CZU: 517:519.61

DETERMINAREA PUNCTELOR DE ECHILIBRU ÎN PROBLEMA MĂRGINITĂ A OPT CORPURI

Evghenii GREBENICOV*, *Elena CEBOTARU

Universitatea Tehnică a Moldovei

Se consideră problema newtoniană mărginită a 8 corpuri. Se studiază condițiile de existență a configurației problemei și se determină soluțiile staționare (pozițiile de echilibru) în problema mărginită de opt corpuri cu simetrie incompletă. Calculele analitice și numerice sunt efectuate cu ajutorul sistemului Mathematica.

Cuvinte-cheie: *problema newtoniană, configurație, soluții particulare, puncte de echilibru, ecuații diferențiale de mișcare.*

DETERMINATION OF EQUILIBRIUM POINTS IN THE RESTRICTED PROBLEM OF EIGHT BODIES

The Newtonian restricted problem of 8-bodies is considered. The conditions of existence of the configuration are studied. The stationary solutions (equilibrium positions) in the restricted problem by eight bodies with incomplete symmetry is determined in this paper. Analytic and numerical calculations are done by with the system Mathematica.

Keywords: *Newtonian problem, configuration, particular solutions, equilibrium points, differential equations of motion.*

Introducere

Problema newtoniană a n corpuri este una dintre cele mai cunoscute probleme ale matematicii, mecanicii și ale astronomiei clasice. Această problemă a fost formulată de I.Newton cu mai mult de 300 de ani în urmă și constă în studierea mişcării a n corpuri în câmpul gravitațional newtonian. Descrierea sa este foarte simplă [1]:

Fie că în spaţiul euclidian tridimensional autonom $O\xi\eta\zeta$ *avem n (n=1,2,3,...) puncte materiale* $P_1, P_2, ..., P_n$ *, având masele cunoscute* $m_1, m_2, ..., m_n$ *,ce se atrag reciproc conform legii de atracţie a lui Newton. Trebuie determinate traiectoriile mişcării punctelor materiale cunoscând datele iniţiale (poziţii şi viteze iniţiale).*

Până în prezent ea nu este complet rezolvată, deși au fost întreprinse atât de multe încercări pentru determinarea soluțiilor ei exacte. Remarcabile în dezvoltarea acestei teorii au fost lucrările matematicianului american A.Wintner [2]. Dezvoltarea mecanicii cereşti a avut loc în mare măsură datorită aplicării largi a noilor tehnologii computeriale, ce permit a efectua volume mari nu doar de calcule numerice, dar şi analitice, fără de care e imposibilă rezolvarea oricărei probleme a mecanicii cereşti. Printre acestea pot fi enumerate Sistemele de Calcul: Maple, Mathematica, Mathcad, folosite des în diferite cercetări ştiinţifice. Aplicarea lor permite în multe cazuri să se construiască nu doar soluții aproximative, ci și soluții exacte ale ecuațiilor diferențiale ale mișcării.

În această lucrare se va cerceta existența configurației și se vor determina soluțiile staționare ale problemei newtoniene plane, mărginite a 8-corpuri cu simetrie incompletă. Problema a fost fomulată și propusă pentru studiu de către academicianul E.Grebenicov.

Ecuaţiile diferenţiale ale problemei mărginite a opt corpuri. Condițiile de existență a configurației

Se ştie că la studierea ecuaţiilor diferenţiale ale problemelor mărginite mai întâi trebuie studiată existenţa soluţiilor particulare de tip „poziţii de echilibru" în problemele nemărginite de dimensiune mai mică.

Fie că în spaţiul neinerţial de coordonate P_0xyz are loc mişcarea a opt corpuri $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P$, fiecare având, respectiv, masele $m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, \mu$ ce se atrag reciproc în corespundere cu legea atracţiei universale. Se va cerceta modelul dinamic plan format dintr-un pătrat, în vârfurile căruia se află punctele P_1, P_2, P_3, P_4, celelalte două puncte P_5, P_6, având masele $m_5 = m_6$, se află pe diagonala P_1P_3 a pătratului la distanţe egale de punctul P_0, în jurul căruia se roteşte această configuraţie cu o viteză unghiulară constantă ω, determinată din parametrii modelului (Fig.1).

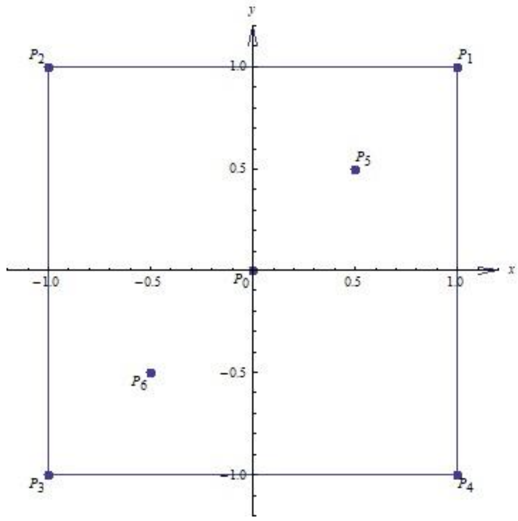

Fig.1. Configurația cercetată.

Se va studia mişcarea masei infinit mici $\mu = 0$ (aşa-numitul corp ce gravitează pasiv) în câmpul gravitaţional format de cele şapte corpuri $P_0,P_1, P_2,P_3,P_4,P_5,P_6$ ce se atrag reciproc şi atrag corpul P.

Ecuaţiile diferenţiale ale problemei newtoniene a opt corpuri în sistemul cartezian neinerţial de coordonate P_0xyz au forma:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_k}{dt^2}+\dfrac{f\left(m_0+m_k\right)x_k}{r_k^3}=\dfrac{\partial R_k^*}{\partial x_k}, \\ \dfrac{d^2y_k}{dt^2}+\dfrac{f\left(m_0+m_k\right)y_k}{r_k^3}=\dfrac{\partial R_k^*}{\partial y_k}, \\ \dfrac{d^2z_k}{dt^2}+\dfrac{f\left(m_0+m_k\right)z_k}{r_k^3}=\dfrac{\partial R_k^*}{\partial z_k}, \end{cases} \tag{1}$$

k=1,2,...,7;

unde R_k^* (k=1,2,...,7) sunt funcţiile de perturbare ce se exprimă prin relaţiile:

$$\begin{cases} R_k^* = f\sum_{j=1}^{6} m_j\left(\dfrac{1}{\Delta_{kj}}-\dfrac{x_kx_j+y_ky_j+z_kz_j}{r_j^3}\right), j\neq k \\ \Delta_{kj}^2=\left(x_j-x_k\right)^2+\left(y_j-y_k\right)^2+\left(z_j-z_k\right)^2, \\ r_j^2=x_j^2+y_j^2+z_j^2, \\ k=1,2,...,7, \end{cases} \tag{2}$$

unde f este constanta gravitaţională.

Pentru a determina ω, vom efectua o transformare de coordonate care exclude din partea dreaptă a ecuaţiilor (1) timpul t:

$$\begin{cases} x_j = X_j\cos\left(\omega t\right)-Y_j\sin\left(\omega t\right), \\ y_j = X_j\sin\left(\omega t\right)+Y_j\cos\left(\omega t\right), \\ z_j = Z_j. \end{cases} \tag{3}$$

Aşa cum se cercetează configuraţia plană, avem că $z_j = 0,\ j=0,1,...,7.$ În noile coordonate ecuaţiile (1), scrise doar pentru corpurile $P_0,P_1, P_2,P_3,P_4,P_5,P_6$, au forma:

STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2018, nr.2(112)
Seria "Ştiinţe exacte şi economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.12-18

$$\begin{cases} \dfrac{d^2X_k}{dt^2} = \omega^2 X_k + 2\omega \dfrac{dY_k}{dt} - \dfrac{f(m_0+m_k)X_k}{r_k^3} + \dfrac{\partial R_k^*}{\partial X_k}, \\ \dfrac{d^2Y_k}{dt^2} = \omega^2 Y_k - 2\omega \dfrac{dX_k}{dt} - \dfrac{f(m_0+m_k)Y_k}{r_k^3} + \dfrac{\partial R_k^*}{\partial X_k}, \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} R_k^* = f\sum_{j=1}^{6} m_j \left(\dfrac{1}{\Delta_{kj}} - \dfrac{X_k X_j + Y_k Y_j}{r_j^3} \right), j \neq k \\ \Delta_{kj}^2 = (X_j - X_k)^2 + (Y_j - Y_k)^2, \\ r_j^2 = X_j^2 + Y_j^2, \\ k = 1, 2, ..., 6. \end{cases} \tag{5}$$

Sistemul de ecuaţii diferenţiale (4) descrie mişcarea sistemului material de puncte în sistemul de coordonate cu rotaţie. De aceea, pentru studierea lui ulterioară e necesar de a-l înlocui cu un sistem echivalent de ecuaţii diferenţiale, scrise în coordonatele spaţiului fazic cu rotaţie a coordonatelor şi vitezelor de dimensiunea patru. Folosind regulile canonizării ecuaţiilor mişcării, vom introduce mai întâi variabilele suplimentare – impulsurile unitare, aplicând formulele mecanicii clasice:

$$\frac{dX}{dt} = p_X, \frac{dY}{dt} = p_Y.$$

Atunci, în noile coordonate fazice (X, Y, p_X, p_Y) ecuaţiile diferenţiale ce descriu mişcarea celor şapte corpuri în sistemul respectiv va avea forma standardă Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dX_k}{dt} = p_{kx}, \dfrac{dY_k}{dt} = p_{ky}, \\ \dfrac{dp_{kx}}{dt} = \omega^2 X_k + 2\omega p_{ky} - \dfrac{f(m_0+m_k)X_k}{r_k^3} + \dfrac{\partial R_k^*}{\partial X_k}, \\ \dfrac{dp_{ky}}{dt} = \omega^2 Y_k - 2\omega p_{kx} - \dfrac{f(m_0+m_k)Y_k}{r_k^3} + \dfrac{\partial R_k^*}{\partial X_k}. \end{cases} \tag{6}$$

Aşa cum se caută punctele staţionare ale sistemului (6), atunci, conform definiţiei lor, ele trebuie să fie soluţii ale sistemului de ecuaţii funcţionale:

$$\begin{cases} p_{kx} = 0, p_{ky} = 0, \\ \omega^2 X_k + 2\omega p_{ky} - \dfrac{f(m_0+m_k)X_k}{r_k^3} + \dfrac{\partial R_k^*}{\partial X_k} = 0, \\ \omega^2 Y_k - 2\omega p_{kx} - \dfrac{f(m_0+m_k)Y_k}{r_k^3} + \dfrac{\partial R_k^*}{\partial X_k} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

$k = 1, 2, ..., 6.$

Acest sistem este echivalent cu sistemul de ecuaţii algebrice:

$$\begin{cases} \omega^2 X_k + \dfrac{f(m_0+m_k)X_k}{r_k^3} + \dfrac{\partial R_k^*}{\partial X_k} = 0, \\ \omega^2 Y_k + \dfrac{f(m_0+m_k)Y_k}{r_k^3} + \dfrac{\partial R_k^*}{\partial X_k} = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Pentru a simplifica problema studiată, s-a considerat că

$$P_1(1,1),\ P_2(-1,1),\ P_3(-1,-1),\ P_4(1,-1), P_5(\alpha, \alpha),\ P_6(-\alpha, -\alpha),\ f=1,\ m_0=1,\ m_5=m_6$$

Atunci, înlocuind aceste date în sistemul (8) şi rezolvându-l prin aplicarea sistemului de calcul simbolic Mathematica (SCS Mathematica), obţinem:

$$m_1=m_3,\ m_2=m_4=f_1(\alpha,m_1), m_5=m_6=f_2(\alpha,m_1), \omega^2=f_3(\alpha,m_1). \tag{9}$$

Din cauza că expresiile analitice ale lui $f_1(\alpha,m_1)$, $f_2(\alpha,m_1)$, $f_3(\alpha,m_1)$ au o structură destul de complicată, vom prezenta doar forma lui $f_2(\alpha,m_1)$:

$$f_2(\alpha,m_1)=$$

$$-\left[\left(-4+\sqrt{2}\right)\left(-1+\alpha^2\right)^2\left(1+\alpha^2\right)\left(\frac{\sqrt{2}\left(-1+\alpha^3\right)}{\alpha^3}+(-\frac{4\sqrt{2}\alpha^2}{\left(-1+\alpha^2\right)^2}+\frac{1}{4}\left(4+\sqrt{2}+\frac{8\sqrt{2}}{\left(-1+\alpha^2\right)^2}+\frac{8\sqrt{2}}{\left(1+\alpha^2\right)^2}-\frac{8\sqrt{2}}{\left(1+\alpha^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)\right)m_1\right]:$$

$$\left[4\left(\frac{\left(-4+\sqrt{2}\right)\left(-1+\alpha^2\right)^2\left(1+\alpha^2\right)\left(-\frac{1}{\alpha^3}+\frac{8}{\left(-1+\alpha^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)}{8\sqrt{2}}+\frac{\left(-8+\sqrt{1+\alpha^2}+\alpha^2\sqrt{1+\alpha^2}\right)\left(-1+\sqrt{1+\alpha^2}+\alpha^4\left(-1+\sqrt{1+\alpha^2}\right)+2\alpha^2\left(1+\sqrt{1+\alpha^2}\right)\right)}{\left(1+\alpha^2\right)^2}\right)\right].$$

Teorema 1. *Verificarea relaţiilor (9) reprezintă condiţia suficientă de existenţă a soluţiei problemei newtoniene a şapte corpuri, configuraţia căreia reprezintă un pătrat $P_1P_2P_3P_4$ cu unul dintre corpuri (P_0) situat în originea de coordonate, iar alte două situate pe diagonala P_1P_3.*

Vom determina intervalele valorilor admisibile pentru parametrul α folosind posibilităţile grafice ale SCS Mathematica din condiţia că $m_2=m_4>0, m_5=m_6>0, \omega^2>0$. În Tabelul 1 sunt prezentate intervalele admisibile ale lui α în dependenţă de unele valori concrete ale lui m_1 calculate aproximativ folosind mijloacele grafice ale SCS Mathematica:

Tabelul 1

Intervale admisibile pentru α

m_1	α
0.0001	---------------
0.001	---------------
0.01	(0.8582; 0.85857)
0.1	(0.715; 0.718)
1	(0.48965; 0.5053)
10	(0.291; 0.320)
100	(0.149; 0.2871)
1000	(0.050; 0.2838)

Determinarea poziţiilor de echilibru

Să studiem mişcarea corpului $P_7(x_7,y_7,z_7)$ ce gravitează pasiv în câmpul celorlalte corpuri. În modelul studiat $m_7=\mu$. Pentru simplitate, se va considera în continuare $P_7(x_7,y_7,z_7)\equiv P(x,y,z)$ şi atunci ecuaţiile mişcării punctului $P(x,y,z)$ în spaţiul cu rotaţie au forma:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2X}{dt^2} = \omega^2 X + 2\omega \dfrac{dY}{dt} - \dfrac{fm_0 X}{r^3} + \dfrac{\partial R}{\partial X}, \\ \dfrac{d^2Y}{dt^2} = \omega^2 Y - 2\omega \dfrac{dX}{dt} - \dfrac{fm_0 Y}{r^3} + \dfrac{\partial R}{\partial Y}, \\ \dfrac{d^2Z}{dt^2} + \dfrac{fm_0 Z}{r^3} = \dfrac{\partial R}{\partial Z}, \end{cases} \tag{10}$$

unde

$$\begin{cases} R = f\sum_{j=1}^{6} m_j \left(\dfrac{1}{\Delta_{kj}} - \dfrac{XX_j + YY_j + ZZ_j}{r_j^3} \right), \\ \Delta_j^2 = \left(X_j - X\right)^2 + \left(Y_j - Y\right)^2 + \left(Z_j - Z\right)^2, \\ r_j^2 = X_j^2 + Y_j^2 + Z_j^2, r^2 = X^2 + Y^2 + Z^2. \\ j = 1, 2, \dots, 6, \end{cases} \tag{11}$$

iar ($X_j, Y_j, Z_j = 0$) sunt coordonatele corpurilor *P1,P2,P3,P4,P5,P6* calculate anterior.

Scris în forma normală Cauchy sistemul (10) are forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u, \dfrac{dy}{dt} = v, \dfrac{dz}{dt} = w, \\ \dfrac{du}{dt} = \omega^2 x + 2\omega v - \dfrac{fm_0 x}{r^3} + \dfrac{\partial R}{\partial x}, \\ \dfrac{dv}{dt} = \omega^2 y - 2\omega u - \dfrac{fm_0 y}{r^3} + \dfrac{\partial R}{\partial y}, \\ \dfrac{dw}{dt} = \dfrac{\partial R}{\partial z}. \end{cases} \tag{12}$$

Conform definiţiei soluţiilor staţionare ale ecuaţiilor diferenţiale, poziţiile de echilibru (în caz că ele există) sunt soluţii ale sistemului funcţional de ecuaţii:

$$\begin{cases} u = 0, v = 0, w = 0, \\ \omega^2 x + 2\omega v - \dfrac{fm_0 x}{r^3} + \dfrac{\partial R}{\partial x} = 0, \\ \omega^2 y - 2\omega u - \dfrac{fm_0 y}{r^3} + \dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial R}{\partial z} = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Înlocuind în relaţiile (13) ($X_j, Y_j, Z_j = 0$), $j = 1, 2, \dots 6$ şi $f = 1$, $m_2 = m_4 = f_1(\alpha, m_1)$, $m_5 = m_6 = f_2(\alpha, m_1)$, $\omega^2 = f_3(\alpha, m_1)$, $m_0 = 1$ determinate anterior pentru α şi m_1 admisibile, obţinem următorul sistem:

STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2018, nr.2(112)
Seria "Ştiinţe exacte şi economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.12-18

$$\begin{cases} u=0, v=0, w=0, \\ f(x,y)=\omega^2 x+2\omega v-\dfrac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}+m_1\left(\dfrac{-1-x}{\left((-1-x)^2+(-1-y)^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{1-x}{\left((1-x)^2+(1-y)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)+ \\ +m_4\left(\dfrac{1-x}{\left((1-x)^2+(-1-y)^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{-1-x}{\left((-1-x)^2+(1-y)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)+ \\ +m_6\left(\dfrac{-\alpha-x}{\left((-\alpha-x)^2+(-\alpha-y)^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{\alpha-x}{\left((\alpha-x)^2+(\alpha-y)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)=0, \\ g(x,y)=\omega^2 y\ -2\omega u-\dfrac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}+m_1\left(\dfrac{-1-y}{\left((-1-x)^2+(-1-y)^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{1-y}{\left((1-x)^2+(1-y)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)+ \\ +m_4\left(\dfrac{1-y}{\left((1-x)^2+(-1-y)^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{-1-y}{\left((-1-x)^2+(1-y)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)+ \\ +m_6\left(\dfrac{-\alpha-y}{\left((-\alpha-x)^2+(-\alpha-y)^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{\alpha-y}{\left((\alpha-x)^2+(\alpha-y)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)=0, \end{cases} \tag{14}$$

Sistemul (14) se reduce la rezolvarea următorului sistem format din două ecuaţii algebrice iraţionale cu necunoscutele *x*,*y*:

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases} \tag{15}$$

Teorema 2. *Condiţia de compatibilitate a sistemului (15) reprezintă condiţia necesară şi suficientă de existenţă a soluţiilor staţionare ale problemei mărginite a opt corpuri.*

Ecuaţiile din sistemul (15) au o structură destul de complicată, de aceea rezolvarea ei este destul de anevoioasă. Dacă s-ar determina soluţia sistemului (15), atunci, adăugând la ea *u*=*v*=*w*=*0,* s-ar obţine soluţia de tip poziţie de echilibru a ecuaţiilor diferenţiale ce descriu problema mărginită a opt corpuri.

Cu ajutorul pachetului grafic al SCS Mathematica pentru diferite valori ale parametrilor α şi m_1 s-au construit graficele liniilor descrise de ecuaţiile sistemului (15). Evident că punctele de intersecţie ale acestor curbe în planul P_0xy vor fi poziţiile de echilibru ale sistemului cercetat.

De exemplu, pentru $m_1=0.01$ şi $\alpha=0.8585$ graficele acestor linii sunt reprezentate în Figura 2 obţinută cu ajutorul instrucţiunilor:

```
f=ContourPlot[f,{x,2.5,2.5},{y,2.5,2.5},Contours→{0},ContourShading→False,
PlotPoints→100,ContourStyle→Hue[0]}];
g=ContourPlot[g,{x,2.5,2.5},{y,2.5,2.5},Contours→{0},ContourShading→False,
PlotPoints→100,ContourStyle→Dashing[{0.01,0.01}]];
patrat={{1,1},{1,-1},{-1,-1},{-1,1},{1,1}}
```

STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2018, nr.2(112)
Seria "Ştiinţe exacte şi economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.12-18

diag=ListPlot[patrat, PlotJoined→True, PlotStyle→{PointSize[0.02]}]; puncte={{0.8585,0.8585},{-0.8585,-0.8585}}

p=ListPlot[puncte, PlotJoined→True, PlotStyle→{PointSize[0.02]}];

Show[tr,p,f,g,p1,p2,tr,PlotRange→{{-2,2},{-2,2}}, AxesLabel→{x,y}]:

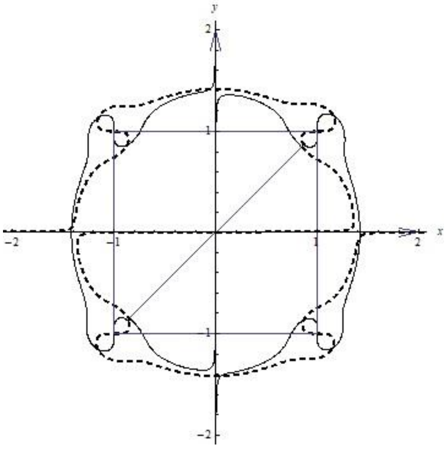

Fig.2 Graficele lui *f* şi *g* pentru $m_1 = 0.01$ şi $\alpha = 0.8585$.

Aplicația FindRoot dă posibilitatea de a determina valorile aproximative ale poziţiilor de echilibru: FindRoot[{f==0,g==0},{x,x0},{y,y0}].

Tabelul 2 conţine coordonatele unor puncte staționare calculate pentru careva valori ale lui m_1 şi α.

Tabelul 2

Coordonatele punctelor de echilibru

$m_1 = 0.01; \alpha = 0.8583$		$m_1 = 0.01; \alpha = 0.8585$		$m_1 = 0.1; \alpha = 0.717$	
x^*	y^*	x^*	y^*	x^*	y^*
±1.15589	±1.15589	±1.15604	±1.15604	±1.34324	±1.34324
±1.39868	∓ 0.22286	±1.41684	∓ 0.05223	±1.44139	∓ 0.11335
±0.22286	∓ 1.39868	±0.05223	∓ 1.41684	±0.67064	± 0.67064
±1.11278	∓ 1.11278	±0.86787	∓ 0.86787	±0.75299	∓ 0.75299
±0.89509	∓ 0.89509	±1.14488	∓ 1.14488	±0.11335	∓ 1.44139
±0.84058	±0.84058	±0.86989	±0.86989	±1.29376	∓ 1.29376

Concluzii

Există așa valori ale parametrilor m_1 şi α pentru care există configurația în formă de pătrat, în vârfurile căruia se află corpurile *P₁,P₂,P₃,P₄*, cu celelalte două corpuri *P₅,P₆*, având masele $m_5 = m_6$, situate pe diagonala P_1P_3 a pătratului la distanţe egale de corpul P_0, amplasat în originea de coordonate și în jurul căruia se roteşte această configuraţie cu o viteză unghiulară constantă ω, determinată din parametrii modelului.

Aplicînd sistemul Mathematica, s-au determinat coordonatele aproximative ale pozițiilor de echilibru ale configurației cercetate.

Referințe:

1. ГРЕБЕНИКОВ, Е.А. *Математические проблемы гомографической динамики*. Москва: МАКС Пресс, 2010.
2. WINTNER, A. *The Analytical Foundations of the Celestial Mechanics*. Princeton Univ. Press, 1941.

Date despre autor:
Elena CEBOTARU, lector universitar, Universitatea Tehnică a Moldovei.
E-mail: elena.cebotaru@mate.utm.md

Prezentat la 14.06.2018