Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
Vol. 04(02): 211 - 219 (2017)

# Resolución de la Ecuación Diferencial Parcial Hiperbólica de segundo orden con término fuente mediante el Método de D'Alembert-Green

# Resolution of the Partial Differential Equations of the Hyperbolic type with source term through the D'Alembert- Green Method's

Irla Mantilla N.* and Ysaac Suaña B.**

*Received, Ap. 04, 2017* *Accepted, Aug. 31, 2017*

**Resumen**

*En el presente trabajo se estudia una Ecuación Diferencial Parcial Hiperbólica con término fuente no homogéneo de segundo orden, su forma canónica, su resolución mediante la fórmula de D'Alembert y el Teorema de Green. Para la resolución de este problema solo se requiere las condiciones iniciales mixtas. Existen diversos problemas físicos que conducen a este tipo de modelo matemático, por lo cual esta técnica de resolución contribuye al conocimiento de encontrar soluciones explícitas de problemas como por ejemplo tipo onda bidimensional sometidos a fuerzas exteriores. Dentro de los resultados se genera la solución explícita de tres casos: respecto a la homogeneidad y no homogeneidad de las condiciones iniciales y del término fuente, desde el punto de vista de solución analítica para funciones de clase $\mathcal{C}^2$.*

**Palabras clave**. Ecuación diferencial parcial hiperbólico con término fuente y condiciones iniciales no homogéneas, fórmula de D'Alembert, Teorema de Green.

**Abstract**

*In the present work, we study a non-homogeneous second-order partial hyperbolic differential equation, its canonical form, its resolution using D'Alembert's formula and Green's theorem. Only mixed initial conditions that are not homogeneous are required to solve this problem. There are several physical problems that lead to this type of mathematical model, so this technique of resolution contributes to the knowledge of finding explicit solutions of problems such as two-dimensional wave type. Within the results the explicit solution of three cases is generated: regarding the homogeneity and non-homogeneity of the initial conditions and the term source, from the point of view of analytical solution for continuous functions.*

**Keywords**. Partial differential equation of hyperbolic type with term source non homogeneous, D'Alembert's formula, Green's theorem.

**1. Introducción.** Los fenómenos oscilatorios de diferente naturaleza ya sean vibraciones de cuerdas, membranas, oscilaciones acústicas, desplazamiento del gas en tuberías, oscilaciones electromagnéticas son descritas en términos de Ecuaciones diferenciales parciales del tipo hiperbólico con término fuente no homogéneas, para el caso de una dimensión, dos y tres dimensiones espaciales respectivamente como se muestra a continuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G(x,t),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) + G(x,t),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}) + G(x,t).$$

*Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Ingeniería, Av. Túpac Amaru 210, Lima-Perú (irlamn@uni.edu.pe).
**Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Ingeniería, Av. Túpac Amaru 210, Lima-Perú (ysaacsb@gmail.com),

 **DOI:** http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2017.02.08

Siendo $x, y, z$ las coordenadas espaciales y $t$ la temporal.

En el caso que se desee agrandar la variable espacial a una dimensión mayor, uno de los problemas frecuentes y complejos es su resolución. Un caso es el de vibraciones u oscilaciones de membranas que conducen a este tipo de problema con valores de frontera y de valor inicial, el cual usualmente se resuelve en sentido homogéneo.

En el presente trabajo se propone la aplicación de un método combinado de la fórmula D'Alembert y el Teorema de Green, a un modelo matemático de vibraciones ampliado en el término fuente no homogéneo, previa demostración de la fórmula, y el principio de superposición con lo que se obtiene la solución final del problema.

En la literatura estos modelos muy poco tratados, son muy importantes puesto que resultan de los diversos fenómenos físicos mencionados anteriormente, cuando son impulsados por fuerzas externas al fenómeno, por tanto su estudio contribuye al conocimiento.

Sean $u, G$ funciones de clase $\mathcal{C}^2(\Omega)$[1], $x$ e $y$ son las variables independientes,en este caso esquematizaremos EDP de dos variables independientes donde además $A, B, C, D, E, F$ son constantes en $\mathbb{R}$.
Sea la EDP de segundo orden de dos variables independientes[1]:

$$A\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + D\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + E\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + F.u(x,y) = G(x,y) \tag{1.1}$$

Cuando $G(x, y) \equiv 0$, la EDP es homogénea; caso contrario, es no homogénea.

Para las siguientes ecuaciones representaremos a la variable $y$ como la variable temporal $t$.

Nos vamos a centrar al estudio de las Ecuaciones Diferenciales Parciales Lineales Hiperbólicas (EDPLH) de segundo orden con término fuente no homogénea, pero antes haremos una breve introducción de la aplicación de la fórmula de D'Alembert para resolver EDPLH homogéneo.

Este método es my importante puesto que usualmente los modelos matemáticos de los fenómenos físicos que conducen a señales oscilatorias son descritos por la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u = u(x,t) \tag{1.2}$$

Siendo $x$ la coordenada espacial unidimensional y $t$ la temporal. En particular para $a \neq 0$ semejantes ecuaciones pueden reducirse un gran número de diferentes problemas físicos y una de las técnicas usuales que se aplican es el método de separación de variables, pero para ello deben poseer necesariamente conocidas las condiciones iniciales y también las condiciones de contorno.
En el presente trabajo usaremos el método de D'Alembert para resolver la EDP Homogenea cuando no se conocen las condiciones de contorno, solamente las condiciones iniciales y luego para la No homogénea usaremos el Teorema de Green, ésta combinación es nuestra contribución para resolver este tipo de EDPHL No homogeneas o con término fuente no nulo.

**2. Método de D'Alembert y el Modelo Matemático de EDPLH homogéneo .** Puede resumirse en las siguientes etapas para una ecuación homogénea en primer lugar:

- Mediante un cambio de variables se obtienen todas las soluciones de la nueva ecuación.
- Se determina una solución que satisfaga las condiciones iniciales.
- Se comprueba que hay una única solución.

La idea del cambio de variable a realizar viene sugerida por una sencilla observación.

Si suponemos que la función $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, se tiene la composición[1]

$$u_{tt} - u_{xx} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) \circ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u \tag{2.1}$$

[1] Una función de clase $\mathcal{C}^r(\Omega)$, $r \geq 0$ es aquella que es r-veces diferenciable con r-ésima derivada continua en el espacio $\Omega$. Entendemos a las funciones de clase $\mathcal{C}^0(\Omega)$, como las funciones continuas en $\Omega$.

**2.1. Cambio de variable en EDPHL homogénea.** La idea es considerar nuevas variables $\overline{x}$, $\overline{t}$ de forma que se verifique:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \overline{x}} = (\dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}) \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial \overline{t}} = (\dfrac{\partial}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x}) \end{cases}$$

Con este cambio de variables (2.1) se transforma en el siguiente problema de Cauchy, el mísmo que será resuelto usando el método de D'Alembert

$$u_{tt} - u_{xx} = \frac{\partial}{\partial \overline{x}}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{t}} u\right) = u_{\overline{t}\overline{x}} \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \tag{2.3}$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad x \in \mathbb{R} \tag{2.4}$$

$$u_t(x, 0) = g(x) \quad x \in \mathbb{R} \tag{2.5}$$

Donde suponemos los datos con regularidad suficiente para que podamos efectuar todos los cálculos.

Aquí suponemos que $u(x, t)$ es el desplazamiento de los puntos desde la posición de equilibrio en un momento de tiempo $t$.

Para cada valor fijo de la $t$ la gráfica de la función $u = u(x, t)$ da la forma de cuerda en el momento de tiempo $t$.

Hagamos el cambio de variable siguiente:

$$\xi = x - at$$

$$\eta = x + at$$

Entonces la ecuación en las nuevas variables adopta la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} . \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} . \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} . \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} . \frac{\partial \eta}{\partial t}\right) = a\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \tag{2.7}$$

Al reemplazar con nuestras nuevas variables, considerando las ecuaciones (2.1),(2.7) y (2.6), concluimos que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \tag{2.8}$$

En la ecuación canónica (2.8), denotando de una manera más simple $u_{\eta\xi} = 0$, se puede integrar respecto a las variables $\xi$ y $\eta$,

$$u_\eta(\xi) = w_1(\eta) \to u(\xi, \eta) = w_2(\xi) + \int^{\eta} w_1(s) ds,$$

asignando a $w_2(\xi) = \theta_1(\xi)$ y $\int^{\eta} w_1(s)ds = \theta_2(\eta)$.

Se obtiene que $u(\xi, \eta) = \theta_1(\xi) + \theta_2(\eta)$, y regresando a las variables originales:

$$u(x,t) = \theta_1(x - at) + \theta_2(x + at) \tag{2.9}$$

Siendo la ecuación (2.9) la solución general de la ecuación (2.8) representada en las variables originales.

El problema de Cauchy formulado en las ecuaciones (2.3), (2.4), (2.5), donde $u(x,t) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ y cuya solución está dada por (2.9), involucran dos funciones, las cuales se requieren determinar, para ello utilizamos las condiciones iniciales (2.4) y (2.5)

Sean

$$u(x,0) = \theta_1(x) + \theta_2(x) = f(x) \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = -a[\theta_1'(x) - \theta_2'(x)] = g(x)$$

Donde $\theta_1'(x) - \theta_2'(x) = -\frac{1}{a}g(x)$.

Integrando con respecto a $x$, se tiene:

$$\int_0^x [\theta_1'(\alpha) - \theta_2'(\alpha)]d\alpha = -\frac{1}{a}\int_0^x g(\alpha)d\alpha + C, \qquad C := cte$$

$$\theta_1(x) - \theta_2(x) = -\frac{1}{a}\int_0^x g(\alpha)d\alpha + C. \tag{2.11}$$

Entonces de (2.10) y (2.11) se tiene:

$$\theta_1(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x g(\alpha)d\alpha + \frac{C}{2} \tag{2.12}$$

$$\theta_2(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x g(\alpha)d\alpha - \frac{C}{2} \tag{2.13}$$

De la ecuación (2.9) y las expresiones obtenidas en (2.12) y (2.13) se obtiene:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}f(x-at) - \frac{1}{2a}\int_0^{x-at} g(\alpha)d\alpha + \frac{1}{2}f(x+at) + \frac{1}{2a}\int_0^{x+at} g(\alpha)d\alpha$$

$$u(x,t) = \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(\alpha)d\alpha \tag{2.14}$$

A la que se denomina Fórmula de D'Alembert para la EDPLH homogénea.

**3. Casos particulares de la condición inicial para la EDPLH homogénea.** Estudiemos dos casos particulares que permiten figurar el comportamiento de la solución de la ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ en el caso general[5].

- **Caso primero:** Sea $g(x) = 0$. Sin pérdida de generalidad y para simplificar consideremos que $a = 1$. Entonces la fórmula de D'Alembert adopta la expresión

$$u(x,t) = \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2}$$

Donde $f(x) \neq 0$ es un dato del problema dado.

- **Caso Segundo:** Sean:

$$f(x) \equiv 0, \qquad g(x) = \begin{cases} 1, |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0, |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

y sigamos considerando $a = 1$.

Entonces se presenta lo siguiente:

- La onda tiene solo un impulso inicial y la expresión para $t > 0$ toma la forma:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(\alpha)d\alpha$$

- Para cada $x$ fijo la solución $u(x,t)$ será igual a cero hasta que la interseccion de los intervalos $]x-t, x+t[$ y $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ sea no vacío.
- $u(x,t)$ varía respecto a $x$ mientras $]x-t, x+t[$ cubra cada vez mayor parte del intervalo $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.
- Después de que el intervalo $]x-t, x+t[$ tendrá en su interior el intervalo $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, $u(x,t)$ permanecerá invariable respecto a $x$ y variable respecto a $t$, es decir:

$$\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}+t}^{\frac{1}{2}-t} g(\alpha)d\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}+t}^{\frac{1}{2}-t} 1d\alpha = \frac{1}{2}(1-2t); \quad \forall x \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$$

**4. Método D'Alembert - Green y el Modelo Matemático EDPLH no homogénea o con término fuente.** Si se considera fenómenos físicos que conducen a señales oscilatorias y son sometidos a fuerzas externas, estos conducen a modelos matemáticos de tipo EDPLH no homogéneo o con término fuente no nulo y condiciones iniciales mixtas. Este tipo de problemas presentamos un caso particular de la ecuación (1.1) cuando $G(x,y) \neq 0$.

- El término fuente no nulo de una EDPLH de segundo orden, en la práctica describe también los efectos de las vibraciones sometidas a fuerzas externas.

Siguiendo nuestra notación para una EDPLH de segundo orden, representaremos a ésta en el caso no homogéneo por el siguiente problema de valor inicial, asignándole la función $s(x,t) \neq 0$ a $G(x,t)$ como el término fuente, de clase $C^2(\mathcal{R}_D)$.

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = s(x,t) \tag{4.1}$$

$$u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{4.2}$$

$$u_t(x,0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{4.3}$$

Matematicamente, hallar una solución analítica de (4.1), el estudio abarca en el área considerada por los puntos que podrían ser afectados por un desplazamiento desde el punto de posición que se está considerando.

El área afectada causalmente es tomado como el punto $(x,t)$ perteneciente a $\mathcal{R}_D$.

Designando el área que afecta causalmente al punto $(x,t)$ como $\mathcal{R}_D$. Integrando (4.1) sobre $\mathcal{R}_D$.

$$\iint_{\mathcal{R}_D} (a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2})dxdt = \iint_{\mathcal{R}_D} s(x,t)dxdt$$

Aplicación del **Teorema de Green**

Sea C una curva cerrada simple regular a trozos, positivamente orientada, en el plano $\mathbb{R}^2$ y sea $\mathcal{R}_D$ la unión de la región interior a $C$ con la propia curva $C$. Sea $F = (P,Q) : \mathcal{R}_D \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$. Entonces se tiene que[4]

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_{\mathcal{R}_D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \tag{4.4}$$

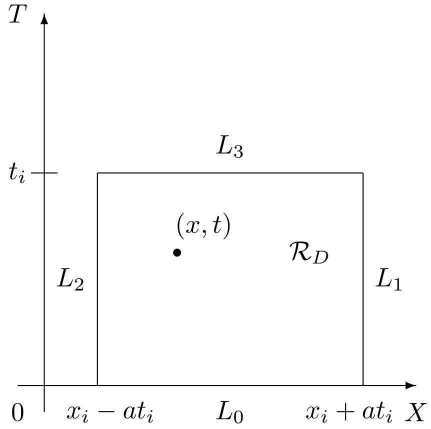


FIGURA 4.1. *Área de estudio del modelo matemático*

Mediante el uso del teorema de Green al lado izquierdo, obtenemos para

$$P = -a^2 \frac{\partial u}{\partial x}\,, \quad y \quad Q = -\frac{\partial u}{\partial t}$$

Sea $L = L_0 + L_1 + L_2 + L_3$:

$$\int_L (-a^2 u_x(x,t)dt - u_t(x,t)dx) = \iint_{\mathcal{R}_D} s(x,t)dxdt \tag{4.5}$$

La parte izquierda es ahora la suma de cuatro integrales de línea a lo largo de la frontera de la región de causalidad. Estas resultan ser bastante fáciles de calcular para $L_0, L_3$

$$\int_{x_i - at_i}^{x_i + at_i} -u_t(x,0)dx = -\int_{x_i - at_i}^{x_i + at_i} g(x)dx \tag{4.6}$$

En (4.5) el término a ser integrado con respecto al tiempo desaparece, debido a que la variación de $u$ respecto la variable temporal es constante en los intervalos $L_0$ y $L_3$, de este modo se tiene que $dt = 0$.

Para los otros dos lados de la región, cabe señalar que $x \pm at$ es una constante, renombrada $x_i \pm at_i$, donde el signo se escoge adecuadamente.

De este modo, podemos obtener la relación $dx \pm adt = 0$, escogiendo de nuevo el signo positivo $(+)$:

$$\int_{L_1} (-a^2 u_x(x,t)dt - u_t(x,t)dx) = \int_{L_1} (au_x(x,t)dx + au_t(x,t)dt)$$

$$= a \int_{L_1} du(x,t) = au(x_i,t_i) - af(x_i + at_i)$$

De forma similar para el último segmento de frontera

$$\int_{L_2} (-a^2 u_x(x,t)dt - u_t(x,t)dx) = -\int_{L_2} (au_x(x,t)dx + au_t(x,t)dt)$$

$$= -a \int_{L_2} du(x,t) = -a(f(x_i + at_i) - u(x_i,t_i))$$

$$= au(x_i,t_i) - af(x_i - at_i)$$

Sumando los tres resultados juntos y poniéndolos de vuelta en la integral original

$$-\int_{x_i - at_i}^{x_i + at_i} g(x)dx + au(x_i,t_i) - af(x_i + at_i) + au(x_i,t_i) - af(x_i - at_i)$$

$$= \iint_{\mathcal{R}_D} s(x,t)dxdt$$

Obteniendo

$$2au(x_i,t_i) - \int_{x_i-at_i}^{x_i+at_i} g(x)dx - a(f(x_i+at_i)+f(x_i-at_i))$$

$$= \iint_{\mathcal{R}_D} s(x,t)dxdt$$

Al despejar $u(x,t)$ obtenemos la solución de D'Alembert adicionada a la solución con término fuente y por el principio de superposición[2] se tiene:

$$u(x_i,t_i) = \frac{f(x_i+at_i)+f(x_i-at_i)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x_i-at_i}^{x_i+at_i} g(x)dx + \frac{1}{2a}\iint_{\mathcal{R}_D} s(x,t)dxdt$$

Por lo que afirmamos que $u(x_i,t_i)$ es la solución de (4.1) para regiones del plano convenientes expresaremos la solución de la siguiente forma:

$$u(x_i,t_i) = \frac{f(x_i+at_i)+f(x_i-at_i)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x_i-at_i}^{x_i+at_i} g(x)dx + \frac{1}{4a}\int_0^{t_i}\int_{x_i-at_i}^{x_i+at_i} s(x,t)dxdt$$

**5. Resultados obtenidos.** Para ambos casos, la función término fuente estará dada por $s(x,t) = xt$, considerando $a = 1$.

I) Sea $g(x) = 0$ y $f(x) = x^2$, obteniendo como solución

$$\begin{aligned} u(x,t) =& \frac{f(x-t)+f(x+t)}{2} + \frac{1}{4}\int_0^t\int_{x-t}^{x+t}(pq)dpdq \\ u(x,t) =& \frac{(x-t)^2+(x+t)^2}{2} + \frac{1}{6}xt^3 \\ u(x,t) =& x^2+t^2+\frac{1}{6}xt^3 \end{aligned}$$

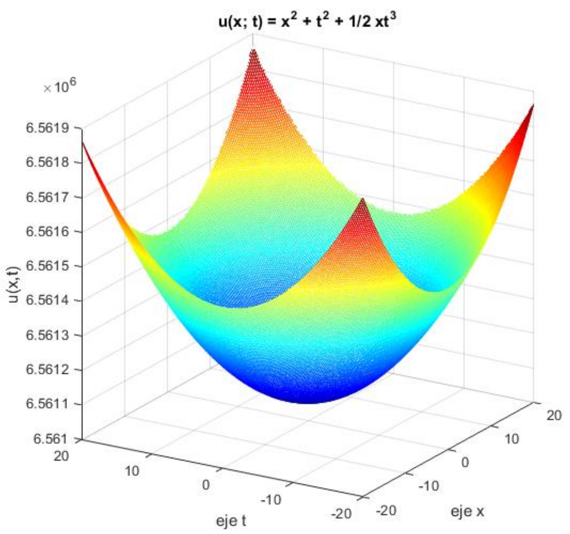


**Figura 1.** u(x,t) para $x \in [-20, 20]$ y $t \in [-20, 20]$

[2]El principio de superposición enuncia que para el conjunto de soluciones de una EDPL, la suma de estas soluciones es también una solución de la EDPL, debido a la linealidad de la ecuación.

II) Sea $g(x) = -sen(x)$ y $f(x) = 0$, obteniendo como solución

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = & \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(\eta)d\eta + \\
& \frac{1}{4a}\int_0^t \int_{x-at}^{x+at} s(\xi,\tau)d\xi d\tau \\
u(x,t) = & \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} -sen(\eta)d\eta + \\
& \frac{1}{4}\int_0^t \int_{x-t}^{x+t} \xi\tau d\xi d\tau \\
u(x,t) = & \frac{1}{2}[cos(x+t) - cos(x-t)] + \frac{1}{6}xt^3
\end{aligned}
$$

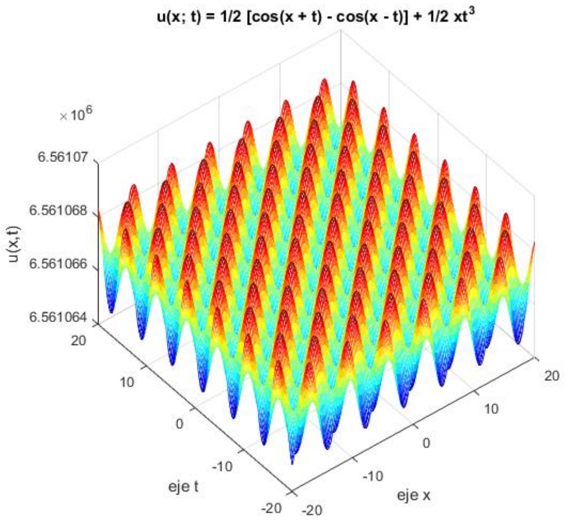


**Figura 2.** u(x,t) para $x \in [-20, 20]$ y $t \in [-20, 20]$

III) Sea $g(x) = cos(x)$ y $f(x) = sen(x)$, obteniendo como solución

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = & \frac{f(x+at)+f(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(\eta)d\eta + \\
& \frac{1}{4a}\int_0^t \int_{x-at}^{x+at} s(\xi,\tau)d\xi d\tau \\
u(x,t) = & \frac{sen(x+t)+sen(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} cos(\eta)d\eta + \\
& \frac{1}{4}\int_0^t \int_{x-t}^{x+t} \xi\tau d\xi d\tau \\
u(x,t) = & \frac{sen(x+t)+sen(x-t)}{2} + \\
& \frac{1}{2}[sen(x+t) - sen(x-t)] + \frac{1}{6}xt^3
\end{aligned}
$$

$$
u(x,t) = sen(x+t) + \frac{1}{6}xt^3
$$

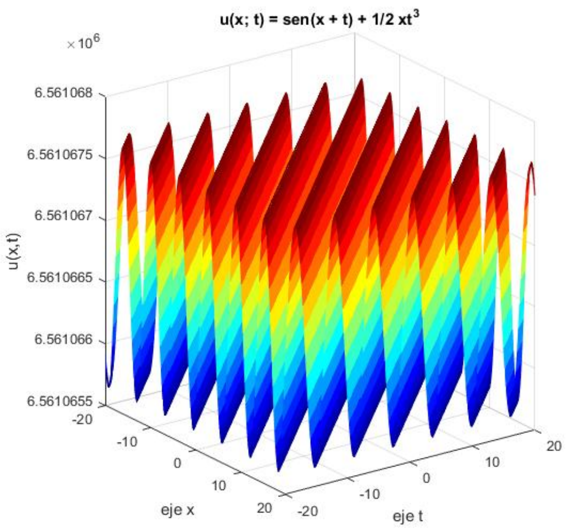


**Figura 3.** u(x,t) para $x \in [-20, 20]$ y $t \in [-20, 20]$

## 6. Conclusiones.

1. Usualmente la Fórmula de D'Alembert se aplica a problemas de EDPL del tipo Hiperbólico homogéneo, en este trabajo se ha contribuido con la técnica combinada D'Alembert - Green en la resolución de EDPL del tipo Hiperbólico no homogéneo, como una técnica alternativa de aplicación de la Fórmula de D'Alembert y el Teorema de Green.
2. Dentro de los resultados se presentan tres casos como se puede observar en la Figura 1,2 y 3 con condiciones mixtas, donde se consideran las condiciones iniciales de manera alternada; es decir, cuando se conoce el valor de la función $u$ en $t = 0$ y la variación de ésta respecto a $t$ en $t = 0$.
3. La ventaja de usar esta técnica en la resolución de problemas tipo onda asociados a fuerzas externas es que llegamos a determinar la solución del problema en forma explícita.
4. Así mismo con esta técnica solo se requiere que el problema esté definido en base a las condiciones iniciales, sin embargo también se puede aplicar a problemas del tipo onda que tienen ambas condiciones iniciales y de contorno.
5. En el caso del problema no homogéneo respecto a las condiciones y/o al término fuente usar esta técnica es más eficiente respecto a otras como el caso de métodos de separación de variables que solamente sirve para el caso homogéneo y si se desea aplicar éste último al caso no homogéneo habría que plantear un nuevo problema cuya solución sea la suma del problema homogéneo y una supuesta conocida como solución particular, que satisfaga dicho problema, lo cual hace más compleja el proceso de resolución.

**Agradecimientos.** Este trabajo fue desarrollado en el Laboratorio de Simulación e Investigación Numérica, LABOSIN-FC-UNI y fue expuesto en el CIMAC 2016, patrocinado por la SPMAC-PERÚ y la Facultad de Ciencias. Agradecemos por el apoyo brindado para la presentación de este trabajo al Dr. Juan Rodríguez, Director del IGI-UNI y al Dr. Obidio Rubio, Presidente del SPMAC.

Referencias

[1] SIXTO ROMERO, FRANCISCO J. MORENO, ISABEL M. RODRÍGUEZ, *Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales.* Servicio de Publicaciones, Universidad de Huelva, 2001. Printed in Spain.
[2] ANDREI D. POLYANIN, *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists.* Chapman & Hall/CRC, 2002.
[3] TIJONOV A., SAMARSKY A., *Ecuaciones de la Física Matemática.* Editorial MIR, Primera Edición. Moscú 1972.
[4] RAFAEL IÓRIO JÚNIOR - VALÉRIA DE MAGALH$\tilde{A}$ES IÓRIO, *Ecuacões Diferenciais Parciais: Uma Introducão.* Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1988.
[5] LAWRENCE C. EVANS, *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society. Providence, Rhode Island, 1997.