] Архипов С. В. Багрова И. А. О моделировании односторонних устойчивых случайных величин // Вестник Тверского государственного университета. 2009. С. 53–62.

Для цитирования: Захаров И. С. Модель диффузионного процесса с тяжелыми хвостами в распределении // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2017. № 2(18). C. 53-58. DOI: 10.18454/2079-6641-2017-18-2-53-58

For citation: Zakharov I. S. Model of the diffusion process with heavy tails in the distribution, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2017, **18**: 2, 53-58. DOI: 10.18454/2079-6641-2017-18-2-53-58

Поступила в редакцию / Original article submitted: 30.05.2017