Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2017. № 2(18). C. 7-19. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2017-18-2-7-19

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.227

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

К. Т. Каримов

Ферганский государственный университет, 150100, Узбекистан, г. Фергана, ул. Мураббийлар, 19.
E-mail: karimovk80@mail.ru

Найдены собственные значения и собственные функции двух краевых задач для трехмерных уравнений эллиптического типа с сингулярными коэффициентами при младших членах.

Ключевые слова: эллиптический тип, сингулярный коэффициент, гипергеометрическая функция, собственное значение, собственная функция.

MATHEMATICS

MSC 58J50

SPECTRAL PROBLEMS FOR THREE-DIMENSIONAL ELLIPTIC EQUATIONS WITH SINGULAR COEFFICIENTS

K. T. Karimov

Fergana State University, 150100, Uzbekistan, Ferghana, st. Murabillilar, 19.
E-mail: karimovk80@mail.ru

The eigenvalues and eigenfunctions of two boundary value problems for three-dimensional equations of elliptic types with singular coefficients with lower terms are found.

Key words: elliptic type, singular coefficient, hypergeometric function, eigenvalues, eigenfunction.

Введение

Известно, что в последнее время интенсивно исследуются спектральные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных разного типа. Научно-исследовательские работы, проведенные по спектральной теории, условно можно разделить на два направления. Первое из них – это доказательство теорем о единственности решения краевых задач для уравнений со спектральным параметром, а второе – нахождение собственных значений и собственных функций рассматриваемых краевых задач. Научные исследования по второму направлению в настоящее время интенсивно продолжаются и развиваются. Нахождению собственных значений и собственных функций краевых задач для различных уравнений эллиптических и смешанных типов на плоскости посвящено много исследований, среди которых следует отметить работы [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7] и др. Задачи такого типа для трехмерных эллиптических и смешанных уравнений изучены, например, в работах [8], [9], [10], [11], [12] и др. Однако, нахождение собственных значений и собственных функций краевых задач в трехмерных областях для уравнений эллиптического и смешанного типов с сингулярными коэффициентами остаются малоизученными. Здесь отметим работы [13], [14], [15], [16] и др.

В данной работе исследованы задачи на собственные значения для эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами в трехмерном пространстве. Выделена область значений параметра λ, где нет собственных значений задачи. Найдено счетное число собственных значений задачи и построены собственные функции, соответствующие найденным собственным значениям.

1. Постановка задачи.

Пусть $\Omega-$ трехмерная область, ограниченная частью сферы

$$S_0=\left\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=1,\, y>0,\, z>0\right\}$$

и двумя полукругами

$$S_1=\left\{(x,y,z): x^2+z^2<1,\, y=0,\, z>0\right\},$$

$$S_2=\left\{(x,y,z): x^2+y^2<1,\, y>0,\, z=0\right\}.$$

В области Ω рассмотрим уравнение эллиптического типа в виде

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}+\frac{2\beta}{y}u_y+\frac{2\gamma}{z}u_z+\lambda u=0, \tag{1}$$

где $u=u(x,y,z)-$ неизвестная функция, $\lambda-$ числовой параметр , а $\beta,\gamma\in R$, причем $0<\beta,\gamma<1/2$, и исследуем следующую задачу на собственные значения:

Задача $D_\lambda^{\beta\gamma}$. Найти значения параметра λ и соответствующие им нетривиальные функции $u(x,y,z)\in C\left(\bar{\Omega}\right)\cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющие уравнению (1) в области Ω и краевому условию

$$u(x,y,z)=0,\quad (x,y,z)\in \bar{S}_0\cup\bar{S}_1\cup\bar{S}_2. \tag{2}$$

2. Исследование задачи $D_{\lambda}^{\beta\gamma}$ при $\lambda \le 0$.

Теорема. *Если $\lambda \le 0$, то задача $D_{\lambda}^{\beta\gamma}$ имеет только тривиальное решение.*

Доказательство. В области Ω справедливо тождество

$$y^{2\beta}z^{2\gamma}u\left(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}+\frac{2\beta}{y}u_y+\frac{2\gamma}{z}u_z+\lambda u\right)=$$

$$=\left(y^{2\beta}z^{2\gamma}uu_x\right)_x+\left(y^{2\beta}z^{2\gamma}uu_y\right)_y+\left(y^{2\beta}z^{2\gamma}uu_z\right)_z-y^{2\beta}z^{2\gamma}\left(u_x^2+u_y^2+u_z^2-\lambda u^2\right)=0.$$

Интегрируем это тождество по области $\Omega_{\delta_1,\delta_2}^{\varepsilon}\subset\Omega$, ограниченной при $z\ge\delta_1, y\ge\delta_2$ частью сферы

$$\tilde{S}_0=\left\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=(1-\varepsilon)^2,z\ge\delta_1,\ y\ge\delta_2\right\}$$

и при $z=\delta_1$, $y=\delta_2$ полукругами

$$\tilde{S}_1=\left\{(x,y,z):x^2+z^2<(1-\varepsilon)^2,y=\delta_2,z\ge\delta_1\right\},$$

$$\tilde{S}_2=\left\{(x,y,z):x^2+y^2<(1-\varepsilon)^2,y\ge\delta_2,z=\delta_1\right\},$$

где ε, δ_1 и δ_2– достаточно малые положительные числа. В результате имеем

$$\iiint\limits_{\Omega_{\delta_1,\delta_2}^{\varepsilon}}\left[\left(y^{2\beta}z^{2\gamma}uu_x\right)_x+\left(y^{2\beta}z^{2\gamma}uu_y\right)_y+\left(y^{2\beta}z^{2\gamma}uu_z\right)_z\right]dxdydz=$$

$$=\iiint\limits_{\Omega_{\delta_1,\delta_2}^{\varepsilon}}\left[y^{2\beta}z^{2\gamma}\left(u_x^2+u_y^2+u_z^2-\lambda u^2\right)\right]dxdydz. \tag{3}$$

Применяя формулу Остроградского [17, Т.3, с.335] к интегралу в левой стороне равенства (3), получим

$$\iint\limits_{\tilde{S}_0}y^{2\beta}z^{2\gamma}u\frac{\partial u}{\partial n}ds-\iint\limits_{\tilde{S}_1}\delta_2^{2\beta}z^{2\gamma}u(x,\delta_2,z)\,u_z(x,\delta_2,z)\,dxdz-$$

$$-\iint\limits_{\tilde{S}_2}y^{2\beta}\delta_1^{2\gamma}u(x,y,\delta_1)\,u_z(x,y,\delta_1)\,dxdy=\iiint\limits_{\Omega_{\delta_1,\delta_2}^{\varepsilon}}\left[y^{2\beta}z^{2\gamma}\left(u_x^2+u_y^2+u_z^2-\lambda u^2\right)\right]dxdydz,$$

где n – внешняя нормаль к $\tilde{S}_0$.

Отсюда, переходим к пределу при ε, $\delta_1,\delta_2\to0$. Тогда $\Omega_{\delta_1,\delta_2}^{\varepsilon}\to\Omega$ и учитывая краевое условие (2) а также $u, u_x, u_y, u_z\in C(\Omega)$, получаем

$$\iiint\limits_{\Omega}\left[y^{2\beta}z^{2\gamma}\left(u_x^2+u_y^2+u_z^2-\lambda u^2\right)\right]dxdydz=0.$$

В силу $\lambda\le0$, из этого равенства следует, что $u_x\equiv u_y\equiv u_z\equiv0$ в Ω. Следовательно, $u(x,y,z)\equiv0$, $(x,y,z)\in\Omega$. Так как $u(x,y,z)\in C\left(\bar{\Omega}\right)$ и $u(x,y,z)|_{\bar{S}_0\cup\bar{S}_1\cup\bar{S}_2}=0$, то $u(x,y,z)\equiv0$, $(x,y,z)\in\bar{\Omega}$.

Отсюда следует утверждение теоремы. □

3. Исследование задачи $D_{\lambda}^{\beta\gamma}$ при $\lambda > 0$.

В области Ω введем сферические координаты (r, θ, φ), связанные с декартовыми координатами (x, y, z) по формулам

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \;\; y = r\sin\theta\sin\varphi, \;\; z = r\cos\theta,$$

где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\theta-$ угол между вектором $\overrightarrow{OM}$ и осью z, а $\varphi-$ угол между вектором $\overrightarrow{OM'}$ и осью x, где $O = O(0,0,0)$, $M = M(x,y,z)$, $M' = M'(x,y,0)$.

В координатах (r, θ, φ) уравнение (1) принимает вид

$$u_{rr} + \frac{2(1+\beta+\gamma)}{r}u_r +$$

$$+\frac{1}{r^2}\left[u_{\theta\theta} + [(1+2\beta)\,ctg\theta - 2\gamma tg\theta]\,u_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi} + \frac{2\beta ctg\varphi}{\sin^2\theta}u_\varphi\right] + \lambda u = 0. \quad (4)$$

К уравнению (4) применим метод разделения переменных. Сначала представим неизвестную функцию в виде $u(r,\theta,\varphi) = R(r)\,Q(\theta,\varphi)$ и подставим в уравнение (4). Далее, вводя константу разделения переменных χ, получим два дифференциальных уравнения

$$r^2R''(r) + 2(1+\beta+\gamma)\,rR'(r) + \left(\lambda r^2 - \chi\right)R(r) = 0, \;\; 0 < r < 1;$$

$$Q_{\theta\theta} + [(1+2\beta)\,ctg\theta - 2\gamma tg\theta]\,Q_\theta +$$

$$+\frac{1}{\sin^2\theta}Q_{\varphi\varphi} + \frac{2\beta ctg\varphi}{\sin^2\theta}Q_\varphi + \chi Q = 0, \;\; 0 < \theta < (\pi/2), \;\; 0 < \varphi < \pi. \quad (5)$$

Теперь, полагая $Q(\theta,\varphi) = T(\theta)\,\Phi(\varphi)$, из уравнения (5) получим

$$\frac{\sin^2\theta}{T(\theta)}\left[T''(\theta) + [(1+2\beta)\,ctg\theta - 2\gamma tg\theta]\,T'(\theta)\right] + \chi\sin^2\theta = -\frac{\Phi''(\varphi) + 2\beta ctg\varphi\Phi'(\varphi)}{\Phi(\varphi)}. \quad (6)$$

Введя еще одну константу разделения переменных μ, из (6) получим два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\Phi''(\varphi) + 2\beta ctg\varphi\,\Phi'(\varphi) + \mu\,\Phi(\varphi) = 0, \;\; 0 < \varphi < \pi,$$

$$\sin^2\theta\left\{T''(\theta) + [(1+2\beta)\,ctg\theta - 2\gamma tg\theta]\,T'(\theta)\right\} + (\chi\sin^2\theta - \mu)T(\theta) = 0, \; 0 < \theta < \pi/2.$$

Граничные условия (2) приводят к граничным условиям для функции $R(r): R(1) = 0$ и $R(0) = 0$. Для фиксированных переменных r и φ, из условий (2) и $u(x,y,z) \in C\left(\bar{\Omega}\right)$, получим условие для функции $T(\theta)$: $|T(0)| < \infty$, $T(\pi/2) = 0$. Из условий (2) для функции $\Phi(\varphi)$ получим следующее условие $\Phi(0) = 0$, $\Phi(\pi) = 0$.

В результате исходная трехмерная задача распадается на три одномерные задачи на собственные значения:

$$r^2R''(r) + 2(1+\beta+\gamma)\,rR'(r) + \left(\lambda r^2 - \chi\right)R(r) = 0, \;\; 0 < r < 1, \quad (7)$$

$$R(0) = 0, \;\; R(1) = 0; \quad (8)$$

$$T''(\theta)+[(1+2\beta)\,ctg\theta-2\gamma tg\theta]\,T'(\theta)+\left(\chi-\frac{\mu}{\sin^2\theta}\right)T(\theta)=0,\ 0<\theta<\pi/2, \tag{9}$$

$$|T(0)|<\infty,\ \ T(\pi/2)=0; \tag{10}$$

$$\Phi''(\varphi)+2\beta ctg\varphi\Phi'(\varphi)+\mu\Phi(\varphi)=0,\ \ 0<\varphi<\pi, \tag{11}$$

$$\Phi(0)=0,\Phi(\pi)=0. \tag{12}$$

Сначала исследуем задачу {(11), (12)}. Произведя замену $z=\sin^2\varphi$ в уравнении (11), получим гипергеометрическое уравнение

$$z(1-z)\tilde{\Phi}''(z)+[(\beta+1/2)-(1+\beta)z]\tilde{\Phi}'(z)+(\mu/4)\tilde{\Phi}(z)=0,$$

где $\tilde{\Phi}(z)=\Phi(\arcsin\sqrt{z})$.

Пользуясь общим решением этого уравнения [18, с.85], находим общее решение уравнения (11) в виде

$$\Phi(\varphi)=c_1F\left[(\beta+s)/2,(\beta-s)/2;1/2+\beta;\sin^2\varphi\right]+$$

$$+c_2(\sin\varphi)^{1-2\beta}F\left[(1-\beta+s)/2,(1-\beta-s)/2;3/2-\beta;\sin^2\varphi\right], \tag{13}$$

где c_1 и c_2- произвольные постоянные, $F(...)-$ гипергеометрическая функция Гаусса [18, с.69], $s=\sqrt{\beta^2+\mu}-$ неизвестная пока постоянная, причем $\mathrm{Re}s>0$.

Удовлетворим функцию (13) условиям (12). Так как $\Phi(0)=0$, то $c_1=0$. Принимая во внимание это, из условия $\Phi(\pi)=0$, получим

$$\frac{c_2\Gamma(3/2-\beta)\Gamma(1/2)}{\Gamma[1-(\beta+s)/2]\Gamma[1-(\beta-s)/2]}=0.$$

Умножая числитель и знаменатель полученной дроби на $\Gamma[(\beta+s)/2]\neq 0$ (так как $\mathrm{Re}s>0$) и учитывая равенства [18, с.18] $\Gamma(a)\Gamma(1-a)=[\pi/\sin(a\pi)]$, из последнего равенства получим

$$\frac{c_2\Gamma(3/2-\beta)\Gamma(1/2)\sin[\pi(\beta+s)/2]}{\pi\Gamma^{-1}[(\beta+s)/2]\Gamma[1-(\beta-s)/2]}=0.$$

Это равенство выполняется, например, при $\sin[\pi(\beta+s)/2]=0$.

Пользуясь формулой, дающей решение этого уравнения и неравенством $s>0$, найдем

$$s=s_n=2n-\beta,\ n\in N. \tag{14}$$

Следовательно, $\mu_n=s_n^2-\beta^2$, $n\in N$, где s_n- числа, определяемые равенством (14), являются собственными значениями задачи {(11), (12)}.

Полагая в (13) $s=s_n$, $n\in N$, и учитывая $c_1=0$, $c_2=1$ получим собственные функции задачи {(11), (12)}, соответствующие собственным значениям μ_n :

$$\Phi_n(\varphi)=(\sin\varphi)^{1-2\beta}F\left[(1-\beta+s_n)/2,(1-\beta-s_n)/2;3/2-\beta;\sin^2\varphi\right],n\in N. \tag{15}$$

Произведя замену $R(r)=\left(\rho/\sqrt{\lambda}\right)^{-(1/2)-\beta-\gamma}W(\rho)$, из (7) получим уравнение Бесселя в следующем виде [19, с.49]:

$$\rho^2W''(\rho)+\rho W'(\rho)+\left(\rho^2-\omega^2\right)W(\rho)=0, \tag{16}$$

здесь $\rho=\sqrt{\lambda}r,\ \omega=\sqrt{[(1/2)+\beta+\gamma]^2+\chi}$.

Принимая во внимание вид общего решения [19, с.54] уравнения (16) и введенные обозначения, получим общее решение уравнения (7) в виде

$$R(r)=c_3r^{-(1/2)-\beta-\gamma}J_\omega\left(\sqrt{\lambda}r\right)+c_4r^{-(1/2)-\beta-\gamma}Y_\omega\left(\sqrt{\lambda}r\right), 0<r<1, \tag{17}$$

где c_3 и c_4– произвольные постоянные, а $J_\omega(z)$ и $Y_\omega(z)$– функции Бесселя порядка ω первого и второго рода [19, с.51] соответственно.

Из (17) следует, что решение уравнения (7), удовлетворяющее первому из условий (8), существует при $\mathrm{Re}\omega>(1/2)+\beta+\gamma$ и оно определяется равенством

$$R(r)=c_3r^{-(1/2)-\beta-\gamma}J_\omega\left(\sqrt{\lambda}r\right). \tag{18}$$

Для нахождения значения параметра λ, надо определить значения параметра ω, т.е. значения параметра χ, который находится из решения задачи {(9), (10)}. Поэтому, исследуем эту задачу.

Переходя к новой переменной $\xi=\sin^2\theta$, из уравнения (9) получим

$$\xi(1-\xi)\tilde{T}''(\xi)+\left[(1+\beta)-\left(\frac{3}{2}+\beta+\gamma\right)\xi\right]\tilde{T}'(\xi)+\frac{1}{4}\left(\chi-\frac{\mu_n}{\xi}\right)\tilde{T}(\xi)=0 \tag{19}$$

где $\tilde{T}(\xi)=T\left(\arcsin\sqrt{\theta}\right)$.

Обыкновенные дифференциальные уравнения типа (19), как известно [20, с.113], [21, с.129] называются уравнениями Гойна.

Решение уравнения (19) ищем в виде

$$\tilde{T}(\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k\tilde{T}_k(\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}A_kF\left(\frac{1}{4}+\frac{\beta+\gamma+\omega}{2},\frac{1}{4}+\frac{\beta+\gamma-\omega}{2};1+\beta+k;\xi\right), \tag{20}$$

где

$$\tilde{T}_k(\xi)=F\left(\frac{1}{4}+\frac{\beta+\gamma+\omega}{2},\frac{1}{4}+\frac{\beta+\gamma-\omega}{2};1+\beta+k;\xi\right)$$

-гипергеометрическая функция Гаусса [18, с.69], удовлетворяющая следующему уравнению

$$\xi(1-\xi)\tilde{T}_k''(\xi)+[(1+\beta+k)-(\gamma+\beta+3/2)\xi]\tilde{T}_k'(\xi)+(\chi/4)\tilde{T}_k(\xi)=0. \tag{21}$$

Подставляя (20) в уравнение (19) и принимая во внимание (21), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}A_k\left[k\xi\tilde{T}_k'(\xi)+(\mu_n/4)\tilde{T}_k(\xi)\right]=0. \tag{22}$$

Далее, используя следующее соотношение для функции Гаусса [18, с.111]

$$z\frac{dF(a_1,a_2;a_3;z)}{dz}=(a_3-1)\left[F(a_1,a_2;a_3-1;z)-F(a_1,a_2;a_3;z)\right],$$

имеем

$$\xi \tilde{T}_k'(\xi) = k\left[\tilde{T}_{k-1}(\xi) - \tilde{T}_k(\xi)\right].$$

Учитывая последнее равенство, уравнение (22) можно записать в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \left\{k^2 T_{k-1}(\xi) + \left[(\mu_n/4) - k^2\right] T_k(\xi)\right\} = 0. \tag{23}$$

Из (23) следуют рекуррентные соотношения для коэффициентов разложения (20):

$$A_0 = 1,$$

$$A_{k+1} = \frac{k(\beta+k) - (\mu_n/4)}{(k+1)(1+\beta+k)} A_k, \ \ k = 0,1,2,\dots .$$

Таким образом, мы построили разложения решений уравнения (19) в ряд по гипергеометрическим функциям

$$F\left(\frac{1}{4} + \frac{\beta+\gamma+\omega}{2}, \frac{1}{4} + \frac{\beta+\gamma-\omega}{2}; 1+\beta+k; \xi\right).$$

Теперь, переходя к переменной θ в (20), получим частное решение уравнения (9) в виде

$$T(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k F\left\{[(1/2)+\beta+\gamma+\omega]/2, [(1/2)+\beta+\gamma-\omega]/2; 1+\beta+k; \sin^2\theta\right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\left(\beta+\sqrt{\beta^2+\mu_n}\right)/2\right)_k \left(\left(\beta-\sqrt{\beta^2+\mu_n}\right)/2\right)_k}{k!\,(1+\beta)_k} \times$$

$$\times F\left\{[(1/2)+\beta+\gamma+\omega]/2, [(1/2)+\beta+\gamma-\omega]/2; 1+\beta+k; \sin^2\theta\right\}. \tag{24}$$

Считая, что ряд (24) сходится равномерно (это будет доказано ниже), подставим (24) в первое условие (10). Затем, учитывая равенство [18, с.73] $F(a,b;c;0) = 1$ получим

$$T(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\left(\beta+\sqrt{\beta^2+\mu_n}\right)/2\right)_k \left(\left(\beta-\sqrt{\beta^2+\mu_n}\right)/2\right)_k}{k!\,(1+\beta)_k}.$$

С помощью признака Раабе [17, Т.2., с.272] можно доказать сходимость последнего ряда и на основании разложения гипергеометрической функции [18, с.73], его сумма равна $F\left[\left(\beta+\sqrt{\beta^2+\mu_n}\right)/2, \left(\beta-\sqrt{\beta^2+\mu_n}\right)/2, 1+\beta, 1\right]$. Следовательно, функция (24) удовлетворяет первому условию (10).

Теперь покажем, что функция (24) удовлетворяет второму из условий (10). С этой целью, используя следующую формулу для гипергеометрической функции [18, с.73]

$$F(a,b,c;1) = [\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)] / [\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)], c-a-b > 0,$$

имеем

$$T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\left(\beta+\sqrt{\beta^2+\mu_n}\right)/2\right)_k \left(\left(\beta-\sqrt{\beta^2+\mu_n}\right)/2\right)_k}{k!\,(1+\beta)_k} \times$$

$$\times\frac{\Gamma(1+\beta+k)\Gamma(1/2-\gamma+k)}{\Gamma[(3/2+\beta-\gamma-\omega)/2+k]\Gamma[(3/2+\beta-\gamma+\omega)/2+k]}=0.$$

Умножая на $\Gamma\{1-[(3/2+\beta-\gamma-\omega)/2+k]\}\neq 0$ числитель и знаменатель полученной дроби (так как $\mathrm{Re}\omega>(1/2)+\beta+\gamma$) и учитывая формулы [18, с.18] $\Gamma(a)\Gamma(1-a)=[\pi/\sin(a\pi)]$, из последнего равенства получим

$$T\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k\frac{\Gamma(1+\beta+k)\Gamma(1/2-\gamma+k)\sin[(3+2\beta-2\gamma-2\omega)\pi/4]}{\Gamma^{-1}\{1-[(3/2+\beta-\gamma-\omega)/2+k]\}\Gamma[(3/2+\beta-\gamma+\omega)/2+k]}=0.$$

Это равенство выполняется, например, при

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\beta\pi}{2}-\frac{\gamma\pi}{2}-\frac{\omega\pi}{2}\right)=0.$$

Пользуясь формулой, дающей решение этого уравнения, и неравенство $\omega>(1/2)+\beta+\gamma$, найдем

$$\omega=\omega_l=2l+(3/2)+\beta-\gamma,\ l=0,1,2,.... \tag{25}$$

Следовательно, $\chi_l=\omega_l^2-(1/2+\beta+\gamma)^2$, $l=0,1,2,...$, где ω_l- числа, определяемые равенством (25), являются собственными значениями задачи {(9), (10)}.

Полагая в (24) $\omega=\omega_l$, $l=0,1,2,...$, получим собственные функции задачи {(9), (10)}, соответствующие собственным значениям χ_l :

$$T_{nl}(\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\left(\beta+\sqrt{\beta^2+\mu_n}\right)/2\right)_k\left(\left(\beta-\sqrt{\beta^2+\mu_n}\right)/2\right)_k}{k!(1+\beta)_k}\times$$

$$\times F\left(1+\beta+l,\gamma-\frac{1}{2}-l;1+\beta+k;\sin^2\theta\right),\theta\in[0,\pi/2]. \tag{26}$$

Теперь докажем, что ряд (26) сходится в $[0,\pi/2]$. Представим этот ряд в форме, удобной для получения оценки. Последовательно используя формулы [18, с.647-648]

$$(a+k)_m=\frac{(a)_m(a+m)_k}{(a)_k},\quad \Gamma(a+k)=(a)_k\Gamma(a),$$

имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(1+\beta+l)_m\left(\gamma-\frac{1}{2}-l\right)_m\left(\frac{\beta+\sqrt{\beta^2+\mu_n}}{2}\right)_k\left(\frac{\beta-\sqrt{\beta^2+\mu_n}}{2}\right)_k}{(1+\beta)_m(1+\beta+m)_k m!k!}\left(\sin^2\theta\right)^m=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(1+\beta+l)_m\left(\gamma-\frac{1}{2}-l\right)_m}{(1+\beta)_m m!}\left(\sin^2\theta\right)^m\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\beta+\sqrt{\beta^2+\mu_n}}{2}\right)_k\left(\frac{\beta-\sqrt{\beta^2+\mu_n}}{2}\right)_k}{(1+\beta+m)_k k!}=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(1+\beta+l)_m\left(\gamma-\frac{1}{2}-l\right)_m}{(1+\beta)_m m!}\left(\sin^2\theta\right)^m F\left(\frac{\beta+\sqrt{\beta^2+\mu_n}}{2},\frac{\beta-\sqrt{\beta^2+\mu_n}}{2},1+\beta+m;1\right)=$$

$$
= \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma\left(1+\frac{\beta-\sqrt{\beta^2+\mu_n}}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\beta+\sqrt{\beta^2+\mu_n}}{2}\right)}\times
$$

$$
\times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(1+\beta+l)_m\left(\gamma-\frac{1}{2}-l\right)_m}{\left(1+\frac{\beta-\sqrt{\beta^2+\mu_n}}{2}\right)_m\left(1+\frac{\beta+\sqrt{\beta^2+\mu_n}}{2}\right)_m}\left(\sin^2\theta\right)^m =
$$

$$
= \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma\left(1+\frac{\beta-\sqrt{\beta^2+\mu_n}}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\beta+\sqrt{\beta^2+\mu_n}}{2}\right)}\sum_{m=0}^{\infty}u_m(\theta),
$$

где

$$
u_m(\theta) = \frac{(1+\beta+l)_m\left(\gamma-\frac{1}{2}-l\right)_m}{\left(1+\frac{\beta-\sqrt{\beta^2+\mu_n}}{2}\right)_m\left(1+\frac{\beta+\sqrt{\beta^2+\mu_n}}{2}\right)_m}\left(\sin^2\theta\right)^m.
$$

В силу признака Даламбера [17, Т.2., с.271], из последнего имеем

$$
\lim_{m\to\infty}\left|\frac{u_{m+1}(\theta)}{u_m(\theta)}\right| = \sin^2\theta.
$$

Следовательно, ряд (26) при $\theta\in[0,\pi/2)$ сходится абсолютно и равномерно, функция $T_{nl}(\theta)$ при $\theta\to 0$ ограничена, а при $\theta\to(\pi/2)$ стремится к нулю.

На основании сказанного выше, можно заключить, что ряд (26) сходится абсолютно и равномерно в $[0,\pi/2]$.

Замечание 1. Пусть в (26) $l=k$. Тогда, в силу известной формулы для гипергеометрической функции [18, с.109],

$$
F(a,b,a;x) = (1-x)^{-b}
$$

ряд (26) принимает вид

$$
T_n(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\left(\beta+\sqrt{\beta^2+\mu_n}\right)/2\right)_k\left(\left(\beta-\sqrt{\beta^2+\mu_n}\right)/2\right)_k}{k!\,(1+\beta)_k}\left(\cos^2\theta\right)^{k+(1/2)-\gamma}.
$$

Отсюда видно, что $|T_m(0)|<+\infty$ и $T_m(\pi/2)=0$.

Применение признака Даламбера дает сходимость ряда при $\theta\in(0,\pi/2)$.

Замечание 2. Согласно принятым обозначениям в [18, с.378], сумма ряда (26) равна $F_3(...)$, т.е.

$$
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\beta+\sqrt{\beta^2+\mu_n}}{2}\right)_k\left(\frac{\beta-\sqrt{\beta^2+\mu_n}}{2}\right)_k}{k!\,(1+\beta)_k}F\left(1+\beta+l,\gamma-\frac{1}{2}-l;1+\beta+k;\sin^2\theta\right) =
$$

$$
= F_3\left(\frac{\beta+\sqrt{\beta^2+\mu_n}}{2},1+\beta+l,\frac{\beta-\sqrt{\beta^2+\mu_n}}{2},\gamma-\frac{1}{2}-l,1+\beta;1,\sin^2\theta\right).
$$

Теперь, принимая во внимание, что ω_l, $l=0,1,2,...-$ известные числа, определяемые равенствами (25), находим значения параметра λ из (18). С этой целью, подставляя (18) ко второму условию (8), получим

$$
J_{\omega_l}\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0,\ \ l=0,1,2,\dots\ . \tag{27}
$$

Известно, что при $l > -1$ функция Бесселя $J_l(z)$ имеет счетное число нулей, причем все они вещественны и с попарно противоположными знаками [19]. Так как $\omega_l > (1/2) + \beta + \gamma$, то уравнение (27) имеет счетное число вещественных корней. Обозначая через α_{ml} $m-$ ый положительный корень уравнения (27), получим те значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения задачи (т.е. собственные значения задачи $D_\lambda^{\beta\gamma}$) $\{(7),(8)\}$: $\lambda_m = \alpha_{ml}^2$, $m \in N$, $l = 0,1,2,\ldots.$

Полагая в (18) $\lambda = \alpha_{ml}^2$ и $c_3 = a_{ml}$, где $a_{ml} \neq 0-$ произвольная постоянная, получим нетривиальные решения (собственную функцию) задачи $\{(7),(8)\}$:

$$R_{ml}(r) = a_{ml} r^{-(1/2)-\beta-\gamma} J_{\omega_l}(\alpha_{ml} r), \ m \in N, \ l = 0,1,2,\ldots \,. \tag{28}$$

Следовательно, задача $\{(1),(2)\}$ имеет счетное число собственных значений и собственные функции. Её собственными значениями являются числа, $\lambda = \alpha_{ml}^2$, $m \in N$, $l = 0,1,2,\ldots$, а собственные функции, в силу формул (15), (26) и (28), определяются равенствами

$$u_{nlm} = c_{nlm} r^{-(1/2)-\beta-\gamma} J_{\omega_l}(\alpha_{ml} r) \times$$
$$\times (\sin\varphi)^{1-2\beta} F\left(\frac{1-\beta+s_n}{2}, \frac{1-\beta-s_n}{2}; \frac{3}{2}-\beta; \sin^2\varphi\right) \times$$
$$\times F_3\left(\frac{\beta+\sqrt{\beta^2+\mu_n}}{2}, 1+\beta+l, \frac{\beta-\sqrt{\beta^2+\mu_n}}{2}, \gamma-\frac{1}{2}-l, 1+\beta; 1, \sin^2\theta\right),$$

где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi = arctg(y/x)$, $\theta = \arccos(z/r)$, $c_{nlm} \neq 0-$ произвольные постоянные. Этим завершено исследование задачи $D_\lambda^{\beta\gamma}$.

Аналогично исследована следующая задача:

Задача $D_\lambda^{\alpha\beta\gamma}$. Найти значения параметра λ и соответствующие им нетривиальные функции $u(x,y,z) \in C\left(\overline{\tilde{\Omega}}\right) \cap C^2\left(\tilde{\Omega}\right)$, удовлетворяющие уравнению

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \frac{2\alpha}{x}u_x + \frac{2\beta}{y}u_y + \frac{2\gamma}{z}u_z + \lambda u = 0, \ (x,y,z) \in \tilde{\Omega} \tag{29}$$

и краевому условию

$$u(x,y,z) = 0, \ (x,y,z) \in \partial\tilde{\Omega},$$

где $\tilde{\Omega} = \Omega \cap \{x > 0\}$, а $\alpha = const \in (0,1/2)-$ заданные числа.

Проведя те же рассуждения, что и в решении задачи $D_\lambda^{\alpha\beta\gamma}$, можно убедиться в том, что при $\lambda \leq 0$ задача $D_\lambda^{\alpha\beta\gamma}$ имеет только тривиальное решение, т.е. в этом промежутке собственные значения задачи не существуют, а при $\lambda > 0$ существует счетное число собственных значений $\tilde{\lambda}_{ml}$ ($m \in N$, $l = 0,1,2,\ldots$) задачи $D_\lambda^{\alpha\beta\gamma}$, причем они определяются как корни уравнений

$$J_{\tilde{\omega}_l}\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0, \ l = 0,1,2,\ldots \,,$$

где $\tilde{\omega}_l = 2l + (3/2) + \alpha + \beta - \gamma$, $l = 0,1,2,\ldots.$

Соответствующие этим собственным значениям собственные функции в области $\tilde{\Omega}$ даются формулами

$$\tilde{u}_{nlm} = \tilde{c}_{nlm} r^{-(1/2)-\alpha-\beta-\gamma} J_{\tilde{\omega}_l}\left(\sqrt{\tilde{\lambda}_{ml}}\, r\right) \times$$

$$\times(\sin\varphi)^{1-2\beta}F\left(\frac{1+\alpha-\beta+\tilde{s}_n}{2},\frac{1+\alpha-\beta-\tilde{s}_n}{2};\frac{3}{2}-\beta;\sin^2\varphi\right)\times$$

$$\times F_3\left(\frac{\alpha+\beta+\sqrt{(\alpha+\beta)^2+\tilde{\mu}_n}}{2},1+\alpha+\beta+l,\right.$$

$$\left.\frac{\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha+\beta)^2+\tilde{\mu}_n}}{2},\gamma-\frac{1}{2}-l,1+\alpha+\beta;1,\sin^2\theta\right),$$

где $\tilde{c}_{nlm}\neq 0-$ произвольные постоянные, $\tilde{\mu}_n=\tilde{s}_n^2-(\alpha+\beta)^2$, $\tilde{s}_n=2n-\alpha-\beta$, $n\in N$.

Замечание 3. Аналогичным способом можно изучить различные задачи для уравнения (1) [(29)] в области $\Omega\,(\tilde{\Omega})$, задавая на различных плоскостях границы $\partial\Omega\ \left(\partial\tilde{\Omega}\right)$ условия Дирихле и Неймана.

Список литературы

[1] Салахитдинов М. С., Уринов А. К., *К спектральной теории уравнений смешанного типа*, Mumtoz so'z, Ташкент, 2010, 354 с. [Salahitdinov M. S., Urinov A. K. K spektral'noj teorii uravnenij smeshannogo tipa. Tashkent. Mumtoz so'z. 2010. 354].

[2] Моисеев Е. И., "Решение задачи Трикоми в специальных областях", *Дифференц. уравнения*, **26**:1 (1990), 93–103. [Moiseev E. I. Reshenie zadachi Trikomi v special'nyh oblastjah. Differenc. uravnenija.1990. vol. 26. issue 1. 93–103].

[3] Пономарев С. М., *Спектральная теория основной краевой задачи для уравнения смешанного типа Лаврентьева-Бицадзе*, Дис. . . . д-ра физ.-мат. наук, 1981. [Ponomarev S. M. Spektral'naja teorija osnovnoj kraevoj zadachi dlja uravnenija smeshannogo tipa Lavrent'eva-Bicadze. Dis. . . . d-ra fiz.-mat. nauk. 1981].

[4] Кальменов Т. Ш., "О спектре задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе", *Дифференц. уравнения*, **13**:8 (1977), 1715–1725. [Kal'menov T. Sh. O spektre zadachi Trikomi dlja uravnenija Lavrent'eva-Bicadze. Differenc. uravnenija. 1977. vol. 13. issue 8. 1715–1725].

[5] Уринов А. К., "Задачи на собственные значения для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом", *Узбекский мат. журн*, 2005, № 1, 70–78. [Urinov A. K. Zadachi na sobstvennye znachenija dlja uravnenija smeshannogo tipa s singuljarnym kojefficientom. Uzbekskij mat. zhurn. 2005. issue 1. 70–78].

[6] Уринов А. К., Каримов К. Т., "Нелокальные задачи на собственные значения для уравнения смешанного типа с двумя сингулярными коэффициентами", *Докл. АН РУз*, 2010, № 2, 19–24. [Urinov A. K., Karimov K. T. Nelokal'nye zadachi na sobstvennye znachenija dlja uravnenija smeshannogo tipa s dvumja singuljarnymi kojefficientami. Dokl. AN RUz. 2010. issue 2. 19–24].

[7] Сабитов К. Б., Карамова А. А., "Решение одной газодинамической задачи для уравнения смешанного типа с негладкой линией вырождения", *Дифференц. уравнения*, 2002, № 38(1), 111–115. [Sabitov K. B., Karamova A. A. Reshenie odnoj gazodinamicheskoj zadachi dlja uravnenija smeshannogo tipa s negladkoj liniej vyrozhdenija. Differenc. uravnenija. 2002. no 38(1). 111–115].

[8] Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н., *Сборник задач по математической физике*, Гостехиздат, М., 1956, 685 с. [Budak B. M., Samarskij A. A., Tihonov A. N. Sbornik zadach po matematicheskoj fizike. Moskva. Gostehizdat. 1956. 685].

[9] Моисеев Е. И., Нефедов П. В., Холомеева А. А., "Аналоги задач Трикоми и Франкля в трехмерных областях для уравнения Лаврентьева-Бицадзе", *Дифференц. уравнения*, **50**:12 (2014), 1672–1675. [Moiseev E. I., Nefedov P. V., Holomeeva A. A. Analogi zadach Trikomi i Franklja v trehmernyh oblastjah dlja uravnenija Lavrent'eva-Bicadze. Differenc. uravnenija. 2014. vol. 50. no 12. 1672–1675].

[10] Moiseev E.I., Nefedov P.V., "Frankl problem for the Lavrent'ev-Bitsadze equation in a 3D-domain", *Integral Transforms and Special Functions*, **24**:7 (2013), 554–560.

[11] Сабитов К.Б., Карамова А.А., "Спектральные свойства решений задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с двумя линиями изменения типа и их применения", *Изв. РАН. Серия матем.*, 2001, № 65(4), 133–150. [Sabitov K. B., Karamova A. A. Spektral'nye

svojstva reshenij zadachi Trikomi dlja uravnenija smeshannogo tipa s dvumja linijami izmenenija tipa i ih primenenija. Izv. RAN. Serija matem. 2001. no 65(4). 133–150].

[12] Сабитов К.Б., Хасанова С.Л., "Спектральные свойства краевой задачи с производной по нормали в граничном условии для уравнений смешанного типа и их применения", *Изв. вузов.*, 2003, №6(493), 64–76. [Sabitov K. B., Hasanova S. L. Spektral'nye svojstva kraevoj zadachi s proizvodnoj po normali v granichnom uslovii dlja uravnenij smeshannogo tipa i ih primenenija. Izv. vuzov. 2003. no 6(493). 64–76].

[13] Моисеев Е.И., "О решении вырождающихся уравнений с помощью биортогональных рядов", *Дифференц. уравнения*, **27**:1 (1991), 94—103. [Moiseev E. I. O reshenii vyrozhdajushhihsja uravnenij s pomoshh'ju biortogonal'nyh rjadov. Differenc. uravnenija. 1991. vol. 27. no 1. 94—103].

[14] Уринов А. К., Каримов К. Т., "Задача Трикоми для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами", *Вестник Национального университета. Серия: Математика, Механика, Физика, Информатика*, **2**:1 (2016), 14–25. [Urinov A. K., Karimov K. T. Zadacha Trikomi dlja trehmernogo uravnenija smeshannogo tipa s tremja singuljarnymi kojefficientami. Vestnik Nacional'nogo universiteta. Serija: Matematika, Mehanika, Fizika, Informatika. 2016. vol. 2. no 1. 14–25].

[15] Каримов К. Т., "Задача Дирихле для трехмерного эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами", *Узбекский математический журнал*, 2017, № 1, 96–105. [Karimov K. T. Zadacha Dirihle dlja trehmernogo jellipticheskogo uravnenija s dvumja singuljarnymi kojefficientami. Uzbekskij matematicheskij zhurnal. 2017. no 1. 96–105].

[16] Галимова А.,Р., "В-сферические функции и применение их для решения граничных задач", *Вестник ТГГПУ*, 2008, № 4, 15–19. [Galimova A. R. V-sfericheskie funkcii i primenenie ih dlja reshenija granichnyh zadach. Vestnik TGGPU. 2008. no 4. 15–19].

[17] Фихтенгольц Г. М., *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 2, ФИЗМАТЛИТ, М., 2001, 810 с. [Fihtengol'c G. M. Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischislenija. vol 2. Moskva. FIZMATLIT, 2001. 810].

[18] Бейтмен Г., Эрдейи А., *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрические функции. Функции Лежандра.*, Наука, М., 1973, 296 с. [Bejtmen G., Jerdeji A. Vysshie transcendentnye funkcii. Gipergeometricheskie funkcii. Funkcii Lezhandra. Moskva. Nauka.1973. 296].

[19] Ватсон Г. Н., *Теория бесселевых функций*, ИЛ, Москва, 1949, 798 с. [Vatson G. N. Teorija besselevyh funkcij. Moskva. Izd. IL. 1949. 798].

[20] Бейтмен Г., Эрдейи А., *Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье*, Наука, М., 1967, 299 с. [Bejtmen G., Jerdeji A. Vysshie transcendentnye funkcii. Jellipticheskie i avtomorfnye funkcii. Funkcii Lame i Mat'e. Moskva. Nauka. 1967. 299].

[21] Славянов С., Лай В., *Специальные функции: Единая теория, основанная на анализе особенностей*, Гостехиздат, Спб., 2002, 312 с. [Slavjanov S., Laj V. Special'nye funkcii: Edinaja teorija, osnovannaja na analize osobennostej. Spb. Gostehizdat. 2002. 312.].

[22] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И., *Интегралы и ряды. Специальные функции*. Т. 3, Наука, М., 1983, 752 с. [Prudnikov A. P., Brychkov Ju. A., Marichev O. I. Integraly i rjady. Special'nye funkcii. vol 3. Moskwa. Nauka. 1983. 752].

Список литературы (ГОСТ)

[1] Салахитдинов М. С., Уринов А. К. К спектральной теории уравнений смешанного типа. Ташкент: Mumtoz so'z, 2010. 354 с.

[2] Моисеев Е. И. Решение задачи Трикоми в специальных областях // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. №1. С. 93–103

[3] Пономарев С. М. Спектральная теория основной краевой задачи для уравнения смешанного типа Лаврентьева-Бицадзе. Дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. 1981

[4] Кальменов Т. Ш. О спектре задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. №8. С. 1715–1725

[5] Уринов А. К. Задачи на собственные значения для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом // Узбекский мат. журн. 2005. №1. С. 70–78

[6] Уринов А. К., Каримов К. Т. Нелокальные задачи на собственные значения для уравнения смешанного типа с двумя сингулярными коэффициентами // Докл. АН РУз. 2010. №2. С. 19–24

[7] Сабитов К. Б., Карамова А. А. Решение одной газодинамической задачи для уравнения смешанного типа с негладкой линией вырождения // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. №1. С. 111–115

[8] Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. М.: Гостехиздат, 1956. 685 с.

[9] Моисеев Е. И., Нефедов П. В., Холомеева А. А. Аналоги задач Трикоми и Франкля в трехмерных областях для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. №12. С. 1672–1675

[10] Moiseev E. I., Nefedov P. V. Frankl problem for the Lavrent'ev-Bitsadze equation in a 3D-domain // Integral Transforms and Special Functions. 2013. vol. 24. no 7. pp. 554–560

[11] Сабитов К. Б., Карамова А. А. Спектральные свойства решений задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с двумя линиями изменения типа и их применения // Изв. РАН. Серия матем. 2001. №65(4). С. 133–150

[12] Сабитов К. Б., Хасанова С. Л. Спектральные свойства краевой задачи с производной по нормали в граничном условии для уравнений смешанного типа и их применения // Изв. вузов. 2003. №6(493). С. 64–76

[13] Моисеев Е. И. О решении вырождающихся уравнений с помощью биортогональных рядов // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. №1. С. 94—103

[14] Уринов А. К., Каримов К. Т. Задача Трикоми для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами // Вестник Национального университета. Серия: Математика, Механика, Физика, Информатика. 2016. Т. 2. №1. С.14–25

[15] Каримов К. Т. Задача Дирихле для трехмерного эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами // Узбекский математический журнал. 2017. №1. С. 96–105

[16] Галимова А. Р. В-сферические функции и применение их для решения граничных задач // Вестник ТГГПУ. 2008. № 4. С. 15–19

[17] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т2. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 810 с.

[18] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрические функции. Функции Лежандра. М.: Наука.1973. 296 с.

[19] Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. М.: Изд. ИЛ, 1949. 798 с.

[20] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М.: Наука. 1967. 299 с.

[21] Славянов С., Лай В. Специальные функции: Единая теория, основанная на анализе особенностей. Спб.: Гостехиздат, 2002. 312 с.

[22] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. Т.3. М.: Наука, 1983. 752 с.

Для цитирования: Каримов К. Т. Спектральные задачи для трехмерных эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2017. № 2(18). С. 7-19. DOI: 10.18454/2079-6641-2017-18-2-7-19

For citation: Karimov K. T. Spectral problems for three-dimensional elliptic equations with singular coefficients, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2017, **18**: 2, 7-19. DOI: 10.18454/2079-6641-2017-18-2-7-19

Поступила в редакцию / Original article submitted: 18.05.2017