Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2017. № 2(18). C. 20-40. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2017-18-2-20-40

УДК 517.2/3, 517.956

О НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕНИЯХ СВОЙСТВ ОПЕРАТОРА ЭРДЕЙИ-КОБЕРА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Ш. Т. Каримов

Ферганский государственный университет, 150100, Узбекистан г. Фергана, ул. Мураббийлар, 19

E-mail: shkarimov09@rambler.ru

В работе доказано композиция обобщенного оператора Эрдейи-Кобера с дифференциальными операторами высокого порядка. Применяя доказанные теоремы, построена явная формула решения аналога сингулярной задачи Коши для итерированного уравнения Клейна-Гордона-Фока.

Ключевые слова: оператор Эрдейи - Кобера, дифференциальный оператор Бесселя, уравнения Клейна-Гордона-Фока

MSC 26A33, 35L10

ABOUT SOME GENERALIZATIONS OF THE PROPERTIES OF THE ERDÉLYI-KOBER OPERATOR AND THEIR APPLICATION

Sh. T. Karimov

Ferghana State University, 150100, Uzbekistan, Ferghana, 19, Murabbiylar str.,

E-mail: shkarimov09@rambler.ru

In this work a composition of Erdélyi-Kober operator with differential operators of the high order is proved. Applying the proved theorems, explicit formulas of a solution of the analogue of the singular Cauchy problem for the iterated Klein-Gordon-Fock equation.

Key words: Erdélyi-Kober operator, Bessel differential operator, Klein-Gordon-Fock equation

Введение

В теории и приложениях широко используются различные модификации и обобщения классических операторов интегрирования и дифференцирования дробного порядка. К таким модификациям относятся, в частности, операторы Эрдейи - Кобера (см. [1, гл. IV, п. 18; гл. VII, п. 37], [2], [3, гл. I, II]). Их различные модификации, обобщения и приложения могут быть найдены в работах А. Эрдейи [4]-[8], И. Снеддона [2], [9], Дж. Лоундеса [10]-[12] и В. Кирьяковой [3].

В работе Лоундеса [10] был введен и исследован обобщенный оператор Эрдейи - Кобера с функцией Бесселя в ядре

$$J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=2^\alpha\lambda^{1-\alpha}x^{-2\alpha-2\eta}\int\limits_0^x t^{2\eta+1}\frac{J_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)}{(x^2-t^2)^{(1-\alpha)/2}}f(t)dt, \tag{1}$$

где $\alpha,\eta,\lambda\in R$, $\alpha>0$, $\eta\geq -1/2$, $J_\nu(z)$ -функция Бесселя первого рода порядка ν. Оператор (1) при $\lambda=0$ совпадает с обычным оператором Эрдейи - Кобера [1, гл. IV, п. 18]

$$I_{\eta,\alpha}f(x)=\frac{2x^{-2(\eta+\alpha)}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x (x^2-t^2)^{\alpha-1}t^{2\eta+1}f(t)dt, \tag{2}$$

где $\Gamma(\alpha)$ - гамма-функция Эйлера.

Основные свойства операторов $I_{\eta,\alpha}$ и $J_\lambda(\eta,\alpha)$ можно найти в книге [1, гл. IV, п. 18; гл. VII, п. 37].

Заметим, что свойства оператора (1) в весовых пространствах $L_p(0,\infty)$ были изучены в работах [13] и [14]. В них обобщенные операторы Эрдейи - Кобера названы операторами Лоундеса.

Для операторов (1) и (2) справедлива следующая теорема (см. [1, Лемма 40.2], [6], [11]).

Теорема 1. *Пусть* $\alpha>0$, $f(x)\in C^2(0,b)$, $b>0$, $x^{2\eta+1}f(x)$ *интегрируема в нуле и* $\lim\limits_{x\to 0}x^{2\eta+1}f'(x)=0$. *Тогда*

$$(B^x_{\eta+\alpha}+\lambda^2)J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=J_\lambda(\eta,\alpha)B^x_\eta f(x), \tag{3}$$

в частности, если $\lambda=0$ *, тогда*

$$B^x_{\eta+\alpha}I_{\eta,\alpha}f(x)=I_{\eta,\alpha}B^x_\eta f(x), \tag{4}$$

где $B^x_\eta\equiv x^{-2\eta-1}\dfrac{\partial}{\partial x}x^{2\eta+1}\dfrac{\partial}{\partial x}=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{2\eta+1}{x}\dfrac{\partial}{\partial x}$ *-дифференциальный оператор Бесселя.*

В статье [15] А.Вайнштейн для одного уравнения гиперболического типа с дифференциальным оператором Бесселя установил формулы, связывающие решения таких уравнений при различных значениях параметра оператора Бесселя через дробный интеграл. Эта идея существенно развита в работах А. Эрдейи [4]-[8], который, продолжив исследования из статьи А. Вайнштейна [16], более подробно изучил свойства дифференциального оператора Бесселя. В этих работах он доказал справедливость равенства (4). Эрдейи, в основном, изучил свойства самих операторов вида (2), их композиции и оценки норм.

После А. Эрдейи его результаты были обобщены Дж. Лоундесом [11], где доказано равенство (3). Полученные результаты Лоундес применил к решению некоторых краевых задач для уравнения Лапласа со смешанными краевыми условиями. Кроме того, в работе [12], применив равенство (3), он решил задачу Коши для многомерного гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами.

В данной работе исследованы композиции обобщенного оператора Эрдейи-Кобера с дифференциальными операторами высокого порядка, в частности, со степенями оператора Бесселя. Полученные результаты применены к решению аналога сингулярной задачи Коши для итерированного дифференциального уравнения Клейна-Гордона-Фока с оператором Бесселя.

В дальнейшем нам понадобится следующая форма оператора (1):

$$J_\lambda(\eta,\alpha)f(x) = \frac{2x^{-2(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x t^{2\eta+1}(x^2-t^2)^{\alpha-1} \bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right) f(t)dt. \tag{5}$$

где $\bar{J}_\nu(z)$ - функция Бесселя - Клиффорда, которая выражается через функции Бесселя $J_\nu(z)$ по формуле [1]:

$$\bar{J}_\nu(z) = \Gamma(\nu+1)(z/2)^{-\nu}J_\nu(z) = {}_0F_1(\nu+1;-z^2/4) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-z^2/4)^k}{(\nu+1)_k k!}. \tag{6}$$

Оператор, обратный оператору (5), имеет вид [1]:

$$J_\lambda^{-1}(\eta,\alpha)f(x) = \frac{2x^{-2\eta}}{\Gamma(p-\alpha)}\left(\frac{1}{2x}\frac{d}{dx}\right)^p \int_0^x \frac{\bar{I}_{p-1-\alpha}\left(\lambda\sqrt{x^2-s^2}\right)}{(x^2-s^2)^{\alpha-p+1}} s^{2(\eta+\alpha)+1} f(s)ds, \tag{7}$$

где $p=[\alpha]+1$, $\bar{I}_\nu(z)=\bar{J}_\nu(iz)=\Gamma(\nu+1)(z/2)^{-\nu}I_\nu(z)$, $I_\nu(z)$ - модифицированная функция Бесселя порядка ν, а $[\alpha]-$ целая часть числа α.

1. Обобщение свойств оператора Эрдейи-Кобера $J_\lambda(\eta,\alpha)$

1.1. Композиция оператора $J_\lambda(\eta,\alpha)$ со степенями оператора Бесселя

Пусть $[B_\eta^x]^0 = E$, $E-$ единичный оператор, $[B_\eta^x]^m = [B_\eta^x]^{m-1}[B_\eta^x]$ - $m-$ая степень оператора Бесселя. В дальнейшем m означает неотрицательное целое число.

Теорема 2. *Пусть* $\alpha>0$, $\eta\geq -1/2$, $f(x)\in C^{2m}(0,b)$, $b>0$, *функции* $x^{2\eta+1}[B_\eta^x]^{k+1}f(x)$ *интегрируемы в нуле и* $\lim\limits_{x\to 0} x^{2\eta+1}\dfrac{d}{dx}[B_\eta^x]^k f(x) = 0$, $k=\overline{0,m-1}$. *Тогда*

$$[B_{\eta+\alpha}^x + \lambda^2]^m J_\lambda(\eta,\alpha)f(x) = J_\lambda(\eta,\alpha)[B_\eta^x]^m f(x), \tag{8}$$

или

$$[B_{\eta+\alpha}^x]^m J_\lambda(\eta,\alpha)f(x) = J_\lambda(\eta,\alpha)[B_\eta^x - \lambda^2]^m f(x), \tag{9}$$

в частности, если $\lambda=0$, *тогда*

$$[B_{\eta+\alpha}^x]^m I_{\eta,\alpha}f(x) = I_{\eta,\alpha}[B_\eta^x]^m f(x).$$

Доказательство. Теорему докажем методом математической индукции по m. При $m=1$ это доказано в теореме 1. Предположим, что равенство (8) имеет место при $m=k$ и докажем, что оно справедливо при $m=k+1$.

Из равенства

$$[B^x_{\eta+\alpha}+\lambda^2]^{k+1}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=[B^x_{\eta+\alpha}+\lambda^2][B^x_{\eta+\alpha}+\lambda^2]^kJ_\lambda(\eta,\alpha)f(x)$$

по предположению индукции, имеем

$$[B^x_{\eta+\alpha}+\lambda^2][B^x_{\eta+\alpha}+\lambda^2]^kJ_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=[B^x_{\eta+\alpha}+\lambda^2]J_\lambda(\eta,\alpha)[B^x_\eta]^kf(x).$$

В последнем равенстве, применяя теорему 1 для функций $[B^x_\eta]^kf(x)$ при выполнении условий $\lim\limits_{x\to 0}x^{2\eta+1}\dfrac{d}{dx}[B^x_\eta]^jf(x)=0,\ j=\overline{0,k-1}$, которые обеспечивают применение равенства (3), получим

$$[B^x_{\eta+\alpha}+\lambda^2]^{k+1}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=J_\lambda(\eta,\alpha)[B^x_\eta]^{k+1}f(x).$$

Равенство (9) доказывается аналогично. Вторая часть теоремы 2, в силу $\bar{J}_\nu(0)=1$, следует из (8) при $\lambda=0$. □

Пусть функция $u(x,y)=u(x_1,x_2,\ldots,x_n,y)$ непрерывно дифференцируема до порядка $2m$ по переменной y и порядка не меньше чем m по x. L_x - не зависящий от y линейный дифференциальный оператор любого конечного порядка по переменной $x\in R^n$.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha>0$, $\eta\geq -1/2$, $y^{2\eta+1}[B^y_\eta]^ku(x,y)$ *интегрируемы при* $y\to 0$ *и* $\lim\limits_{y\to 0}y^{2\eta+1}\dfrac{\partial}{\partial y}[B^y_\eta]^ku(x,y)=0,\ k=\overline{0,m-1}$. *Тогда*

$$[B^y_{\eta+\alpha}+\lambda^2+L_x]^mJ^{(y)}_\lambda(\eta,\alpha)u(x,y)=J^{(y)}_\lambda(\eta,\alpha)[B^y_\eta+L_x]^mu(x,y),$$

в частности, если $\lambda=0$ *, тогда*

$$[B^y_{\eta+\alpha}+L_x]^mI^{(y)}_{\eta,\alpha}u(x,y)=I^{(y)}_{\eta,\alpha}[B^y_\eta+L_x]^mu(x,y),$$

верхний индекс y *в операторах означает переменную, по которой действуют эти операторы.*

Теорема 3 доказывается с помощью формального разложения оператора $[(B^y_\eta+\lambda^2)+L_x]^m$ по формуле $[(B^y_\eta+\lambda^2)+L_x]^m=\sum\limits_{k=1}^{m}C^k_m(L_x)^{m-k}\left[B^y_\eta+\lambda^2\right]^k$ и с применением теоремы 2, где $C^k_m=m!/[k!(m-k)!]$ - биномиальные коэффициенты.

1.2. Композиция обратного оператора $J^{-1}_\lambda(\eta,\alpha)$ со степенями дифференциального оператора Бесселя

Прежде чем приступить к исследованию свойств оператора (7) докажем некоторые свойства дифференциального оператора Бесселя, которые понадобятся в дальнейшем.

Лемма 1. *Если* $q\in N$, $\varphi(x)\in C^{2q}(0,b)$, $b>0$, *то справедливо равенство*

$$[B^x_\eta]^qx^{-2\eta}\varphi(x)=x^{-2\eta}[B^x_{-\eta}]^q\varphi(x) \tag{10}$$

Доказательство. Лемму докажем методом математической индукции по q. Пусть $q=1$. Непосредственным вычислением, имеем

$$[B_{\eta}^{x}]x^{-2\eta}\varphi(x)=x^{-2\eta-1}\frac{d}{dx}x^{2\eta+1}\frac{d}{dx}[x^{-2\eta}\varphi(x)]=$$

$$=x^{-2\eta-1}\frac{d}{dx}[x\varphi'(x)-2\eta\varphi(x)]=x^{-2\eta}\{\varphi''(x)+\frac{1-2\eta}{x}\varphi'(x)\}=x^{-2\eta}[B_{-\eta}^{x}]\varphi(x).$$

Предположим, что равенство (10) имеет место при $q=k$ и докажем, что оно справедливо и при $q=k+1$. Действительно из равенства

$$[B_{\eta}^{x}]^{k+1}x^{-2\eta}\varphi(x)=[B_{\eta}^{x}][B_{\eta}^{x}]^{k}x^{-2\eta}\varphi(x)$$

в силу предположения индукции, имеем

$$[B_{\eta}^{x}]^{k+1}x^{-2\eta}\varphi(x)=[B_{\eta}^{x}]x^{-2\eta}[B_{-\eta}^{x}]^{k}\varphi(x)=x^{-2\eta}[B_{-\eta}^{x}]^{k+1}\varphi(x).$$

□

Аналогично доказывается и следующая лемма.

Лемма 2. *Если $p\in N$, $\varphi(x)\in C^{p+2}(0,b)$, $b>0$, то справедливо равенство*

$$B_{\eta}^{x}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{p}\varphi(x)=\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{p}B_{\eta-p}^{x}\varphi(x)$$

или

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{p}B_{\eta}^{x}\varphi(x)=B_{\eta+p}^{x}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{p}\varphi(x).$$

Из лемм 1 и 2 вытекает следующее следствие.

Следствие 1. Если $\varphi(x)\in C^{2q+p}(0,b)$, $b>0$, то справедливо равенство

$$[B_{\eta}^{x}]^{q}x^{-2\eta}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{p}\varphi(x)=x^{-2\eta}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{p}[B_{-\eta-p}^{x}]^{q}\varphi(x). \tag{11}$$

Теперь перейдем к исследованию свойств оператора (7).

Теорема 4. *Пусть $p\in N$, $p-1\leqslant\alpha<p$, $\eta\geqslant-1/2$, $g(x)\in C^{2m}(0,b)$, $b>0$, функции $x^{2(\eta+\alpha)+1}[B_{\eta+\alpha}^{x}]^{k+1}g(x)$ интегрируемы в нуле и $\lim\limits_{x\to0}x^{2(\eta+\alpha)+1}(d/dx)[B_{\eta+\alpha}^{x}]^{k}g(x)=0$, $k=\overline{0,m-1}$. Тогда справедливы равенства*

$$\left[B_{\eta}^{x}\right]^{m}J_{\lambda}^{-1}(\eta,\alpha)g(x)=J_{\lambda}^{-1}(\eta,\alpha)\left[B_{\eta+\alpha}^{x}+\lambda^{2}\right]^{m}g(x), \tag{12}$$

$$\left[B_{\eta}^{x}-\lambda^{2}\right]^{m}J_{\lambda}^{-1}(\eta,\alpha)g(x)=J_{\lambda}^{-1}(\eta,\alpha)\left[B_{\eta+\alpha}^{x}\right]^{m}g(x), \tag{13}$$

в частности, если $\lambda=0$, тогда

$$\left[B_{\eta}^{x}\right]^{m}I_{\eta,\alpha}^{-1}g(x)=I_{\eta,\alpha}^{-1}\left[B_{\eta+\alpha}^{x}\right]^{m}g(x). \tag{14}$$

Доказательство. Теорему докажем методом математической индукции по m. Пусть $m=1$. Покажем, что если $\lim\limits_{x\to0}x^{2(\eta+\alpha)+1}g'(x)=0$, то имеет место равенство

$$\left[B_{\eta}^{x}\right]J_{\lambda}^{-1}(\eta,\alpha)g(x)=J_{\lambda}^{-1}(\eta,\alpha)\left[B_{\eta+\alpha}^{x}+\lambda^{2}\right]g(x). \tag{15}$$

Из определения обратного оператора (7), имеем

$$\left[B_{\eta}^{x}\right] J_{\lambda}^{-1}(\eta,\alpha)g(x)=\frac{2^{1-p}}{\Gamma(p-\alpha)}\left[B_{\eta}^{x}\right]\left\{x^{-2\eta}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{p}G(x)\right\},$$

где

$$G(x)=\int\limits_{0}^{x}(x^2-\xi^2)^{p-1-\alpha}\bar{I}_{p-1-\alpha}\left(\lambda\sqrt{x^2-\xi^2}\right)\xi^{2(\eta+\alpha)+1}g(\xi)d\xi=$$

$$=x^{2(\eta+p)}\int\limits_{0}^{1}(1-s^2)^{p-1-\alpha}\bar{I}_{p-1-\alpha}\left(\lambda x\sqrt{1-s^2}\right)s^{2(\eta+\alpha)+1}g(xs)ds.$$

Из равенства (11) при $q=1$, получим

$$\left[B_{\eta}^{x}\right] J_{\lambda}^{-1}(\eta,\alpha)g(x)=\frac{2^{1-p}x^{-2\eta}}{\Gamma(p-\alpha)}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{p}\left[B_{-\eta-p}^{x}\right]G(x). \tag{16}$$

Учитывая определение оператора Бесселя, после вычисления первой производной, имеем

$$\left[B_{-\eta-p}^{x}\right]G(x)=G_1(x)+G_2(x)+G_3(x), \tag{17}$$

где

$$G_1(x)=x^{2(\eta+p)-1}\frac{d}{dx}\left\{2(\eta+p)\int\limits_{0}^{1}(1-s^2)^{p-1-\alpha}\bar{I}_{p-1-\alpha}\left(\lambda x\sqrt{1-s^2}\right)s^{2(\eta+\alpha)+1}g(xs)ds\right\},$$

$$G_2(x)=x^{2(\eta+p)-1}\frac{d}{dx}\left\{x\int\limits_{0}^{1}(1-s^2)^{p-1-\alpha}\frac{d}{dx}\bar{I}_{p-1-\alpha}\left(\lambda x\sqrt{1-s^2}\right)s^{2(\eta+\alpha)+1}g(xs)ds\right\},$$

$$G_3(x)=x^{2(\eta+p)-1}\frac{d}{dx}\left\{x\int\limits_{0}^{1}(1-s^2)^{p-1-\alpha}\bar{I}_{p-1-\alpha}\left(\lambda x\sqrt{1-s^2}\right)s^{2(\eta+\alpha)+2}g'(xs)ds\right\}.$$

В равенстве $G_1(x)$, вычислив производную и применяя следующие формулы

$$\frac{d}{dx}\bar{I}_{p-1-\alpha}\left(\lambda x\sqrt{1-s^2}\right)=\frac{\lambda^2 x}{2(p-\alpha)}(1-s^2)\bar{I}_{p-\alpha}\left(\lambda x\sqrt{1-s^2}\right),$$

$$(1-s^2)^{p-1-\alpha}\bar{I}_{p-1-\alpha}\left(\lambda x\sqrt{1-s^2}\right)=-\frac{1}{2(p-\alpha)}\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\left[(1-s^2)^{p-\alpha}\bar{I}_{p-\alpha}\left(\lambda x\sqrt{1-s^2}\right)\right],$$

а также учитывая условие $\lim\limits_{x\to 0}x^{2(\eta+\alpha)+1}g'(x)=0$, произведем интегрирование по частям, а затем, возвращаясь к старым переменным, получим

$$G_1(x)=\frac{\eta+p}{p-\alpha}\left\{\lambda^2 x^{-2}\int\limits_{0}^{x}(x^2-\xi^2)^{p-\alpha}\bar{I}_{p-\alpha}\left(\lambda\sqrt{x^2-\xi^2}\right)\xi^{2(\eta+\alpha)+1}g(\xi)d\xi+\right.$$

$$\left.+x^{-2}\int\limits_{0}^{x}(x^2-\xi^2)^{p-\alpha}\bar{I}_{p-\alpha}\left(\lambda\sqrt{x^2-\xi^2}\right)\xi^{2(\eta+\alpha)+1}[B_{\eta+\alpha}^{\xi}]g(\xi)d\xi\right\}.$$

Произведя аналогичные вычисления в выражениях $G_2(x)$ и $G_3(x)$, находим

$$G_2(x)=-\frac{\eta+p}{p-\alpha}\lambda^2x^{-2}\int\limits_0^x(x^2-\xi^2)^{p-\alpha}\bar{I}_{p-\alpha}\left(\lambda\sqrt{x^2-\xi^2}\right)\xi^{2(\eta+\alpha)+1}g(\xi)d\xi+$$

$$+\lambda^2\int\limits_0^x(x^2-\xi^2)^{p-1-\alpha}\bar{I}_{p-1-\alpha}\left(\lambda\sqrt{x^2-\xi^2}\right)\xi^{2(\eta+\alpha)+1}g(\xi)d\xi,$$

$$G_3(x)=-\frac{\eta+p}{p-\alpha}x^{-2}\int\limits_0^x(x^2-\xi^2)^{p-\alpha}\bar{I}_{p-\alpha}\left(\lambda\sqrt{x^2-\xi^2}\right)\xi^{2(\eta+\alpha)+1}[B^{\xi}_{\eta+\alpha}]g(\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_0^x(x^2-\xi^2)^{p-1-\alpha}\bar{I}_{p-1-\alpha}\left(\lambda\sqrt{x^2-\xi^2}\right)\xi^{2(\eta+\alpha)+1}[B^{\xi}_{\eta+\alpha}]g(\xi)d\xi.$$

Подставляя найденные значения функций $G_k(x),\ k=1,2,3$ в равенство (17), после приведения подобных членов, получим

$$\left[B^x_{-\eta-p}\right]G(x)=\int\limits_0^x(x^2-\xi^2)^{p-1-\alpha}\bar{I}_{p-1-\alpha}\left(\lambda\sqrt{x^2-\xi^2}\right)\xi^{2(\eta+\alpha)+1}[B^{\xi}_{\eta+\alpha}+\lambda^2]g(\xi)d\xi.$$

Подставляя в (16), последнее выражение, в силу определения обратного оператора, получим равенство (15). Теперь предположим, что равенство (12) верно при $m=n$ и докажем, что оно верно и при $m=n+1$.

Из равенства

$$\left[B^x_{\eta}\right]^{n+1}J^{-1}_{\lambda}(\eta,\alpha)g(x)=\left[B^x_{\eta}\right]\left[B^x_{\eta}\right]^{n}J^{-1}_{\lambda}(\eta,\alpha)g(x),$$

в силу предположения индукции, имеем

$$\left[B^x_{\eta}\right]^{n+1}J^{-1}_{\lambda}(\eta,\alpha)g(x)=\left[B^x_{\eta}\right]J^{-1}_{\lambda}(\eta,\alpha)\left[B^x_{\eta+\alpha}+\lambda^2\right]^{n}g(x).$$

В силу условия теоремы $\lim\limits_{x\to0}x^{2(\eta+\alpha)+1}\frac{d}{dx}[B^x_{\eta+\alpha}]^ng(x)=0$, для функции $\left[B^x_{\eta+\alpha}+\lambda^2\right]^ng(x)$ условия применимости формулы (15) выполняются. Поэтому, применяя формулу (15) к последнему равенству, получим

$$\left[B^x_{\eta}\right]^{n+1}J^{-1}_{\lambda}(\eta,\alpha)g(x)=J^{-1}_{\lambda}(\eta,\alpha)\left[B^x_{\eta+\alpha}+\lambda^2\right]^{n+1}g(x).$$

Аналогично доказывается и формула (13). В силу $\bar{J}_\nu(0)=1$, из равенства (12) при $\lambda=0$ следует справедливость формулы (14). □

В частности, из формулы (12) и (14), при $\eta=-1/2$ и выполнении условий теоремы 4, соответственно следует справедливость следующих равенств

$$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}J^{-1}_{\lambda}(-1/2,\,\alpha)f(x)=J^{-1}_{\lambda}(-1/2,\,\alpha)\left[B^x_{\alpha-1/2}+\lambda^2\right]^mf(x),$$

$$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}I^{-1}_{-1/2,\alpha}g(x)=I^{-1}_{-1/2,\alpha}\left[B^x_{\alpha-1/2}\right]^mg(x).$$

1.3. Производные высокого порядка оператора $J_\lambda(\eta,\alpha)$

Пусть $D_\eta^0=E,\ D_\eta=x^{-2\eta}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)x^{2\eta},\ D_\eta^m=D_\eta^{m-1}D_\eta=D_\eta D_\eta ... D_\eta$ - m - ая степень оператора D_η, которая представима в виде $D_\eta^m=x^{-2\eta}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^m x^{2\eta}$.

Теорема 5. *Пусть* $\alpha>0,\ \eta\geq -1/2,\ f(x)\in C^m(0,b), b>0,$ *функции* $x^{2\eta+1}D_\eta^{k+1}f(x)$ *интегрируемы в нуле и* $\lim\limits_{x\to 0}x^{2\eta}D_\eta^k f(x)=0,\ k=\overline{0,m-1}$. *Тогда*

$$D_{\eta+\alpha}^m J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=J_\lambda(\eta,\alpha)D_\eta^m f(x). \tag{18}$$

Доказательство. Эта теорема также доказывается с применением метода математической индукции по m. Покажем, что равенство (18) справедливо при $m=1$:

$$D_{\eta+\alpha}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=J_\lambda(\eta,\alpha)D_\eta f(x). \tag{19}$$

Рассмотрим функцию

$$D_{\eta+\alpha}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=\frac{2x^{-2(\eta+\alpha)}}{\Gamma(\alpha)}\lim_{\varepsilon\to 0}F_\varepsilon(x)$$

где ε - достаточно малое положительное действительное число, а

$$F_\varepsilon(x)=\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)\int\limits_0^{x-\varepsilon}(x^2-t^2)^{\alpha-1}\bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)t^{2\eta+1}f(t)dt.$$

Применяя правило дифференцирования интеграла, получим

$$F_\varepsilon(x)=\frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{x}(2x-\varepsilon)^{\alpha-1}\bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{\varepsilon(2x-\varepsilon)}\right)(x-\varepsilon)^{2\eta+1}f(x-\varepsilon)+$$

$$+\int\limits_0^{x-\varepsilon}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)\left[(x^2-t^2)^{\alpha-1}\bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)\right]t^{2\eta+1}f(t)dt$$

Далее, учитывая легко проверяемое равенство

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)\left[(x^2-t^2)^{\alpha-1}\bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)\right]=$$

$$=-\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)\left[(x^2-t^2)^{\alpha-1}\bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)\right],$$

имеем

$$F_\varepsilon(x)=\frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{x}(2x-\varepsilon)^{\alpha-1}\bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{\varepsilon(2x-\varepsilon)}\right)(x-\varepsilon)^{2\eta+1}f(x-\varepsilon)-$$

$$-\int\limits_0^{x-\varepsilon}\left(\frac{d}{dt}\right)\left[(x^2-t^2)^{\alpha-1}\bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)\right]t^{2\eta}f(t)dt.$$

Применяя к последнему интегралу правило интегрирования по частям и принимая в внимание условие теоремы 5, после приведения подобных членов, получим

$$F_\varepsilon(x)=-\varepsilon^\alpha x^{-1}(2x-\varepsilon)^{\alpha-1}\bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{\varepsilon(2x-\varepsilon)}\right)(x-\varepsilon)^{2\eta}f(x-\varepsilon)+$$

$$+\int\limits_0^{x-\varepsilon}\left[(x^2-t^2)^{\alpha-1}\bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)\right]t^{2\eta+1}D_\eta f(t)dt.$$

Отсюда, в силу $\alpha>0$, при $\varepsilon\to 0$ получим равенство (19).

Предположим, что равенство (18) справедливо при $m=k$. Докажем, что оно верно при $m=k+1$.

Из равенства

$$D^{k+1}_{\eta+\alpha}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=D_{\eta+\alpha}D^k_{\eta+\alpha}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)$$

по предположению индукции, при выполнении условий теоремы 5, имеем

$$D_{\eta+\alpha}D^k_{\eta+\alpha}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=D_{\eta+\alpha}J_\lambda(\eta,\alpha)D^k_\eta f(x).$$

К правой части последнего равенства, применяя формулу (19) с учетом условий теоремы 5, получим

$$D^{k+1}_{\eta+\alpha}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=J_\lambda(\eta,\alpha)D^{k+1}_\eta f(x).$$

□

Из теоремы 5, в частности при $\eta=0$, $\alpha>0$, $f(x)\in C^m(0,b)$, $b>0$, интегрируемости функции $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\dfrac{d}{dx}\right)^k f(x)$ в нуле и $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\dfrac{d}{dx}\right)^k f(x)=0$, $k=\overline{0,m-1}$, следует справедливость следующего равенства

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^m\int\limits_0^x(x^2-t^2)^{\alpha-1}\bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)f(t)tdt=$$

$$=\int\limits_0^x(x^2-t^2)^{\alpha-1}\bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)\left[\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^m f(t)\right]tdt. \tag{20}$$

Кроме того, учитывая $\bar{J}_\nu(0)=1$, из равенства (20) при $\lambda=0$, имеем

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^m\int\limits_0^x(x^2-t^2)^{\alpha-1}f(t)tdt=\int\limits_0^x(x^2-t^2)^{\alpha-1}\left[\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^m f(t)\right]tdt.$$

Теорема 6. *Пусть* $\alpha>0$, $\eta\geqslant -1/2$, $f(x)\in C^{2m}(0,b)$, $b>0$, *функции* $x^{2\eta+1}[B^x_\eta]^{k+1}f(x)$ *интегрируемы в нуле и* $\lim\limits_{x\to 0}x^{2\eta+1}\dfrac{d}{dx}[B^x_\eta]^k f(x)=0$, $k=\overline{0,m-1}$. *Тогда*

$$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=\sum_{j=0}^m a_{mj}x^{2j}J_\lambda(\eta,\alpha+m+j)\left(B^x_\eta-\lambda^2\right)^{m+j}f(x), \tag{21}$$

$$\frac{d^{2m+1}}{dx^{2m+1}}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=\sum_{j=0}^m b_{mj}x^{2j+1}J_\lambda(\eta,\alpha+m+j+1)\left(B^x_\eta-\lambda^2\right)^{m+j+1}f(x), \tag{22}$$

где постоянные a_{mj} *и* b_{mj} *определяются из следующих рекуррентных соотношений:*

$$a_{00}=1,\, b_{00}=1/2,\, b_{mj}=(1/2)a_{mj}+2(j+1)a_{m(j+1)},\, 0\leqslant j\leqslant m, a_{mj}=0,\, j>m,$$

$$a_{(m+1)j} = (1/2)b_{m(j-1)} + (2j+1)b_{mj},\ 1 \leqslant j \leqslant m, b_{mj} = 0,\ j > m, a_{(m+1)0} =$$

$$= b_{m0} = 2^{-(m+1)}(2m+1)!!. \tag{23}$$

Доказательство. Теорему докажем методом математической индукции по m. Покажем, что равенства (21) и (22) справедливы при $m = 1$.

Из определения обобщенного оператора Эрдейи-Кобера (5), после замены переменной интегрирования по формуле $t = xs$, имеем

$$J_\lambda(\eta,\alpha)f(x) = \frac{2}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 (1-s^2)^{\alpha-1}\bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda x\sqrt{1-s^2}\right)s^{2\eta+1}f(xs)ds. \tag{24}$$

Вычислим первую производную

$$\frac{d}{dx}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x) = \frac{2}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 (1-s^2)^{\alpha-1}s^{2\eta+1}\frac{d}{dx}\left[\bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda x\sqrt{1-s^2}\right)f(xs)\right]ds =$$

$$= \frac{2}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 (1-s^2)^{\alpha-1}\bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda x\sqrt{1-s^2}\right)s^{2\eta+2}f'(xs)ds +$$

$$+\frac{2}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 (1-s^2)^{\alpha-1}s^{2\eta+1}f(xs)\frac{d}{dx}\left[\bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda x\sqrt{1-s^2}\right)\right]ds.$$

Отсюда, применяя формулы

$$\frac{d}{dx}\bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda x\sqrt{1-s^2}\right) = -\frac{\lambda^2}{2\alpha}x(1-s^2)\bar{J}_\alpha\left(\lambda x\sqrt{1-s^2}\right),$$

$$(1-s^2)^{\alpha-1}\bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda x\sqrt{1-s^2}\right) = -\frac{1}{2\alpha}\left(\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\right)\left[(1-s^2)^\alpha\bar{J}_\alpha\left(\lambda x\sqrt{1-s^2}\right)\right],$$

получим

$$\frac{d}{dx}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x) = -\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 \frac{d}{ds}\left[(1-s^2)^\alpha\bar{J}_\alpha\left(\lambda x\sqrt{1-s^2}\right)\right]s^{2\eta+1}f'(xs)ds -$$

$$-\frac{\lambda^2 x}{\alpha\Gamma(\alpha}\int\limits_0^1 (1-s^2)^\alpha\bar{J}_\alpha\left(\lambda x\sqrt{1-s^2}\right)s^{2\eta+1}f(xs)ds.$$

В первом интеграле, произведя интегрирование по частям, с учётом условия $\lim\limits_{x\to 0}x^{2\eta+1}\dfrac{d}{dx}f(x) = 0$, имеем

$$\frac{d}{dx}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x) = \frac{x}{\alpha\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 (1-s^2)^\alpha\bar{J}_\alpha\left(\lambda x\sqrt{1-s^2}\right)s^{2\eta+1}\left[B_\eta^{xs}-\lambda^2\right]f(xs)ds.$$

Принимая во внимание формулу (24) и $\alpha\Gamma(\alpha)=\Gamma(\alpha+1)$, из последнего равенства находим

$$\frac{d}{dx}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=\frac{x}{2}J_\lambda(\eta,\alpha+1)\left[B_\eta^x-\lambda^2\right]f(x). \tag{25}$$

Теперь вычислим вторую производную

$$\frac{d^2}{dx^2}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=\frac{1}{2}J_\lambda(\eta,\alpha+1)\left[B_\eta^x-\lambda^2\right]f(x)+$$

$$+\frac{x}{2}\frac{d}{dx}J_\lambda(\eta,\alpha+1)\left[B_\eta^x-\lambda^2\right]f(x).$$

Применяя формулу (25) ко второму слагаемому и учитывая условие теоремы, имеем

$$\frac{d^2}{dx^2}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=\frac{1}{2}J_\lambda(\eta,\alpha+1)\left[B_\eta^x-\lambda^2\right]f(x)+$$

$$+\frac{x^2}{4}J_\lambda(\eta,\alpha+2)\left[B_\eta^x-\lambda^2\right]^2f(x).$$

Вычисляя ещё раз производную и принимая во внимание равенство (25) и условия теоремы, находим

$$\frac{d^3}{dx^3}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=\frac{3x}{4}J_\lambda(\eta,\alpha+2)\left[B_\eta^x-\lambda^2\right]^2f(x)+$$

$$+\frac{x^3}{8}J_\lambda(\eta,\alpha+3)\left[B_\eta^x-\lambda^2\right]^3f(x).$$

Полученные формулы подтверждают справедливость формулы (21) и (22) при $m=1$. Предположим, что равенства (21) и (22) справедливы при $m=k$. Докажем, что они верны при $m=k+1$. Рассмотрим производную

$$\frac{d^{2(k+1)}}{dx^{2(k+1)}}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=\frac{d}{dx}\left[\frac{d^{2k+1}}{dx^{2k+1}}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)\right].$$

Принимая во внимание формулу (22) и (25), получим

$$\frac{d^{2(k+1)}}{dx^{2(k+1)}}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=\sum_{j=0}^{k}b_{kj}\frac{d}{dx}\left[x^{2j+1}J_\lambda(\eta,\alpha+k+j+1)\left(B_\eta^x-\lambda^2\right)^{k+j+1}f(x)\right]=$$

$$\sum_{j=0}^{k}b_{kj}\left\{(2j+1)x^{2j}J_\lambda(\eta,\alpha+k+j+1)\left(B_\eta^x-\lambda^2\right)^{k+j+1}f(x)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\,x^{2j+2}J_\lambda(\eta,\alpha+k+j+2)\left(B_\eta^x-\lambda^2\right)^{k+j+2}f(x)\right\}.$$

После группировки подобных членов, имеем

$$\frac{d^{2(k+1)}}{dx^{2(k+1)}}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=b_{k0}J_\lambda(\eta,\alpha+k+1)\left(B_\eta^x-\lambda^2\right)^{k+1}f(x)+$$

$$+\left[\frac{1}{2}b_{k0}+3b_{k1}\right]x^2J_\lambda(\eta,\alpha+k+2)\left(B_\eta^x-\lambda^2\right)^{k+2}f(x)+$$

$$+\left[\frac{1}{2}b_{k1}+5b_{k2}\right]x^4J_\lambda(\eta,\alpha+k+3)\left(B_\eta^x-\lambda^2\right)^{k+3}f(x)+\cdots+$$

$$+\left[\frac{1}{2}b_{k(k-1)}+(2k+1)b_{kk}\right]x^{2k}J_\lambda(\eta,\alpha+2k+1)\left(B_\eta^x-\lambda^2\right)^{2k+1}f(x)+$$

$$+\frac{1}{2}b_{kk}x^{2(k+1)}J_\lambda(\eta,\alpha+2k+2)\left(B_\eta^x-\lambda^2\right)^{2(k+1)}f(x). \qquad (26)$$

Из рекуррентных формул (23) следует, что $b_{k0}=a_{(k+1)0}$, $b_{kj}=0$, $j>k$, $\frac{1}{2}b_{k(j-1)}+(2j+1)b_{kj}=a_{(k+1)j}$, $1\leqslant j\leqslant k$. Тогда из (26), получим

$$\frac{d^{2(k+1)}}{dx^{2(k+1)}}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=\sum_{j=0}^{k+1}a_{(k+1)j}x^{2j}J_\lambda(\eta,\alpha+k+j+1)\left(B_\eta^x-\lambda^2\right)^{k+j+1}f(x).$$

Аналогично доказывается и равенство (22). □

1.4. О граничных значениях производных высокого порядка оператора $J_\lambda(\eta,\alpha)$

Теорема 7. *Пусть* $\alpha>0$, $\eta\geqslant-1/2$, $f(x)\in C^{2m-1}[0,b]\cap C^{2m}(0,b)$, $b>0$, $\lim\limits_{x\to0}[B_\eta^x]^kf(x)=c_k$, $c_k=const$ *и* $\lim\limits_{x\to0}x^{2\eta+1}(d/dx)[B_\eta^x]^kf(x)=0$, $k=\overline{0,m-1}$. *Тогда*

$$[B_{\eta+\alpha}^x]^mJ_\lambda(\eta,\alpha)f(x)\big|_{x=0}=\frac{(\alpha+\eta+1)_m}{(1/2)_m}\,\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)\bigg|_{x=0}, \qquad (27)$$

$$\frac{d}{dx}\,[B_{\eta+\alpha}^x]^mJ_\lambda(\eta,\alpha)f(x)\big|_{x=0}=0,\ \frac{d^{2m+1}}{dx^{2m+1}}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)\bigg|_{x=0}=0 \qquad (28)$$

в частности, если $\lambda=0$, *тогда*

$$[B_{\eta+\alpha}^x]^mI_{\eta,\alpha}f(x)\big|_{x=0}=\frac{(\alpha+\eta+1)_m}{(1/2)_m}\,\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}I_{\eta,\alpha}f(x)\bigg|_{x=0} \qquad (29)$$

$$\frac{d}{dx}\,[B_{\eta+\alpha}^x]^mI_{\eta,\alpha}f(x)\big|_{x=0}=0,\ \frac{d^{2m+1}}{dx^{2m+1}}I_{\eta,\alpha}f(x)\bigg|_{x=0}=0 \qquad (30)$$

Доказательство. Сначала покажем, что

$$J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)|_{x=0}=\frac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(\alpha+\eta+1)}f(0). \qquad (31)$$

Равенство (24) перепишем в виде

$$J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=\int_0^1F(x,s)\varphi(s)ds,$$

где $F(x,s)=f(xs)\bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda x\sqrt{1-s^2}\right)$, $\varphi(s)=[2/\Gamma(\alpha)](1-s^2)^{\alpha-1}s^{2\eta+1}$.

В силу $\bar{J}_\nu(0)=1$ и условий, наложенных на заданную функцию $f(x)$, из последнего равенства следует, что функция $F(x,s)$ интегрируема по s на отрезке $[0,1]$ и

$\lim\limits_{x\to 0} F(x,s) = f(0) = c_0$ равномерно относительно $s \in [0,1]$, а функция $\varphi(s)$ абсолютно интегрируема в несобственном смысле на отрезке $[0,1]$, так как

$$\int\limits_0^1 \varphi(s)ds = \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^1 (1-s^2)^{\alpha-1} s^{2\eta+1} ds = \frac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(\alpha+\eta+1)}.$$

Тогда по теореме о предельном переходе под знаком несобственного интеграла, зависящего от параметра [19], следует справедливость равенства (31).

Пусть $g(x) = [B_\eta^x - \lambda^2]^m f(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} C_m^k \lambda^{2(m-k)} [B_\eta^x]^k f(x)$. Учитывая условия $\lim\limits_{x\to 0} [B_\eta^x]^k f(x) = c_k,\ c_k = const$, получим

$$g(0) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} C_m^k \lambda^{2(m-k)} c_k. \tag{32}$$

Для функции $f(x) \in C^{2m-1}[0,b] \cap C^{2m}(0,b)$, $b > 0$, условия теоремы 2 выполняются. Поэтому, применяя формулу (31) к равенству (9) и учитывая (32), имеем

$$[B_{\eta+\alpha}^x]^m J_\lambda(\eta,\alpha) f(x)\big|_{x=0} = \frac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(\alpha+\eta+1)} \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} C_m^k \lambda^{2(m-k)} c_k. \tag{33}$$

Кроме того для функции $f(x) \in C^{2m-1}[0,b] \cap C^{2m}(0,b)$, $b > 0$, выполняются условия теоремы 6, т.е. $\lim\limits_{x\to 0} x^{2\eta+1} \frac{d}{dx} [B_\eta^x]^k f(x) = 0$, $k = \overline{0, m-1}$. Тогда из равенства (21), получим

$$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} J_\lambda(\eta,\alpha) f(x)\bigg|_{x=0} = a_{m0}\, J_\lambda(\eta,\alpha+m) \left(B_\eta^x - \lambda^2\right)^m f(x)\Big|_{x=0}.$$

Применяя к правой части последнего равенства формулу (31), с учетом (32) находим

$$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} J_\lambda(\eta,\alpha) f(x)\bigg|_{x=0} = a_{m0} \frac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(\alpha+m+\eta+1)} \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} C_m^k \lambda^{2(m-k)} c_k. \tag{34}$$

Учитывая $a_{m0} = 2^{-m}(2m-1)!! = (1/2)_m$, $\Gamma(\alpha+m+\eta+1) = \Gamma(\alpha+\eta+1)(\alpha+\eta+1)_m$ из равенств (33) и (34), получим справедливость формулы (27).

Теперь докажем справедливость равенства (28). Дифференцируя по x равенство

$$[B_{\eta+\alpha}^x]^m J_\lambda(\eta,\alpha) f(x) = J_\lambda(\eta,\alpha) [B_\eta^x - \lambda^2]^m f(x),$$

получим

$$\frac{d}{dx} [B_{\eta+\alpha}^x]^m J_\lambda(\eta,\alpha) f(x) = \frac{d}{dx} J_\lambda(\eta,\alpha) [B_\eta^x - \lambda^2]^m f(x).$$

Далее, учитывая формулу

$$\frac{d}{dx} J_\lambda(\eta,\alpha) g(x) = \frac{x}{2} J_\lambda(\eta,\alpha+1) \left[B_\eta^x - \lambda^2\right] g(x),$$

где $g(x) = [B_\eta^x - \lambda^2]^m f(x)$, имеем

$$\frac{d}{dx} [B_{\eta+\alpha}^x]^m J_\lambda(\eta,\alpha) f(x) = \frac{x}{2} J_\lambda(\eta,\alpha+1) \left[B_\eta^x - \lambda^2\right]^{m+1} f(x).$$

Отсюда, рассуждая, как и выше, при $x = 0$ получим справедливость первого равенства (28). Верность второго равенства в (28), следует из (22) при $x = 0$.

В силу $\bar{J}_\nu(0) = 1$ и $J_0(\eta, \alpha) = I_{\eta,\alpha}$, из равенств (27) и (28) соотственно, при $\lambda = 0$ следует справедливость формул (29) и (30). □

Доказанные теоремы позволяют сводить сингулярные (или вырождающиеся) уравнения высокого как четного, так и нечетного порядка к не сингулярным уравнениям и тем самым поставить и исследовать корректные начальные и граничные задачи для таких уравнений.

2. Приложения обобщенного оператора Эрдейи-Кобера к решению аналога сингулярной задачи Коши

2.1. Постановка задачи

На важность исследования уравнений высокого порядка вида

$$L^m u = 0,\ m = 1, 2, \dots \tag{35}$$

указал А.В.Бицадзе [21], где L - линейный дифференциальный оператор второго порядка, а $L^m = L^{m-1}L$ - m -ая композиция этого оператора.

В этом направлении можно указать работу В.И.Жегалова [22], в которой уравнение (35) исследовано, когда $m \geqslant 1$, а $L \equiv \partial^2/\partial x^2 + \mathrm{sign}x(\partial^2/\partial y^2)$ - оператор Лаврентьева-Бицадзе. Различные задачи для уравнения (35), когда $L-$ оператор Лаврентьева-Бицадзе, а $m = 2$ исследованы в работах М.М.Смирнова [23] и М.М.Мередова [24]. Наиболее полную информацию об этих исследованиях можно найти в обзорном пленарном докладе В.И.Жегалова [25]. В работе К.Б.Сабитова [26] для неоднородного уравнения (1) с оператором Лаврентьева-Бицадзе, исследована положительность решения.

Аналог задачи Коши для уравнения (35), когда $L-$ оператор гиперболического типа вида $L \equiv \partial^2/\partial t^2 - \Delta_x$, где Δ_x -многомерный оператор Лапласа, исследованы С.А.Гальпериным и В.Е.Кондрашовым [27], а в случае $L \equiv B_\eta^t - \Delta_x$, где $B_\eta^t = \partial^2/\partial t^2 + [(2\eta+1)/t](\partial/\partial t)$ - оператор Бесселя действующий по временной переменной, при $\eta = (k-1)/2,\ k \in R$, исследованы в работах С.А.Алдашева [28] и Л.А.Иванова [29]. В работе А.В.Глушак [30] исследованы итерированные задачи Коши и Дирихле с оператором Бесселя в банаховом пространстве и установлены формулы решения задачи Коши в терминах операторной функции Бесселя.

В настоящей работе, в отличие от цитированных источников, применим доказанные свойства обобщенного оператора Эрдейи-Кобера к решению аналога сингулярной задачи Коши для итерированного уравнения Клейна-Гордона-Фока – гиперболического уравнения теории элементарных частиц квантовой механики [31].

В области $\Omega = \{(x,y) : -\infty < x < +\infty, 0 < y < +\infty\}$ требуется найти классическое решение итерированного уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2\beta}{y}\frac{\partial}{\partial y} + \lambda^2\right)^m u(x,y) = 0,\ (x,y) \in \Omega, \tag{36}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\left.\frac{\partial^{2k} u}{\partial y^{2k}}\right|_{y=0} = \varphi_k(x), \quad \left.\frac{\partial^{2k+1} u}{\partial y^{2k+1}}\right|_{y=0} = 0,\ x \in R,\ k = \overline{0, m-1} \tag{37}$$

или
$$\left.\frac{\partial^{2k}u}{\partial y^{2k}}\right|_{y=0}=0,\quad \left.y^{2\beta}\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial y^{2k+1}}\right|_{y=0}=\psi_k(x),\ x\in R,\ k=\overline{0,m-1} \tag{38}$$

где $\beta,\lambda\in R$, причем $0<\beta<1/2$, и $\varphi_k(x)$, $\psi_k(x)$, $(k=\overline{0,m-1})$ - заданные дифференцируемые функции.

2.2. Решение задачи

Предположим, что решение $u_1(x,y)$ задачи $\{(36),\ (37)\}$ существует. Это решение будем искать в виде
$$u_1(x,y)=J_\lambda^{(y)}(-1/2,\beta)U(x,y), \tag{39}$$
где $U(x,y)$ -неизвестная дифференцируемая функция.

Подставим (39) в начальные условия (37) и применим теоремы 6 и 7. Затем, подставляя (39) в уравнение (36) и используя теорему 3 при $L_x=-\partial^2/\partial x^2$, получим задачу нахождения решения $U(x,y)$ поливолнового уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^m U(x,y)=0,\ x\in R,\ y>0, \tag{40}$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$\left.\frac{\partial^{2k}U}{\partial y^{2k}}\right|_{y=0}=\Phi_k(x),\quad \frac{\partial^{2k+1}U}{\partial y^{2k+1}}\,|_{y=0}=0,\ x\in R,\ k=\overline{0,m-1}, \tag{41}$$

где $\Phi_k(x)=\sum\limits_{j=0}^{k}\gamma_j C_k^j\lambda^{2(k-j)}\varphi_j(x),\ \gamma_j=\Gamma\left(j+\beta+(1/2)\right)/\Gamma\left(j+(1/2)\right).$

Решение задачи $\{(40),\ (41)\}$ имеет вид [32]:

$$U(x,y)=\frac{1}{2}\left[p_0(x+y)+p_0(x-y)\right]+$$

$$+\sum_{n=1}^{m-1}\frac{y}{2^{2n}(n-1)!n!}\int\limits_{x-y}^{x+y}\left[y^2-(x-s)^2\right]^{n-1}p_n(s)ds, \tag{42}$$

где
$$p_n(s)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\Phi_{n-k}^{(2k)}(s),\ \ \Phi_{n-k}^{(2k)}(s)=\frac{d^{2k}}{ds^{2k}}\Phi_{n-k}(s),\ \ n=\overline{0,m-1}. \tag{43}$$

Подставляя (42) в (39), получим

$$u_1(x,y)=\frac{1}{2}J_\lambda^{(y)}(-1/2,\beta)[p_0(x+y)+p_0(x-y)]+$$

$$+\sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{2^{2n}(n-1)!n!}J_\lambda^{(y)}(-1/2,\beta)\left\{y\int\limits_{x-y}^{x+y}\left[y^2-(x-s)^2\right]^{n-1}p_n(s)ds\right\}=$$

$$=P_0(x,y)+\sum_{n=1}^{m-1}\frac{P_n(x,y)}{2^{2n}(n-1)!n!}, \tag{44}$$

где

$$P_0(x,y) = \frac{1}{2} J_\lambda^{(y)}(-1/2, \beta)[p_0(x+y) + p_0(x-y)] =$$

$$= \frac{y^{1-2\beta}}{\Gamma(\beta)} \int_0^y (y^2-\eta^2)^{\beta-1} \bar{J}_{\beta-1}\left(\lambda\sqrt{y^2-\eta^2}\right)[p_0(x+\eta)+p_0(x-\eta)]\,d\eta \tag{45}$$

$$P_n(x,y) = J_\lambda^{(y)}(-1/2, \beta)\left\{ y \int_{x-y}^{x+y} \left[y^2-(x-s)^2\right]^{n-1} p_n(s)ds \right\} =$$

$$= \frac{2y^{1-2\beta}}{\Gamma(\beta)} \int_0^y (y^2-\eta^2)^{\beta-1} \bar{J}_{\beta-1}\left(\lambda\sqrt{y^2-\eta^2}\right) \times$$

$$\times \left\{ \eta \int_{x-\eta}^{x+\eta} \left[\eta^2-(x-s)^2\right]^{n-1} p_n(s)ds \right\} d\eta. \tag{46}$$

Упростим выражения (45) и (46). В равенстве (45), разделив интеграл на два интеграла и сделав в каждом из них замену переменной интегрирования соответственно по формулам $s = x+\eta$ и $s = x-\eta$, после несложных преобразований, получим

$$P_0(x,y) = \frac{y^{1-2\beta}}{\Gamma(\beta)} \int_{x-y}^{x+y} \left[y^2-(s-x)^2\right]^{\beta-1} \bar{J}_{\beta-1}\left(\lambda\sqrt{y^2-(s-x)^2}\right) p_0(s)ds. \tag{47}$$

В равенстве (46), меняя порядок интегрирования, имеем

$$P_n(x,y) = \frac{2y^{1-2\beta}}{\Gamma(\beta)} \int_{x-y}^{x+y} p_n(s) K_n(x,y,s)ds, \tag{48}$$

где

$$K_n(x,y,s) = \int_{|s-x|}^{y} (y^2-\eta^2)^{\beta-1} \bar{J}_{\beta-1}\left(\lambda\sqrt{y^2-\eta^2}\right)\left[\eta^2-(x-s)^2\right]^{n-1} \eta\, d\eta.$$

В последнем интеграле, произведя замену переменных $\eta^2 = (s-x)^2 + [y^2-(s-x)^2]t$, получим

$$K_n(x,y,s) = (1/2)\sigma^{\beta+n-1} \int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{\beta-1} \bar{J}_{\beta-1}\left(\lambda\sqrt{\sigma(1-t)}\right) dt,$$

где $\sigma = y^2-(s-x)^2$.

Пользуясь разложением функции Бесселя-Клиффорда в ряд (6) и учитывая равномерную сходимость данного ряда при любых значениях аргумента, меняем порядок интегрирования и суммирования. Затем, вычислив внутренний интеграл, получим

$$K_n(x,y,s) = \frac{\Gamma(n)\Gamma(\beta)}{2\Gamma(\beta+n)} \sigma^{\beta+n-1} \bar{J}_{\beta+n-1}\left(\lambda\sqrt{\sigma}\right).$$

В силу этого равенства выражение функции $P_n(x,y)$ из (48) представим в виде

$$P_n(x,y)=\frac{\Gamma(n)y^{1-2\beta}}{\Gamma(\beta+n)}\int\limits_{x-y}^{x+y}\frac{\bar{J}_{\beta+n-1}\left(\lambda\sqrt{y^2-(x-s)^2}\right)}{\left[y^2-(x-s)^2\right]^{1-\beta-n}}p_n(s)ds. \tag{49}$$

Подставляя (47) и (49) в (44) и принимая во внимание $\Gamma(n)=(n-1)!$, окончательно находим явную формулу решение задачи {(36), (37)}:

$$u_1(x,y)=\sum_{n=0}^{m-1}\frac{y^{1-2\beta}}{2^{2n}n!\Gamma(\beta+n)}\int\limits_{x-y}^{x+y}\frac{\bar{J}_{\beta+n-1}\left(\lambda\sqrt{y^2-(x-s)^2}\right)}{\left[y^2-(x-s)^2\right]^{1-\beta-n}}p_n(s)ds. \tag{50}$$

Это решение при $m=1$ совпадает с результатом работы [33], которая получена другим методом.

Из доказанного выше следует, что если $\varphi_j(x)\in C^{2(m-j)}(R)$, $j=\overline{0,m-1}$, то функция $u_1(x,y)$, определяемая равенством (50), является классическим решением уравнения (36), удовлетворяющего начальным условиям (37).

Заметим, что на основании теоремы 7, в задаче {(36), (37)} вместо начального условия (37) можно взять начальные условия вида

$$[B^y_{\beta-1/2}]^k u\Big|_{y=0}=\varphi_k^*(x),\ \ \frac{\partial}{\partial y}[B^y_{\beta-1/2}]^k u\Big|_{y=0}=0,\ x\in R,\ k=\overline{0,m-1}, \tag{51}$$

где $\varphi_k^*(x)=[(\beta+1/2)_k/(1/2)_k]\varphi_k(x)$

Кроме того, в силу теоремы 2 и 7, а также равенства (39), следует, что задачи {(36), (37)} и {(36), (51)} сводятся к одной и той же вспомогательной задаче {(40), (41)}. Отсюда следует справедливость следующего утверждения.

Лемма 3. *Решение задачи {(36), (37)} является решением задачи {(36), (51)}, и наоборот.*

В работах [28] и [29] данная лемма (при $\lambda=0$) доказана другими методами.

Аналогичное утверждение имеет место и для задачи {(36), (38)}. В работах [28] и [29] при $\lambda=0$ доказано, что вместо начальных условий (38) можно взять начальные условия вида

$$[B^y_{\beta-1/2}]^k u\Big|_{y=0}=0,\ \ y^{2\beta}\frac{\partial}{\partial y}[B^y_{\beta-1/2}]^k u\Big|_{y=0}=\psi_k^*(x),\ x\in R,\ k=\overline{0,m-1}, \tag{52}$$

где $\psi_k(x)=\prod\limits_{j=1}^{k}(1-(\beta/j))\psi_k^*(x)$.

При этом справедливо следующее утверждение.

Лемма 4. *При любом $\beta<1/2$ решение задачи {(36), (38)} является решением задачи {(36), (52)} и наоборот.*

Теперь рассмотрим задачу нахождения решения $u_2(x,y)$ уравнения (36), удовлетворяющего начальным условиям (52).

Лемма 5. *Если $u_1(x,y;1-\beta)$ является решением уравнения (36), удовлетворяющего условиям (51), в котором β заменяется на $1-\beta$, то функция $u_2(x,y;\beta)=y^{1-2\beta}u_1(x,y;1-\beta)$ при $0<\beta<1/2$ будет решением уравнения (36), удовлетворяющего условиям*

$$[B^y_{\beta-1/2}]^k u_2\Big|_{y=0}=0,\ \ y^{2\beta}\frac{\partial}{\partial y}[B^y_{\beta-1/2}]^k u_2\Big|_{y=0}=(1-2\beta)\varphi_k^*(x),\ x\in R,\ k=\overline{0,m-1}.$$

Как и в работах [28] и [29], эта лемма доказывается методом математической индукции по m.

Таким образом, применяя лемму 5 и заменяя $(1-2\beta)\varphi_k^*(x)$ на $\psi_k^*(x)$, из равенства (50) находим

$$u_2(x,y)=\sum_{n=0}^{m-1}\frac{\Gamma^{-1}(1-\beta+n)}{2^{2n}n!}\int_{x-y}^{x+y}q_n^*(s)[y^2-(s-x)^2]^{n-\beta}\bar{J}_{n-\beta}\left(\lambda\sqrt{y^2-(s-x)^2}\right)ds, \quad (53)$$

где $q_n^*(s)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\Psi_{n-k}^{(2k)}(s)$, $\Psi_n(s)=\sum_{j=0}^{n}\tilde{\gamma}_jC_n^j\lambda^{2(n-j)}\psi_j^*(x)$, $n=\overline{0,m-1}$, $\tilde{\gamma}_j=\Gamma(j-\beta+(3/2))/\Gamma(j+(1/2))$.

Как и отмечено выше, аналогично можно установить, что если $\psi_j(x)\in C^{2(m-j)}(R)$, $j=\overline{0,m-1}$, то функция $u_2(x,y)$, определяемая равенством (53), является классическим решением уравнения (36), удовлетворяющего начальным условиям (38).

Список литературы

[1] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И., *Интегралы и производные дробного порядка и их приложения*, Наука и техника, Минск, 1987. [Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. Integraly i proizvodnye drobnogo porjadka i ih prilozhenija. Minsk: Nauka i tehnika,1987.].

[2] Sneddon I. N., *Mixed Boundary Value Problems in Potential Theory*, North-Holland Publ., Amsterdam, 1966.

[3] Kiryakova V., *Generalized Fractional Calculus and Applications.*, Long-man Sci. & Technical and J. Wiley & Sons, Harlow, N. York, 1994.

[4] Erdélyi A., “On fractional integration and its application to the theory of Hankel transforms”, *Quart. J. Math. Oxford ser.*, **11**:44 (1940), 293–303.

[5] Erdélyi A., Kober H., “Some remarks on Hankel transforms”, *Quart. J. Math. Oxford ser.*, **11**:43 (1940), 212–221.

[6] Erdélyi A., “An application of fractional integrals”, *J. Analyse Math.*, **14**:44 (1965), 113–126.

[7] Erdélyi A., “Axially symmetric potentials and fractional integration”, *J. Soc. Industr. and Appl. Math.*, **13**:1 (1965), 216–228.

[8] Erdélyi A., “On the Euler-Poisson-Darboux equation”, *J. Analyse Math.*, **23** (1970), 89–102.

[9] Sneddon I. N., “The use in mathematical analysis of Erdélyi-Kober’ operators and of some of their applications.”, *In: Fractional Calculus and Its Applications, Proc., Publ. as: Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, New York, 1975, 37–79.

[10] Lowndes J. S., “A generalization of the Erdélyi-Kober operators”, *Proc. Edinb. Math. Soc.*, **17**:2 (1970), 139–148.

[11] Lowndes J. S., “An application of some fractional integrals”, *Proc. Edinb. Math. Soc.*, **20**:1 (1979), 35–41.

[12] Lowndes J. S., “Cauchy problems for second order hyperbolic differential equations with constant coefficients”, *Proc. Edinb. Math. Soc.*, **26**:3 (1983), 307–311.

[13] Heywood P., “Improved boundedness conditions for Lowndes’ operators”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh, A*, **73**:9 (1975), 291–299.

[14] Heywood P. , Rooney P. G., “On the boundedness of Lowndes’ operators”, *J. London Math. Soc.*, **10**:2 (1975), 241–248.

[15] Weinstein A., “The generalized radiation problem and the Euler-Poisson-Darboux equation”, *Summa Brasil Math.*, **3** (1955), 125–147.

[16] Weinstein A., “On a singular differential operator”, *Ann.mat. pura ed appl.*, **49**:4 (1960), 359–365.

[17] Полянин А. Д., *Справочник по линейным уравнениям математической физики*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2001. [Poljanin A. D. Spravochnik po linejnym uravnenijam matematicheskoj fiziki. Moskva. FIZMATLIT, 2001].

[18] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И., *Интегралы и ряды. Элементарные функции*, 2-е изд., исправ. Т. 1, ФИЗМАТЛИТ, М., 2002. [Prudnikov A. P., Brychkov Ju. A., Marichev O. I. Integraly i rjady. Jelementarnye funkcii. vol. 1. 2-e izd., isprav. Moskva. FIZMATLIT, 2002].

[19] Ильин В. А., Позняк Э. Г, *Основы математического анализа*, В 2-х ч.: Учеб.: Для вузов. - 7-е изд.. Т. 1, ФИЗМАТЛИТ, М., 2005. [Il'in V. A., Poznjak Je. G Osnovy matematicheskogo analiza Ch.1. V 2-h ch.: Ucheb.: Dlja vuzov. 7-e izd. Moskva. FIZMATLIT, 2005].

[20] Бейтмен Г., Эрдейи А., *Высшие трансцендентные функции*, **2**, Наука, М., 1973. [Bejtmen G., Jerdeji A. Vysshie transcendentnye funkcii. 2. Moskva. Nauka. 1973].

[21] Бицадзе А. В., *Избранные труды*, Издательство Учреждения РАН Кабардино-Балкарского научного центра РАН, Нальчик, 2012. [Bicadze A. V. Izbrannye trudy. Nal'chik: Izdatel'stvo Uchrezhdenija RAN Kabardino-Balkarskogo nauchnogo centra RAN. 2012].

[22] Жегалов В. И., "Краевая задача для уравнения смешанного типа высшего порядка", *ДАН СССР*, **136**:2 (1962), 274–276. [Zhegalov V. I. Kraevaja zadacha dlja uravnenija smeshannogo tipa vysshego porjadka. DAN SSSR. 1962. vol. 136. no. 2. 274-276].

[23] Смирнов М. М., *Модельное уравнение смешанного типа четвертого порядка*, Изд-во ЛГУ, Ленинград, 1972. [Smirnov M. M. Model'noe uravnenie smeshannogo tipa chetvertogo porjadka. Leningrad. Izd-vo LGU, 1972].

[24] Мередов М. М., "О единственности решения краевых задач для уравнения смешанного тип четвертого порядка", *Известия АН Туркм. ССР. Серия физ.-техн., хим. и геол. наук*, 1967, № 4, 11–16. [Meredov M. M. O edinstvennosti reshenija kraevyh zadach dlja uravnenija smeshannogo tip chetvertogo porjadka. Izvestija AN Turkm. SSR. Serija fiz.-tehn., him. i geol. nauk. 1967. no 4. 11–16].

[25] Жегалов В. И., "Об одном направлении в теории уравнений с частными производными", *Материалы Международн. научн. конф. "Краевые задачи для дифференциальных уравнений и аналитических функций,"Казань, 29 сентября - 1 октября, 2014 (Изд-во Казанск. матем. о-ва)*, 2014, 13–15. [Zhegalov V. I. Ob odnom napravlenii v teorii uravnenij s chastnymi proizvodnymi. Materialy Mezhdunarodn. nauchn. konf. "Kraevye zadachi dlja differencial'nyh uravnenij i analiticheskih funkcij,"Kazan', 29 sentjabrja - 1 oktjabrja, 2014 (Izd-vo Kazansk. matem. o-va). 2014. 13–15].

[26] Сабитов К. Б., "О положительности решения неоднородного уравнения смешанного типа высшего порядка", Международн. научн. конф. Краевые задачи для дифференциальных уравнений и аналитических функций (Материалы, Казань, 29 сентября - 1 октября, 2014), 2014, 64–67. [Sabitov K. B. O polozhitel'nosti reshenija neodnorodnogo uravnenija smeshannogo tipa vysshego porjadka. Materialy Mezhdunarodn. nauchn. konf. Kraevye zadachi dlja differencial'nyh uravnenij i analiticheskih funkcij. Kazan', 29 sentjabrja - 1 oktjabrja, 2014. 64–67].

[27] Гальперин С. А., Кондрашов В. Е., "Задача Коши для дифференциальных операторов, распадающихся на волновые множители", *Труды Московского мат. общества*, **16** (1967), 109–136. [Gal'perin S. A., Kondrashov V. E. Zadacha Koshi dlja differencial'nyh operatorov, raspadajushhihsja na volnovye mnozhiteli. Trudy Moskovskogo mat. obshhestva. 1967. no 16. 109–136].

[28] Алдашев С. А., "О задаче Коши для операторов распадающихся на множители с особенностями", *Дифференциальные уравнения*, **17**:2 (1981), 247–255. [Aldashev S. A. O zadache Koshi dlja operatorov raspadajushhihsja na mnozhiteli s osobennostjami. Differencial'nye uravnenija. 1981. vol. 17. no. 2. 247–255].

[29] Иванов Л. А., "Задача Коши для некоторых операторов с особенностями", *Дифференциальные уравнения*, **18**:6 (1982), 1020–1028. [Ivanov L. A. Zadacha Koshi dlja nekotoryh operatorov s osobennostjami. Differencial'nye uravnenija. 1982. vol. 18. no 6. 1020–1028].

[30] Глушак А. В., "Итерированные задачи Коши и Дирихле с оператором Бесселя в банаховом пространстве", *Изв. вузов. Матем.*, 1999, № 8, 3–10. [Glushak A. V. Iterirovannye zadachi Koshi i Dirihle s operatorom Besselja v banahovom prostranstve. Izv. vuzov. Matem. 1999. no 8. 3–10].

[31] Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Оксак А. И., Тодоров И. Т., *Общие принципы квантовой теории поля*, Наука, М., 1987. [Bogoljubov N. N., Logunov A. A., Oksak A. I., Todorov I. T. Obshhie principy kvantovoj teorii polja. M.: Nauka, 1987].

[32] Каримов Ш. Т., "Об одном методе решения задачи Коши для одномерного поливолнового уравнения с сингулярным оператором Бесселя", *Изв. вузов. Матем.*, 2017, № 8, 27–41. [Karimov Sh. T. Ob odnom metode reshenija zadachi Koshi dlja odnomernogo polivolnovogo uravnenija s singuljarnym operatorom Besselja. Izv. vuzov. Matem. 2017. no 8. 27–41.].

[33] Капилевич М. Б., "Об одном уравнении смешанного эллиптико-гиперболического типа", *Математический сборник*, **30(72)**:1 (1952), 11–38. [Kapilevich M. B. Ob odnom uravnenii smeshannogo jelliptiko-giperbolicheskogo tipa. Matematicheskij sbornik. 1952. vol. 30(72). no 1. 11–38].

Список литературы (ГОСТ)

[1] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. Минск: Наука и техника,1987.

[2] Sneddon I. N. Mixed Boundary Value Problems in Potential Theory. Amsterdam: North-Holland Publ., 1966

[3] Kiryakova V. Generalized Fractional Calculus and Applications. N. York: Long-man Sci. & Technical and J. Wiley & Sons, Harlow, 1994

[4] Erdélyi A. On fractional integration and its application to the theory of Hankel transforms // Quart. J. Math. Oxford ser. 1940. vol. 11. no 44. pp. 293–303

[5] Erdélyi A., Kober H. Some remarks on Hankel transforms // Quart. J. Math. Oxford ser.1940. vol. 11. no 43. pp. 212–221. 1940

[6] Erdélyi A. An application of fractional integrals // J. Analyse Math. 1965. vol 14. no 44. pp. 113–126

[7] Erdélyi A. Axially symmetric potentials and fractional integration // J. Soc. Industr. and Appl. Math. 1965. vol 13. no 1. pp. 216–228

[8] Erdélyi A. On the Euler-Poisson-Darboux equation // J. Analyse Math. 1970. vol. 23. pp. 89–102

[9] Sneddon I. N. The use in mathematical analysis of Erdélyi-Kober' operators and of some of their applications. In: Fractional Calculus and Its Applications, Proc., Publ. as: Lecture Notes in Mathematics. New York: Springer-Verlag. 1975. pp. 37–79

[10] Lowndes J. S. A generalization of the Erdélyi-Kober operators // Proc. Edinb. Math. Soc. 1970. vol. 17. no 2. pp. 139–148

[11] Lowndes J. S. An application of some fractional integrals // Proc. Edinb. Math. Soc. 1979. vol. 20. no. 1. pp. 35–41

[12] Lowndes J. S. Cauchy problems for second order hyperbolic differential equations with constant coefficients // Proc. Edinb. Math. Soc. 1983. vol. 26. no. 3. pp. 307–311

[13] Heywood P. Improved boundedness conditions for Lowndes' operators // Proc. Roy. Soc. Edinburgh, A. 1975. vol. 73. no. 9. pp. 291–299

[14] Heywood P. , Rooney P. G. On the boundedness of Lowndes' operators // J. London Math. Soc. 1975. vol. 10. no. 2. pp. 241–248

[15] Weinstein A. The generalized radiation problem and the Euler-Poisson-Darboux equation // Summa Brasil Math. 1955. vol. 3. pp. 125–147

[16] Weinstein A. On a singular differential operator // Ann. mat. pura ed appl. 1960. vol. 49. no 4. pp. 359–365

[17] Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001

[18] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. Т. 1. 2-е изд., исправ. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002

[19] Ильин В. А., Позняк Э. Г Основы математического анализа Ч.1. В 2-х ч.: Учеб.: Для вузов. - 7-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005

[20] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука. 1973

[21] Бицадзе А. В. Избранные труды. Нальчик: Издательство Учреждения РАН Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2012

[22] Жегалов В. И. Краевая задача для уравнения смешанного типа высшего порядка // ДАН СССР. 1962. vol. 136. no. 2. pp. 274–2761962.

[23] Смирнов М. М. Модельное уравнение смешанного типа четвертого порядка. Л.: Изд-во ЛГУ, 1972

[24] Мередов М. М. О единственности решения краевых задач для уравнения смешанного тип четвертого порядка // Известия АН Туркм. ССР. Серия физ.-техн., хим. и геол. наук. 1967. №4. С. 11–16

[25] Жегалов В. И. Об одном направлении в теории уравнений с частными производными. Материалы Международн. научн. конф. "Краевые задачи для дифференциальных уравнений и аналитических функций,"Казань, 29 сентября - 1 октября, 2014 (Изд-во Казанск. матем. о-ва). 2014. С.13–15

[26] Сабитов К. Б. О положительности решения неоднородного уравнения смешанного типа высшего порядка. Материалы Международн. научн. конф. Краевые задачи для дифференциальных уравнений и аналитических функций. Казань, 29 сентября - 1 октября, 2014. С. 64–67

[27] Гальперин С. А., Кондрашов В. Е. Задача Коши для дифференциальных операторов, распадающихся на волновые множители // Труды Московского мат. общества. 1967. №. 16. С. 109–136

[28] Алдашев С. А. О задаче Коши для операторов распадающихся на множители с особенностями // Дифференциальные уравнения. 1981. Т. 17. №. 2. С. 247–255

[29] Иванов Л. А. Задача Коши для некоторых операторов с особенностями // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18. №6. С. 1020–1028

[30] Глушак А. В. Итерированные задачи Коши и Дирихле с оператором Бесселя в банаховом пространстве // Изв. вузов. Матем. 1999. № 8. С. 3–10

[31] Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Оксак А. И., Тодоров И. Т. Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, 1987

[32] Каримов Ш. Т. Об одном методе решения задачи Коши для одномерного поливолнового уравнения с сингулярным оператором Бесселя // Изв. вузов. Матем. 2017. № 8. С. 27–41

[33] Капилевич М. Б. Об одном уравнении смешанного эллиптико-гиперболического типа // Математический сборник. 1952. Т. 30(72). №1. С. 11–38

Для цитирования: Каримов Ш. Т. О некоторых обобщениях свойств оператора Эрдейи-Кобера и их приложения // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2017. № 2(18). С. 20-40. DOI: 10.18454/2079-6641-2017-18-2-20-40

For citation: Karimov Sh. T. About some generalizations of the properties of the Erdélyi-Kober operator and their application, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2017, **18**: 2, 20-40. DOI: 10.18454/2079-6641-2017-18-2-20-40

Поступила в редакцию / Original article submitted: 10.02.2017