STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2018, nr.2(112)
Seria "Științe exacte și economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.19-25

CZU: 512:519.6

DESPRE STABILITATEA ÎN SENS LYAPUNOV A PUNCTELOR STAȚIONARE ÎN PROBLEMA MĂRGINITĂ A OPT CORPURI

Elena CEBOTARU

Universitatea Tehnică a Moldovei

Se consideră problema newtoniană mărginită a opt corpuri. Se studiază condițiile de existență a configurației problemei și se determină soluțiile staționare (pozițiile de echilibru) în problema mărginită de opt corpuri cu simetrie incompletă. Se cercetează stabilitatea în sens Lyapunov a punctelor staționare stabile în prima aproximație.

Cuvinte-cheie: *problema newtoniană, configurație, soluții particulare, puncte de echilibru, ecuații diferențiale de mișcare.*

ABOUT LYAPUNOV STABILITY OF STATIONARY POINTS IN THE RESTRICTED PROBLEM OF EIGHT BODIES

The Newtonian restricted problem of 8-bodies is considered. The conditions of existence of the configuration are studied and the stationary solutions (equilibrium positions) in the restricted problem by eight bodies with incomplete symmetry is determined in this paper. We investigate Lyapunov stability of stable stationary points in the first approximation.

Keywords: *Newtonian problem, configuration, particular solutions, equilibrium points, differential equations of motion.*

Introducere

Este cunoscut faptul că problema newtoniană a n-corpuri nu este rezolvabilă în caz general și că au fost depuse numeroase încercări pentru a găsi soluțiile ei particulare exacte. Specialiștii în dinanica cosmică cunosc foarte bine lucrarea lui A.Wintner [1], în care el a introdus o clasă specială de astfel de soluții, și anume – soluțiile homografice și a formulat condiții suficiente de existență a lor. Deoarece aceaste condiții se reduc la cerința că corpurile trebuie să formeze o configurație centrală pentru orice moment de timp, acestea au devenit subiectul multor lucrări. Trebuie remarcat faptul că, din punct de vedere istoric, problema configurațiilor centrale a fost formulată mai întâi de Laplace.

În ultimii ani au fost dezvoltate noile tehnologii computerizate moderne. Apariția, de exemplu, a sistemului de calcul algebric Mathematica, care este un instrument foarte puternic pentru a face atât calculele simbolice, cât și numerice, a oferit posibilitatea de a aborda altfel problema configurațiilor centrale. Menționăm că în multe cazuri s-a dovedit a fi posibil să se construiască nu doar soluții aproximative, ci și soluții exacte ale ecuațiilor diferențiale de mișcare.

De asemenea, trebuie subliniat faptul că orice problemă mărginită a n-corpuri este o problemă tipic hamiltoniană. Problema stabilității soluțiilor sale staționare în sens Lyapunov poate fi rezolvată doar în cadrul teoriei KAM (teoria soluțiilor condițional-periodice ale lui A.N. Kolmogorov, V.I. Arnold, J.Moser).

În această lucrare se cercetează problema stabilităţii în sens Lyapunov a unei noi clase de soluţii exacte ale problemei newtoniene mărginite şi plane a 8-corpuri cu simetrie incompletă.

Descrierea configurației

Fie că în spaţiul neinerţial de coordonate P_0xyz are loc mişcarea a opt corpuri $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P$, fiecare având, respectiv, masele m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, μ ce se atrag reciproc în corespundere cu legea atracţiei universale. Se cercetează modelul dinamic plan format dintr-un pătrat, în vârfurile căruia se află corpurile P_1,P_2,P_3,P_4, celelalte două corpuri P_5,P_6, având masele $m_5 = m_6$, se află pe diagonala P_1P_3 a pătratului la distanţe egale de corpul P_0, amplasat în originea de coordonate şi în jurul căruia se roteşte această configuraţie cu o viteză unghiulară constantă ω, determinată din parametrii modelului (Fig.1).

STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2018, nr.2(112)
Seria "Științe exacte și economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.19-25

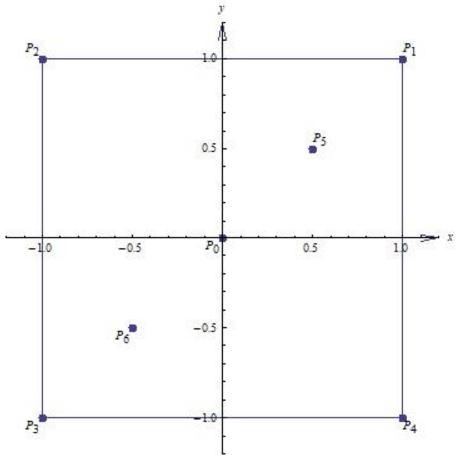

Fig.1 Configurația cercetată.

Se determină că dacă $P_1(1,1)$, $P_2(-1,1)$, $P_3(-1,-1)$, $P_4(1,-1)$, $P_5(\alpha,\alpha)$, $P_6(-\alpha,-\alpha)$, $m_0=1$, $m_5=m_6$, atunci există așa valori ale parametrilor m_1 și α care asigură existența configurației.

Determinarea soluțiilor staționare în problema mărginită

Se studiază mişcarea masei infinit mici μ (aşa-numitul corp ce graviteză pasiv) în câmpul gravitaţional format de cele şapte corpuri $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$, ce se atrag reciproc şi atrag corpul P. Ecuațiile mișcării acestui corp în sistemul cartezian cu rotație P_0xyz în planul $z = 0$ au forma [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}=\omega^2x+2\omega\dfrac{dy}{dt}-\dfrac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}+m_1\left(\dfrac{-1-x}{\left((-1-x)^2+(-1-y)^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{1-x}{\left((1-x)^2+(1-y)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)+ \\ +m_4\left(\dfrac{1-x}{\left((1-x)^2+(-1-y)^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{-1-x}{\left((-1-x)^2+(1-y)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)+ \\ +m_6\left(\dfrac{-\alpha-x}{\left((-\alpha-x)^2+(-\alpha-y)^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{\alpha-x}{\left((\alpha-x)^2+(\alpha-y)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right), \\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=\omega^2y-2\omega\dfrac{dx}{dt}-\dfrac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}+m_1\left(\dfrac{-1-y}{\left((-1-x)^2+(-1-y)^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{1-y}{\left((1-x)^2+(1-y)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)+ \\ +m_4\left(\dfrac{1-y}{\left((1-x)^2+(-1-y)^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{-1-y}{\left((-1-x)^2+(1-y)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)+ \\ +m_6\left(\dfrac{-\alpha-y}{\left((-\alpha-x)^2+(-\alpha-y)^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{\alpha-y}{\left((\alpha-x)^2+(\alpha-y)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right). \end{cases} \tag{1}$$

Determinarea soluțiilor staționare ale sistemului (1) se reduce la rezovarea a două ecuații algebrice irațio-nale în raport cu x,y:

STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2018, nr.2(112)
Seria "Științe exacte și economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.19-25

$$\begin{cases} f(x,y)=\omega^2 x-\dfrac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}+m_1\left(\dfrac{-1-x}{\left((-1-x)^2+(-1-y)^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{1-x}{\left((1-x)^2+(1-y)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)+ \\ +m_4\left(\dfrac{1-x}{\left((1-x)^2+(-1-y)^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{-1-x}{\left((-1-x)^2+(1-y)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)+ \\ +m_6\left(\dfrac{-\alpha-x}{\left((-\alpha-x)^2+(-\alpha-y)^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{\alpha-x}{\left((\alpha-x)^2+(\alpha-y)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)=0; \\ g(x,y)=\omega^2 y-\dfrac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}+m_1\left(\dfrac{-1-y}{\left((-1-x)^2+(-1-y)^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{1-y}{\left((1-x)^2+(1-y)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)+ \\ +m_4\left(\dfrac{1-y}{\left((1-x)^2+(-1-y)^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{-1-y}{\left((-1-x)^2+(1-y)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)+ \\ +m_6\left(\dfrac{-\alpha-y}{\left((-\alpha-x)^2+(-\alpha-y)^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{\alpha-y}{\left((\alpha-x)^2+(\alpha-y)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)=0. \end{cases} \qquad (2)$$

Soluția grafică a sistemului (2) a fost obținută cu ajutorul pachetului grafic al sistemului Mathematica. De exemplu, pentru valorile admisibile ale parametrilor $m_1=0.01,\ \alpha=0.8584,$ aceasta este indicată în Figura 2:

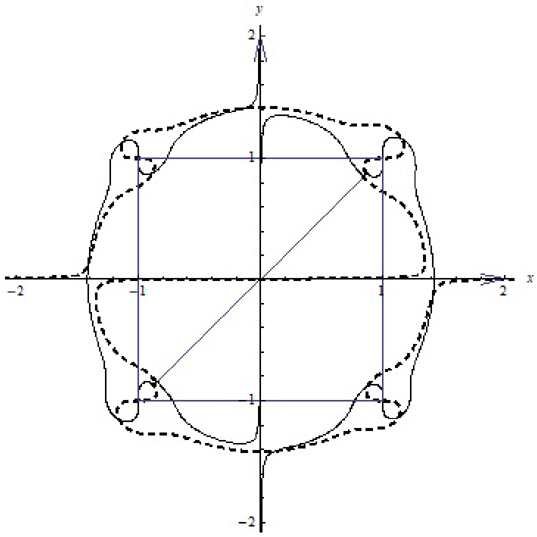

Fig.2. Graficele lui *f* și *g* pentru $m_1=0.01$ și $\alpha=0.8584$.

Punctele ce se află pe dreptele ce trec prin centrul configurației și orice vârf al pătratului au fost numite *poziții radiale de echilibru* (notate pe viitor prin N_i). Celelalte puncte au fost numite *poziții bisectoriale de echilibru* (notate pe viitor prin S_i).

Aplicația FindRoot, care are la bază metoda de iterații a lui Newton, dă posibilitatea de a determina valorile aproximative ale pozițiilor de echilibru cu o exactitate destul de mare:

FindRoot[{f==0,g==0},{x,x₀},{y,y₀}].

Tabelul 1 conţine coordonatele unor puncte staționare calculate pentru careva valori admisibile ale lui m_1 şi α.

Tabelul 1

Coordonatele unor puncte staționare

m_1	α	N_1		S_1	
		x^*	y^*	x^*	y^*
0.01	0.8584	1.15597	1.15597	1.41168	-0.12379
0.01	0.8585	1.15604	1.15604	1.41684	-0.05223
0.1	0.715	1.34188	1.34188	1.34865	-0.45766
0.1	0.717	1.34324	1.34324	1.44139	-0.11335
1	0.48965	1.63351	1.63351	0.93934	-1.05917
10	0.291	1.84521	1.84521	2.19692	-0.00052
100	0.2	1.82945	1.82945	0.82914	-0.02594
1000	0.2	1.81083	1.81083	2.10424	-0.05038

Studierea stabilității în prima aproximație

Pentru studierea stabilităţii punctelor N_i, S_i în baza primei metode a lui A.M. Lyapunov trebuie de efectuat linearizarea sistemului de ecuţii diferenţiale (1) în vecinătatea fiecărui punct staţionar N_i, S_i, transcriind în prealabil ecuaţiile mişcării punctului ce gravitează pasiv în forma normală Cauchy şi de cercetat proprietăţile valorilor proprii (notate $\lambda_i, i=\overline{1,4}.$) ale matricei sistemului linearizat [2,3]. Variind valorile parametrilor m_1 şi α, s-a obținut că există aşa valori ale parametrilor m_1 şi α, pentru care doar punctele staţionare bisectoriale S_i ale problemei mărginite a opt corpuri sunt stabile în prima aproximaţie (Tab.2).

Tabelul 2

Valorile proprii ale matricei sistemului linearizat

m_1	α	N_1		S_1	
		λ_1,λ_2	λ_3,λ_4	λ_1,λ_2	λ_3,λ_4
0.01	0.8583	±1.30918	$\pm1.12374i$	$\pm0.28434i$	$\pm0.51826i$
0.01	0.8584	±1.30792	$\pm1.12295i$	$\pm0.49471i$	$\pm0.32201i$
0.01	0.8585	±1.30666	$\pm1.12216i$	$\pm0.45941i$	$\pm0.36935i$
0.01	0.85853	±1.30627	$\pm1.12197i$	$\pm0.00440+0.36926i$	$\pm0.00440-0.36926i$
0.1	0.715	±1.19131	$\pm1.06789i$	$\pm0.34443+0.53193i$	$\pm0.34443-0.53193i$
0.1	0.717	±1.17894	$\pm1.06051i$	$\pm0.40784+0.56449i$	$\pm0.40784-0.56449i$
1	0.48965	±1.36716	$\pm1.30616i$	$\pm0.74472+0.82809i$	$\pm0.74472-0.82809i$
1	0.505	±1.23329	$\pm1.12811i$	$\pm0.75807+0.83104i$	$\pm0.75807-0.83104i$
10	0.291	±2.50383	$\pm2.63038i$	$\pm1.6617+1.88497i$	$\pm1.6617-1.88497i$
100	0.2	±8.22619	$\pm8.56881i$	±15.3124	$\pm8.390991i$
1000	0.2	±27.1564	$\pm28.0709i$	$\pm17.7615+19.8928i$	$\pm17.7615-19.8928i$

De exemplu, punctul staționar S cu coordonatele $x^*=1.41168, y^*=-0.12379$, determinat pentru $m_1=0.01$ şi $\alpha=0.8584$, este liniar stabil, deoarece valorile proprii ale matricei sistemului linearizat au partea reală nulă: $\pm0.49471i; \pm0.32201i.$

Studierea stabilității în sens Lyapunov

Studierea stabilităţii în sens Lyapunov a punctelor staţionare ale sistemelor hamiltoniene de ordinul patru se poate realiza doar în baza teotemei Arnold-Mozer [2,3]. Pentru aceasta trebuie de trecut la sistemul hamiltonian de ecuații diferențiale cu funcția lui Hamilton:

$$h=\omega\left(yp_x-xp_y\right)+\frac{1}{2}\left(p_x^2+p_y^2\right)-\frac{1}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)}}-m_1\left(\frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}+\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}}\right)-$$
$$-m_4\left(\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}}+\frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}}\right)-m_6\left(\frac{1}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\alpha)^2}}+\frac{1}{\sqrt{(x+\alpha)^2+(y+\alpha)^2}}\right), \tag{3}$$

Studiind stabilitătea în sens Lyapunov a punctelor staţionare (ce au coordonatele fazice $\left(x^*,y^*,p_{x^*}=-\omega y^*,p_{y^*}=\omega x^*\right)$), e necesar de exprimat hamiltonianul h prin coordonatele hamiltoniene locale:

$$\begin{cases} X=x-x^*, \\ Y=y-y^*, \\ P_X=p_x-p_{x^*}, \\ P_Y=p_y-p_{y^*} \end{cases} \tag{4}$$

şi apoi de construit descompunerea sa în serie Taylor în vecinătatea punctului de echilibru $X=Y=P_X=P_Y=0$.

În noile coordonate fazice $\{X,Y,P_X,P_Y\}$ hamiltonianul se exprimă prin formula:

$$H=\omega\left(\left(Y+y^*\right)\left(P_X+p_{x^*}\right)-\left(X+x^*\right)\left(P_Y+p_{y^*}\right)\right)+\frac{1}{2}\left(\left(P_X+p_{x^*}\right)^2+\left(P_Y+p_{y^*}\right)^2\right)-$$
$$-\frac{1}{\sqrt{\left(\left(X+x^*\right)^2+\left(Y+y^*\right)^2\right)}}-$$
$$-m_1\left(\frac{1}{\sqrt{\left(X+x^*-1\right)^2+\left(Y+y^*-1\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{\left(X+x^*+1\right)^2+\left(Y+y^*+1\right)^2}}\right)-$$
$$-m_4\left(\frac{1}{\sqrt{\left(X+x^*+1\right)^2+\left(Y+y^*-1\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{\left(X+x^*-1\right)^2+\left(Y+y^*+1\right)^2}}\right)- \tag{5}$$
$$-m_6\left(\frac{1}{\sqrt{\left(X+x^*-\alpha\right)^2+\left(Y+y^*-\alpha\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{\left(X+x^*+\alpha\right)^2+\left(Y+y^*+\alpha\right)^2}}\right).$$

Vom studia, de exemplu, punctul staţionar S cu coordonatele $x^*=1.41168, y^*=-0.12379$, determinat pentru $m_1=0.01$ şi $\alpha=0.8584$. Pentru acest punct de echilibru valorile proprii ale matricei sistemului linearizat sunt numerele $\pm 0.49471i; \pm 0.32201i$, deci este liniar stabil.

Descompunerea într-o vecinătate destul de mică a punctului S în serie de puteri ale hamiltonianului cu exactitatea până la puterea a patra a coordonatelor X,Y şi a impulsurilor P_X, P_Y are forma:

$$H=H_2\left(X,Y,P_X,P_Y\right)+H_3\left(X,Y\right)+H_4\left(X,Y\right)+R_5\left(X,Y\right), \tag{6}$$

unde $H_k,(k=2,3,4)$, sunt egale cu:

$$\begin{aligned} H_2=0.5(&-0.68942X^2+0.32466Y^2+P_X^2+P_Y^2+ \\ &+0.17922XY+1.19431(YP_X-XP_Y)) \end{aligned} \tag{7}$$

$$H_3=0.1667\left(1.4248X^3-0.7599X^2Y-2.007XY^2+0.1931Y^3\right) \tag{8}$$

$$\begin{aligned} H_4=0.041679(&-4.01396X^4+3.7127X^3Y+ \\ &+11.6388X^2Y^2-2.8827XY^3-1.5419Y^4) \end{aligned} \tag{9}$$

Teorema lui Birghoff despre normalizarea hamiltonianului denotă că trebuie de găsit o transformare nedegenerată de forma [2,3]:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ P_X \\ P_Y \end{bmatrix} = B_4 \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}, \tag{10}$$

unde B_4 este o matrice simplectică necunoscută de dimensiunea $4\times 4.$ Stabilim că pentru punctul *S* aşa o matrice simplectică B_4 există:

$$B_4 = \begin{pmatrix} 0.655878 & -0.96524 & -1.88012 & -1.43332 \\ 4.22743 & -4.70206 & 0.7917 & 1.79003 \\ -1.59432 & 2.34632 & -0.148299 & -0.758111 \\ 0 & 0 & 0.968621 & 0.658175 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Efectuând transformările corespunzătoare (10), formele K_2, K_3, K_4 ale hamiltonianului *K* (H scris în noile coordonate) se vor determina din relaţiile:

$$K_2 = \frac{1}{2}\sigma_1\left(p_1^2+q_1^2\right)-\frac{1}{2}\sigma_2\left(p_2^2+q_2^2\right) = 0.247354\left(p_1^2+q_1^2\right)-0.161002\left(p_2^2+q_2^2\right), \tag{12}$$

$$\begin{aligned} K_3 = &-1.52247 p_1^3 - 2.75988 p_1^2 p_2 - 0.560614 p_1 p_2^2 + 0.555805 p_2^3 + \\ &+4.33427 p_1^2 q_1 + 13.6424 p_1 p_2 q_1 + 8.14701 p_2^2 q_1 + 11.8376 p_1 q_1^2 + \\ &8.80617 p_2 q_1^2 - 1.65267 q_1^3 - 5.45395 p_1^2 q_2 - 16.1243 p_1 p_2 q_2 - \\ &-9.30725 p_2^2 q_2 - 25.8349 p_1 q_1 q_2 - 18.3724 p_2 q_1 q_2 + 7.0171 q_1^2 q_2 + \\ &+14.0106 p_1 q_2^2 + 9.47119 p_2 q_2^2 - 9.47983 q_1 q_2^2 + 4.134 q_2^3, \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} K_4 = &-1.74247 p_1^4 - 2.96036 p_1^3 p_2 + 2.1337 p_1^2 p_2^2 + 5.36404 p_1 p_2^3 + \\ &+1.99884 p_2^4 + 11.3635 p_1^3 q_1 + 44.9959 p_1^2 p_2 q_1 + 47.2451 p_1 p_2^2 q_1 + \\ &+12.9554 p_2^3 q_1 + 30.1269 p_1^2 q_1^2 + 33.4298 p_1 p_2 q_1^2 - 2.83397 p_2^2 q_1^2 - \\ &-22.8284 p_1 q_1^3 - 43.3045 p_2 q_1^3 - 22.588 q_1^4 - 13.7101 p_1^3 q_2 - \\ &-52.0847 p_1^2 p_2 q_2 - 53.0885 p_1 p_2^2 q_2 - 14.0642 p_2^3 q_2 - 64.3346 p_1^2 q_1 q_2 - \\ &-65.2487 p_1 p_2 q_1 q_2 + 11.9894 p_2^2 q_1 q_2 + 84.7749 p_1 q_1^2 q_2 + \\ &+151.297 p_2 q_1^2 q_2 + 99.8009 q_1^3 q_2 + 34.0675 p_1^2 q_2^2 + 30.8765 p_1 p_2 q_2^2 - \\ &-9.92384 p_2^2 q_2^2 - 103.733 p_1 q_1 q_2^2 - 175.458 p_2 q_1 q_2^2 - 164.82 q_1^2 q_2^2 + \\ &+41.8947 p_1 q_2^3 + 67.5526 p_2 q_2^3 + 120.569 q_1 q_2^3 - 32.9581 q_2^4. \end{aligned} \tag{14}$$

Teorema Arnold-Mozer impune construcţia şirului de transformări canonice nedegenerate de forma

$$\left(q_1, q_2, p_1, p_2\right) \to \left(\theta_1, \theta_2, \tau_1, \tau_2\right) \to \left(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2\right), \tag{15}$$

în baza cărora

$$\begin{aligned} &K\left(q_1,q_2,p_1,p_2\right) \equiv F\left(\theta_1,\theta_2,\tau_1,\tau_2\right) = F_2\left(\tau_1,\tau_2\right) + F_3\left(\theta_1,\theta_2,\tau_1,\tau_2\right) + F_4\left(\theta_1,\theta_2,\tau_1,\tau_2\right) + \ldots \equiv \\ &\equiv W\left(\psi_1,\psi_2,T_1,T_2\right) = W_2\left(T_1,T_2\right) + W_4\left(T_1,T_2\right) + W_5\left(\psi_1,\psi_2,T_1,T_2\right) + \ldots, \end{aligned}$$

şi care ar anula forma de ordinul trei în hamiltonianul transfomat şi ar exclude din forma de ordinul patru unghiurile fazice, lăsând cu toate acestea forma pătratică coresunzătoare $F_2\left(\tau_1,\tau_2\right)$ neschimbată [2,3].

Efectuând transformările (15), se obţine pentru hamiltonianul *W* în vecinătatea punctului staţionar *S* cu coordonatele $x^* = 1.41168,\ y^* = -0.12379$, calculate pentru $m_1 = 0.01,\ \alpha = 0.8584,$ forma finală:

$$W(\psi_1,\psi_2,T_1,T_2) = W_2(T_1,T_2) + W_4(T_1,T_2) + F_5(\psi_1,\psi_2,T_1,T_2) + ...,$$

unde

$$W_2(T_1,T_2) = \sigma_1 T_1 - \sigma_2 T_2 = 0.494707884724482077T_1 - 0.322004780208503657T_2, \quad (16)$$

$$W_4(T_1,T_2) = c_{20}T_1^2 + c_{11}T_1T_2 + c_{02}T_2^2,$$

$$c_{20} = \text{-}41.5987, c_{11} = \text{-}458.902, c_{02} = 64.1789\ . \quad (17)$$

$$W_4(\sigma_1,\sigma_2) = 65.918 \neq 0.$$

Rezultate similare au fost obţinute şi pentru celelalte poziţii bisectoriale de echilibru S_i. Astfel, se poate concluziona că punctele staţionare stabile în prima aproximaţie sunt stabile şi în sens Lyapunov.

Concluzii

Există aşa valori ale parametrilori m_1 şi α, pentru care punctele staţionare ale problemei mărginite a opt corpuri sunt stabile nu doar în prima aproximaţie, dar sunt stabile şi în sens Lyapunov.

Referințe:

1. WINTNER, A. *The Analytical Foundations of the Celestial Mechanics*. Princeton Univ. Press, 1941.
2. ГРЕБЕНИКОВ, Е.А. *Математические проблемы гомографической динамики*. Москва: МАКС Пресс, 2010.
3. ГРЕБЕНИКОВ, Е.А., КОЗАК, Д., ЯКУБЯК, М. *Методы компьютерной алгебры в проблеме многих тел*. Изд. 2-е. Москва: РУДН, 2002.

Date despre autor:
Elena CEBOTARU, lector universitar, Universitatea Tehnică a Moldovei
E-mail: elena.cebotaru@mate.utm.md

Prezentat la 14.06.2018