



SUPERFICIES ARMÓNICAS DE TIPO GRÁFICO EN \mathbb{R}^3

HARMONICS SURFACES OF GRAPHIC TYPE IN \mathbb{R}^3

CARLOS M. C. RIVEROS*, ARMANDO M. V. CORRO**, AND SARAH O. BARBOSA***

Received, Jan. 15, 2016

Accepted, May. 15, 2016.

Resumen

En este trabajo estudiamos superficies armónicas inmersas en \mathbb{R}^3 . Definimos las superficies armónicas de tipo gráfico y mostramos que una superficie armónica de tipo gráfico es mínima si y solamente si es parte de un plano o de un helicoides. También, damos una caracterización de las superficies armónicas de tipo gráfico parametrizadas por líneas asintóticas y presentamos algunos ejemplos.

Palabras clave. superficies mínimas, funciones holomorfas, helicoides.

Abstract

In this research we study harmonic surfaces immersed in \mathbb{R}^3 . We defined Harmonic surfaces of graphic type and showed that a harmonious surface graphic type is minimal if and only if it is part of a plane or a helix. Also, we give a characterization of harmonic surfaces graphic type parameterized by asymptotic lines and some examples.

Keywords. minimal surfaces, holomorphic functions, helicoides.

1. Introducción . En el estudio de las superficies mínimas, cuando la superficie es parametrizada por parámetros isotérmicos la parametrización es armónica. Por tanto, sería interesante estudiar superficies en el espacio euclidiano que satisfacen condiciones necesarias y suficientes para obtener inmersiones armónicas. Sabemos que inmersiones armónicas tienen como caso particular las superficies mínimas. El estudio de las superficies mínimas ya fue muy explorado por diversos autores ver por ejemplo [2], [5]. En [1], fue estudiada una clase de superficies armónicamente inmersas en \mathbb{R}^3 . Por lo tanto sería interesante generalizar algunas propiedades geométricas de las superficies mínimas. Existe una relación entre las aplicaciones holomorfas y las aplicaciones armónicas, por consiguiente, podemos representar las superficies armónicas usando funciones holomorfas.

En este trabajo estudiamos superficies armónicas inmersas en \mathbb{R}^3 . Definimos las superficies armónicas de tipo gráfico, mostramos que una superficie armónica de tipo gráfico es mínima si y solamente si es parte de un plano o de un helicoides. En [3]- [4], fueron estudiadas una clase de superficies con ángulo de Chebyshev constante parametrizadas por líneas asintóticas. En este trabajo obtenemos una caracterización de las superficies armónicas de tipo gráfico parametrizadas por líneas asintóticas y presentamos algunos ejemplos.

1.1. Preliminares. En esta sección, fijamos algunas notaciones sobre algunos conceptos de geometría diferencial clásica local de superficies. Sea M una superficie en \mathbb{R}^3 y consideremos $X(x, y)$ una parametrización local de M definida en el plano (x, y) y N el campo vectorial normal unitario sobre M dado por

$$N = \frac{X_{,x} \wedge X_{,y}}{|X_{,x} \wedge X_{,y}|}, \quad X_{,x} = \frac{\partial X}{\partial x}, \quad X_{,y} = \frac{\partial X}{\partial y},$$

*Departamento de Matemática da Universidade de Brasília (carlos@mat.unb.br).

**Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás(avcorro@gmail.com).

***Centro Universitário Uni-Anhanguera, Goiânia, GO, Brazil. (sarahobmat@gmail.com).

donde \wedge es el producto vectorial de \mathbb{R}^3 . En cada plano tangente, la métrica inducida \langle, \rangle determina la primera forma fundamental

$$I = \langle dX, dX \rangle = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2,$$

con coeficientes diferenciables

$$E = \langle X_{,x}, X_{,x} \rangle, \quad F = \langle X_{,x}, X_{,y} \rangle, \quad G = \langle X_{,y}, X_{,y} \rangle.$$

La segunda forma fundamental es dada por

$$II = -\langle dN, dX \rangle = e dx^2 + 2f dx dy + g dy^2,$$

con coeficientes diferenciables

$$e = \langle N, X_{,xx} \rangle, \quad f = \langle N, X_{,xy} \rangle, \quad g = \langle N, X_{,yy} \rangle.$$

Con esta parametrización X , la *curvatura media* H y la *curvatura Gaussiana* K son dadas por

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}, \quad K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

DEFINICIÓN 1. Sea $X(x, y) = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \varphi_3(x, y))$ una parametrización de la superficie M en \mathbb{R}^3 . La superficie M es *armónica* si $\Delta\varphi_i = 0$, para $i = 1, 2, 3$.

En lo que sigue de este trabajo, el producto interno será definido por $\langle, \rangle : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, $\langle f, g \rangle = f_1 g_1 + f_2 g_2$, donde $f = f_1 + i f_2$ y $g = g_1 + i g_2$ son funciones holomorfas. En los cálculos usaremos las siguientes propiedades: Si $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$ son funciones holomorfas entonces

$$(1.1) \quad \langle f, g \rangle_{,x} = \langle f', g \rangle + \langle f, g' \rangle,$$

$$(1.2) \quad \langle f, g \rangle_{,y} = \langle i f', g \rangle + \langle f, i g' \rangle,$$

$$(1.3) \quad f = \langle 1, f \rangle + i \langle i, f \rangle,$$

$$(1.4) \quad \langle f, gh \rangle = \langle f \bar{g}, h \rangle,$$

$$(1.5) \quad f = \langle 1, f \rangle - i \langle 1, i f \rangle,$$

$$(1.6) \quad \bar{f} = \langle 1, f \rangle - i \langle i, f \rangle = \langle 1, f \rangle + i \langle 1, i f \rangle,$$

$$(1.7) \quad \langle 1, f \rangle \langle i, f \rangle = \frac{1}{2} \langle i, f^2 \rangle.$$

2. Principales resultados.

Presentamos los principales resultados de este trabajo.

TEOREMA 1. Sea M una superficie armónica definida en un conjunto abierto y simplemente conexo $U \subset \mathbb{C}$. Entonces M es localmente parametrizada por

$$(2.1) \quad X(x, y) = (\langle 1, f_1(x, y) \rangle, \langle 1, f_2(x, y) \rangle, \langle 1, f_3(x, y) \rangle).$$

Además, los coeficientes de la primera forma fundamental son dados por

$$(2.2) \quad \begin{aligned} E &= \langle 1, f_1' \rangle^2 + \langle 1, f_2' \rangle^2 + \langle 1, f_3' \rangle^2, \\ F &= \langle 1, f_1' \rangle \langle 1, i f_1' \rangle + \langle 1, f_2' \rangle \langle 1, i f_2' \rangle + \langle 1, f_3' \rangle \langle 1, i f_3' \rangle, \\ G &= \langle 1, i f_1' \rangle^2 + \langle 1, i f_2' \rangle^2 + \langle 1, i f_3' \rangle^2, \end{aligned}$$

la aplicación de Gauss es dada por

$$(2.3) \quad N = \frac{(\langle f_2', i f_3' \rangle, \langle f_3', i f_1' \rangle, \langle f_1', i f_2' \rangle)}{\|(\langle f_2', i f_3' \rangle, \langle f_3', i f_1' \rangle, \langle f_1', i f_2' \rangle)\|},$$

y los coeficientes de la segunda forma fundamental son dados por

$$(2.4) \quad \begin{aligned} e &= \frac{\langle f_2', i f_3' \rangle \langle 1, f_1'' \rangle + \langle f_3', i f_1' \rangle \langle 1, f_2'' \rangle + \langle f_1', i f_2' \rangle \langle 1, f_3'' \rangle}{\|(\langle f_2', i f_3' \rangle, \langle f_3', i f_1' \rangle, \langle f_1', i f_2' \rangle)\|}, \\ f &= \frac{\langle f_2', i f_3' \rangle \langle 1, i f_1'' \rangle + \langle f_3', i f_1' \rangle \langle 1, i f_2'' \rangle + \langle f_1', i f_2' \rangle \langle 1, i f_3'' \rangle}{\|(\langle f_2', i f_3' \rangle, \langle f_3', i f_1' \rangle, \langle f_1', i f_2' \rangle)\|}, \\ g &= - \left(\frac{\langle f_2', i f_3' \rangle \langle 1, f_1'' \rangle + \langle f_3', i f_1' \rangle \langle 1, f_2'' \rangle + \langle f_1', i f_2' \rangle \langle 1, f_3'' \rangle}{\|(\langle f_2', i f_3' \rangle, \langle f_3', i f_1' \rangle, \langle f_1', i f_2' \rangle)\|} \right). \end{aligned}$$

Prueba

Considerando M parametrizada por $X(x, y) = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \varphi_3(x, y))$. Como $\varphi_k(x, y)$, $k = 1, 2, 3$, es armónica, cada función es la parte real de una función holomorfa. Sea f_k , $k = 1, 2, 3$, la función holomorfa cuya parte real es φ_k . De (1.3), obtenemos

$$X(x, y) = (\langle 1, f_1(x, y) \rangle, \langle 1, f_2(x, y) \rangle, \langle 1, f_3(x, y) \rangle).$$

Ahora calcularemos los coeficientes de la primera forma fundamental de X , de (1.1) y (1.2) obtenemos que

$$(2.5) \quad X_x = (\langle 1, f'_1 \rangle, \langle 1, f'_2 \rangle, \langle 1, f'_3 \rangle),$$

$$(2.6) \quad X_y = (\langle 1, if'_1 \rangle, \langle 1, if'_2 \rangle, \langle 1, if'_3 \rangle).$$

Las ecuaciones de (2.2) siguen como consecuencia de las ecuaciones (2.5) y (2.6). De (2.5) y (2.6) obtenemos

$$(2.7) \quad X_x \wedge X_y = (\langle 1, f'_2 \rangle \langle 1, if'_3 \rangle - \langle 1, if'_2 \rangle \langle 1, f'_3 \rangle, \langle 1, f'_3 \rangle \langle 1, if'_1 \rangle - \langle 1, if'_3 \rangle \langle 1, f'_1 \rangle, \langle 1, f'_1 \rangle \langle 1, if'_2 \rangle - \langle 1, if'_1 \rangle \langle 1, f'_2 \rangle).$$

Observamos que, de (1.5) sigue que

$$\begin{aligned} \langle 1, f'_2 \rangle \langle 1, if'_3 \rangle - \langle 1, if'_2 \rangle \langle 1, f'_3 \rangle &= \langle \langle 1, f'_2 \rangle - i \langle 1, if'_2 \rangle, \langle 1, if'_3 \rangle + i \langle 1, f'_3 \rangle \rangle \\ &= \langle \langle 1, f'_2 \rangle - i \langle 1, if'_2 \rangle, i (\langle 1, f'_3 \rangle - i \langle 1, if'_3 \rangle) \rangle \\ &= \langle f'_2, if'_3 \rangle. \end{aligned}$$

De forma semejante para la segunda y tercera coordenada de (2.7). De esto sigue que

$$(2.8) \quad X_x \wedge X_y = (\langle f'_2, if'_3 \rangle, \langle f'_3, if'_1 \rangle, \langle f'_1, if'_2 \rangle).$$

La ecuación (2.3) sigue de (2.8). También, de (2.5) y (2.6), obtenemos

$$(2.9) \quad \begin{aligned} X_{xx} &= (\langle 1, f''_1 \rangle, \langle 1, f''_2 \rangle, \langle 1, f''_3 \rangle) \\ X_{xy} &= (\langle 1, if''_1 \rangle, \langle 1, if''_2 \rangle, \langle 1, if''_3 \rangle) \\ X_{yy} &= -(\langle 1, f''_1 \rangle, \langle 1, f''_2 \rangle, \langle 1, f''_3 \rangle). \end{aligned}$$

Las ecuaciones (2.4) es una consecuencia de las ecuaciones (2.3) y (2.9). Esto concluye la prueba del Teorema. \square

COROLARIO 1. *Si M es una superficie armónica definida en un conjunto abierto y simplemente conexo $U \subset \mathbb{C}$. Entonces*

$$(f'_1)^2 + (f'_2)^2 + (f'_3)^2 = E - G - 2iF,$$

donde E , F y G son los coeficientes de la primera forma fundamental de X y f_1, f_2, f_3 son las funciones definidas en el Teorema 1.

Prueba

Del Teorema (1), X es localmente parametrizada por

$$X(x, y) = (\langle 1, f_1(x, y) \rangle, \langle 1, f_2(x, y) \rangle, \langle 1, f_3(x, y) \rangle).$$

De (1.5), obtenemos que

$$f'_k = \langle 1, f'_k \rangle - i \langle 1, if'_k \rangle, \quad k = 1, 2, 3.$$

Sigue de esto que

$$\sum_{k=1}^3 (f'_k)^2 = \sum_{k=1}^3 (\langle 1, f'_k \rangle - i \langle 1, if'_k \rangle)^2 = E - G - 2iF,$$

lo cual concluye la prueba. \square

PROPOSICIÓN 1. Si M es una superficie armónica definida en un conjunto abierto y simplemente conexo $U \subset \mathbb{C}$. Entonces la curvatura media H y la curvatura Gaussiana son dadas por

$$(2.10) \quad H = -\frac{\langle (f'_1)^2 + (f'_2)^2 + (f'_3)^2, \langle f'_2, if'_3 \rangle f''_1 + \langle f'_3, if'_1 \rangle f''_2 + \langle f'_1, if'_2 \rangle f''_3 \rangle}{2\|v\|^3},$$

$$(2.11) \quad K = -\frac{1}{\|v\|^4} \|\langle f'_2, if'_3 \rangle f''_1 + \langle f'_3, if'_1 \rangle f''_2 + \langle f'_1, if'_2 \rangle f''_3\|^2,$$

donde $v = (\langle f'_2, if'_3 \rangle, \langle f'_3, if'_1 \rangle, \langle f'_1, if'_2 \rangle)$.

Prueba

Del Teorema (1), tenemos que $g = -e$ y $\|v\|^2 = EG - F^2$, de estas expresiones y de la fórmula de la curvatura media obtenemos

$$H = \frac{e(G - E) - 2fF}{2\|v\|^2} = -\frac{\langle E - G - 2iF, e - if \rangle}{2\|v\|^2}$$

Del Corolário (1), obtenemos que

$$(2.12) \quad H = -\frac{\langle (f'_1)^2 + (f'_2)^2 + (f'_3)^2, e - if \rangle}{2\|v\|^2}$$

Por otro lado, de (2.4), tenemos

$$(2.13) \quad e - if = \frac{1}{\|v\|} [\langle f'_2, if'_3 \rangle (\langle 1, f''_1 \rangle - i\langle 1, if''_1 \rangle) + \langle f'_3, if'_1 \rangle (\langle 1, f''_2 \rangle - i\langle 1, if''_2 \rangle) + \langle f'_1, if'_2 \rangle (\langle 1, f''_3 \rangle - i\langle 1, if''_3 \rangle)],$$

Usando (1.5) en (2.13), tenemos

$$(2.14) \quad e - if = \frac{1}{\|v\|} [\langle f'_2, if'_3 \rangle f''_1 + \langle f'_3, if'_1 \rangle f''_2 + \langle f'_1, if'_2 \rangle f''_3],$$

Sustituyendo (2.14) en (2.12) obtenemos (2.10). Además, la curvatura Gaussiana es dada por

$$(2.15) \quad K = -\frac{e^2 + f^2}{\|v\|^2}.$$

De (2.14) sigue que,

$$(2.16) \quad e^2 + f^2 = \|e - if\|^2 = \frac{1}{\|v\|^2} \|\langle f'_2, if'_3 \rangle f''_1 + \langle f'_3, if'_1 \rangle f''_2 + \langle f'_1, if'_2 \rangle f''_3\|^2.$$

Sustituyendo (2.16) en (2.15) obtenemos la ecuación (2.11). \square

PROPOSICIÓN 2. Si M es una superficie armónica con parámetros isotérmicos definidos en un conjunto abierto y simplemente conexo $U \subset \mathbb{C}$. Entonces M es una superficie mínima.

Prueba

Del Teorema (1) y el Corolário (1) tenemos que

$$(f'_1)^2 + (f'_2)^2 + (f'_3)^2 = E - G - 2iF.$$

Como M tiene parámetros isotérmicos i.e. $E = G$, $F = 0$, sigue que

$$(f'_1)^2 + (f'_2)^2 + (f'_3)^2 = 0.$$

De esto y (2.10) concluimos que $H = 0$ y consecuentemente M es una superficie mínima.

TEOREMA 2. $X : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una superficie armónica si y solamente si $\Omega = E - G - 2iF$ es una función holomorfa cuando $e + g = 0$, donde E, F, G, e, g son los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental de X respectivamente.

Prueba

Del Teorema (1), X es localmente parametrizada por la expresión (2.1), los coeficientes de la primera forma fundamental son dados por (2.2) y $e + g = 0$. Resta mostrar que Ω es holomorfa.

Observe que Ω es holomorfa si y solamente si $(E - G - 2iF)_{,\bar{z}} = 0$, donde $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$. De (2.2), es fácil mostrar que $(E - G)_x = -2F_y$ y $(E - G)_y = 2F_x$. De esto, sigue que Ω es holomorfa.

Recíprocamente, mostraremos que X es una superficie armónica. Como Ω es holomorfa tenemos que $(E - G)_x = -2F_y$ y $(E - G)_y = 2F_x$. De estas igualdades obtenemos,

$$\langle \Delta X, X_{,x} \rangle = 0, \quad \langle \Delta X, X_{,y} \rangle = 0.$$

Como $e + g = 0$, sigue que

$$\langle \Delta X, N \rangle = 0.$$

Por tanto, $\Delta X = 0$, i.e. cada función coordenada es armónica, consecuentemente X es una superficie armónica. \square

PROPOSICIÓN 3. *Si $X : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una superficie armónica. Entonces*

(i) $K \leq 0$,

(ii) Si $K = 0$ Entonces $H = 0$.

Prueba

(i) Es una consecuencia de (2.11).

(ii) Si $K = 0$, de (2.11) tenemos

$$\langle f'_2, i f'_3 \rangle f''_1 + \langle f'_3, i f'_1 \rangle f''_2 + \langle f'_1, i f'_2 \rangle f''_3 = 0.$$

Usando esta expresión en (2.10) obtenemos $H = 0$. Esto concluye la demostración. \square

DEFINICIÓN 2. Sea M una superficie armónica definida en un conjunto abierto y simplemente conexo $U \subset \mathbb{C}$, localmente parametrizada por $X(x, y) = (\langle 1, f_1(x, y) \rangle, \langle 1, f_2(x, y) \rangle, \langle 1, f_3(x, y) \rangle)$. Si $f_2 = -i f_1$ entonces $X(x, y) = (f_1(x, y), \langle 1, f_3(x, y) \rangle)$ y la superficie M es llamada *superficie armónica de tipo gráfico*.

PROPOSICIÓN 4. *Si M es una superficie armónica de tipo gráfico localmente parametrizada por $X(x, y) = (f_1(x, y), \langle 1, f_3(x, y) \rangle)$. Entonces la curvatura media H y la curvatura Gaussiana K son dadas por*

$$(2.17) \quad H = - \frac{\langle (f'_3)^2, \|f'_1\|^2 f''_3 - \overline{f'_1} f''_1 f'_3 \rangle}{2 \left(\|f'_1\| \sqrt{\|f'_1\|^2 + \|f'_3\|^2} \right)^3},$$

$$(2.18) \quad K = - \frac{\left\| \|f'_1\|^2 f''_3 - \overline{f'_1} f''_1 f'_3 \right\|^2}{\left(\|f'_1\| \sqrt{\|f'_1\|^2 + \|f'_3\|^2} \right)^4}.$$

Prueba

De (1.4), (1.5), (2.2), (2.3) y (2.4) obtenemos que los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental y el campo vectorial normal de X son dados por

$$(2.19) \quad \begin{aligned} E &= \|f'_1\|^2 + \langle 1, f'_3 \rangle^2, \\ F &= -\frac{1}{2} \langle i, (f'_3)^2 \rangle, \\ G &= \|f'_1\|^2 + \langle 1, i f'_3 \rangle^2, \end{aligned}$$

$$(2.20) \quad \begin{aligned} e &= \frac{-\langle f'_1, f''_1 f'_3 \rangle + \|f'_1\|^2 \langle 1, f''_3 \rangle}{\|f'_1\| \sqrt{\|f'_1\|^2 + \|f'_3\|^2}}, \\ f &= \frac{-\langle f'_1 f''_1, i f'_3 \rangle + \|f'_1\|^2 \langle 1, i f''_3 \rangle}{\|f'_1\| \sqrt{\|f'_3\|^2 + \|f'_1\|^2}}, \\ g &= - \left(\frac{-\langle f'_1, f''_1 f'_3 \rangle + \|f'_1\|^2 \langle 1, f''_3 \rangle}{\|f'_1\| \sqrt{\|f'_1\|^2 + \|f'_3\|^2}} \right), \\ N &= \frac{\left(-f'_1 \overline{f'_3}, \|f'_1\|^2 \right)}{\|f'_1\| \sqrt{\|f'_1\|^2 + \|f'_3\|^2}}. \end{aligned}$$

Sustituyendo (2.19) y (2.20) en la fórmula de H y K , obtenemos (2.17) y (2.18). \square

PROPOSICIÓN 5. *Sea M una superficie armónica de tipo gráfico. M es una superficie mínima si y solamente si M es una parte de un plano o de un helicoides.*

Prueba

Si M es una superficie mínima, de (2.17) tenemos

$$(2.21) \quad \langle (f_3')^2, \|f_1'\|^2 f_3'' - \overline{f_1'} f_1'' f_3' \rangle = 0.$$

Esta expresión es equivalente a

$$(2.22) \quad \langle (f_3')^2, f_3'' - \frac{f_1''}{f_1'} f_3' \rangle = 0.$$

Así, de (2.22) obtenemos

$$(2.23) \quad f_3'' - \frac{f_1''}{f_1'} f_3' = ki(f_3')^2.$$

Si $f_3' = 0$ entonces M es parte de un plano.

Suponiendo $f_3' \neq 0$, tenemos que

$$\frac{f_3''}{f_3'} - \frac{f_1''}{f_1'} = ki f_3'.$$

Integrando,

$$(2.24) \quad f_1(z) = \frac{i}{k} e^{-kif_3(z)-z_1} + z_2, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad k \neq 0.$$

Si $f_3(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, la parametrización local de M es dada por

$$X(x, y) = \left(c + \frac{e^{-a+kv(x,y)} \sin(b + ku(x, y))}{k}, d + \frac{e^{-a+kv(x,y)} \cos(b + ku(x, y))}{k}, u(x, y) \right),$$

donde $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$. La cual es una parametrización de un helicoides a menos de translaciones y dilataciones. \square

El próximo resultado caracteriza las superficies armónicas de tipo gráfico parametrizadas por líneas asintóticas.

PROPOSICIÓN 6. *Sea M una superficie armónica de tipo gráfico parametrizada localmente por $X(x, y) = (f_1(x, y), < 1, f_3(x, y) >)$. M es parametrizada por líneas asintóticas si y solamente si las funciones holomorfas f_1 y f_3 satisfacen*

$$(2.25) \quad f_3(z) = f_1(z) \left[ki \int \frac{1}{f_1'(z)} dz + z_0 \right] - ki \int \frac{f_1(z)}{f_1'(z)} dz + z_1,$$

$z_0, z_1 \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{R}$.

Prueba

M es parametrizada por líneas asintóticas si y solamente si los coeficientes de la segunda forma fundamental e y g son idénticamente nulos. De (2.19) y (2.20) esto es equivalente a

$$-\langle f_1', f_1'' f_3' \rangle + \|f_1'\|^2 \langle 1, f_3'' \rangle = 0$$

Usando (1.4) tenemos $\langle f_1', -f_1'' f_3' + f_1' f_3'' \rangle = 0$, el cual es equivalente a $f_1' f_3'' - f_1'' f_3' = ki f_1'$, la solución de esta ecuación es dada por (2.25) y la demostración está completa. \square

Algunos gráficos de superficies armónicas de tipo gráfico

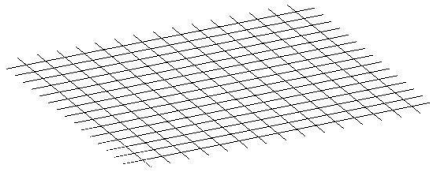


FIGURA 2.1. $f_1(z) = z$, $f_3(z) = cz + z_0$

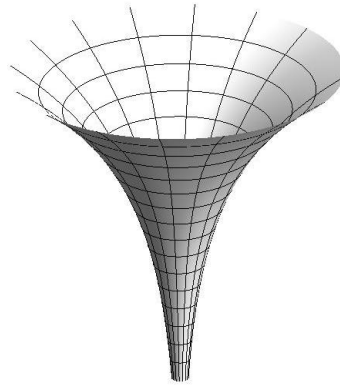


FIGURA 2.2. $f_1(z) = e^z$, $f_3(z) = cz + z_0$

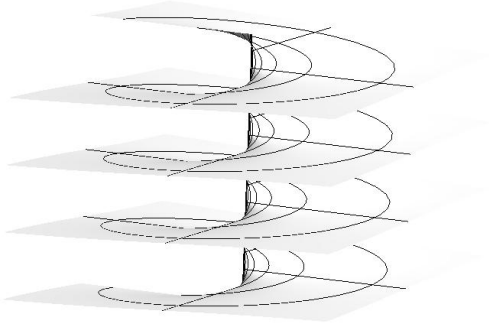


FIGURA 2.3. $f_1(z) = e^z$, $f_3(z) = icz + z_0$

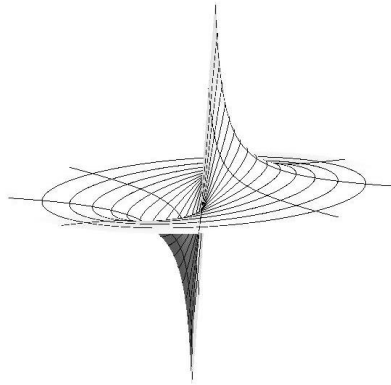


FIGURA 2.4. $f_1(z) = \sinh z$, $f_3(z) = \cosh z$

Referencias

- [1] T. KLOTZ, *Surfaces Harmonically Immersed in E^3* . Pacific Journal of Mathematics, **21**(1): (1967),79–87.
- [2] R. OSSERMAN, *A Survey of Minimal*, Vol. 1 (Cambridge University Press, New York, (1989).
- [3] C. M. C. RIVEROS AND A. M. V. CORRO, *Surfaces with constant Chebyshev angle*, 35(2) (2012), 359-366.
- [4] C. M. C. RIVEROS AND A. M. V. CORRO, *Surfaces with constant Chebyshev Angle II*, Tokyo J. Math., **36**(2), (2013), 379-386.
- [5] C. M. C. RIVEROS AND A. M. V. CORRO, *A Characterization of the Catenoid and Helicoid*, 24(6) (2013), 1350045 (11 pages).