STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2016, nr.7(97)
Seria "Științe exacte și economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.3-15

CZU: 004.421.2:517.4

O MODALITATE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE PROGRAMARE DINAMICĂ

Silvestru MAXIMILIAN, Sergiu CATARANCIUC,
Gheorghe CĂPĂȚÂNĂ, Emil CATARANCIUC

Universitatea de Stat din Moldova

În lucrare se propune o metodă eficientă, din punct de vedere practic, pentru soluționarea problemelor de programare dinamică. Procesul de rezolvare este împărțit în etape și reprezintă o schemă de calcul foarte simplă pentru utilizatori. Metoda propusă este expusă prin examinarea problemei de repartiție optimă a investițiiolor între ramuri. Calculele se prezintă sub formă de tabele.
Cuvinte-cheie: *programare dinamică, balanța legăturilor dintre ramuri, funcția beneficiului maxim, optimizare secvențială, repartizarea resurselor.*

ONE WAY OF SOLVING DYNAMIC PROGRAMMING PROBLEMS

In this paper, we propose an efficient method for practical use, for solving dynamic programming problems. Solving process is divided into steps and is a very simple calculation scheme for the users. The proposed method is described by examining the problem of optimal investment between branches. The calculations are presented in tables.
Keywords: *dynamic programming, input-output model, maximum benefit function, sequential optimization, resource allocation.*

Introducere

Programarea dinamică (PD) reprezintă un aparat matematic elaborat în scopul eficientizării calculelor în procesele de soluţionare a unor probleme de programare matematică.

Ideea programării dinamice: problema examinată este descompusă în subprobleme simplu de soluţionat [1, p.387]. Problemele programării dinamice, în procesele de soluţionare, sunt etapizate, fiind soluţionate în etape. La fiecare etapă este stabilită variabila, a cărei valoare este optimă pentru etapa curentă, dar care poate fi admisibilă la soluţionarea problemei la ultima etapă. Ansamblul de rezultate obţinute la fiecare etapă poate fi pus la baza soluţionării optime a unui şir de subprobleme.

Noţiunea de programare dinamică presupune prezenţa timpului, însă această prezenţă este doar aparentă. Metodele programării dinamice permit soluţionarea şi a altor probleme, unde timpul este lipsă, fiind acceptat la nivel intuitiv. În acest context, mai adecvat, programarea dinamică ar fi putut fi numită „programare etapizată”, care ar reflecta caracterul iterativ al procesului de soluţionare a problemei. Cu toată importanţa practică a arsenalului programării dinamice de soluţionare a problemelor, acesta (arsenalul), pentru mulţi practicieni, s-a dovedit a fi inaccesibil. În articol se face o încercare de a creşte accesibilitatea practicienilor la soluţionarea problemelor, fiind propuse scheme de calcul extrem de simple. Modalitatea de soluţionare a problemelor este expusă prin exemplul repartiţiei optime a investiţiilor între careva ramuri, domenii economice.

Precum e bine cunoscut, dezvoltarea capacităţilor de producţie presupune o tratare dinamică a modelului balanţei legăturilor dintre ramuri. Cu această ocazie se pune problema repartizării optime a investiţiilor între ramurile economiei naţionale, în vederea realizării venitului naţional maxim, beneficiului maxim sau cheltuielilor minime de producţie. Deci, dispunând de un anumit volum de investiţii, trebuie să se stabilească care politică de repartizare a investiţiilor va da maximul de beneficiu [2].

Rezolvarea acestei probleme intră în domeniul de aplicare a programării dinamice. Pentru înţelegerea relaţiilor funcţionale care leagă variabilele în sistemul considerat, vom folosi următoarele notaţii:

x_i – investiţiile în unităţi indivizibile ce se vor face în ramura $i \in \{1,2,...,n\}$;

$b_i(x_i)$ – beneficiile ce se realizează în ramura $i \in \{1,2,...,n\}$ pentru un anumit nivel al investiţiilor;

$F(x_1, x_2,..., x_n)$ – funcţia beneficiului total. Prin urmare,

$$F(x_1, x_2,..., x_n) = b_1(x_1) + b_2(x_2) + ... + b_n(x_n).$$

Dacă notăm prin I volumul disponibil de investiţii şi

$$y_1 = x_1 + x_2;$$
$$y_2 = y_1 + x_3;$$

STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2016, nr.7(97)
Seria "Științe exacte și economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.3-15

$$y_3 = y_2 + x_4;$$
$$\dots\dots\dots$$
$$I = y_{n-2} + x_n,$$

atunci funcţia beneficiului total va fi:

$$F(x_1, y_1, y_2, ..., I) = b_1(x_1) + b_2(y_1 - x_1) + b_3(y_2 - y_1) + ... + b_n(I - y_{n-2}).$$

Maximul funcţiei F se obţine printr-o optimizare secvenţială care constă în căutarea unei subpolitici optime conţinând un număr din ce în ce mai mare de faze alăturate, adică se va calcula succesiv:

$$f(y_1) = \max_{x_1 \in \{0,1,...,y_1\}} \{b_1(x_1) + b_2(y_1 - x_1)\} \quad (1)$$
$$f(y_2) = \max_{y_1 \in \{0,1,...,y_2\}} \{f(y_1) + b_3(y_2 - y_1)\} \quad (2)$$
$$f(y_3) = \max_{y_2 \in \{0,1,...,y_3\}} \{f(y_2) + b_4(y_3 - y_2)\}$$
$$\dots\dots\dots$$
$$f(I) = \max_{y_{n-1} \in \{0,1,...,I\}} \{f(y_{n-1}) + b_n(I - y_{n-1})\}$$

În momentul când I atinge valoarea dată, maximul funcţiei F va avea valoarea $f(I)$.

În continuare vom prezenta o metodă simplă de soluționare a problemelor de programare dinamică în baza examinării problemei repartizării investițiilor.

1. Problema repartizării investițiilor (cazul a trei domenii de activitate)

Vom presupune că între careva ramuri ale economiei naționale trebuie să se repartizeze un volum de investiţii în mărime de 50 de milioane (5 unităţi a câte 10 milioane fiecare), în funcţie de beneficiile care se pot obţine în fiecare ramură. E o problemă frecvent folosită în literatura de specialitate (*a se vedea* [3], p.281). Datele problemei sunt prezentate în Tabelul 1.

Tabelul 1

Investiţii	**Beneficiul realizat în ramură**		
	1	**2**	**3**
0	0	0	0
1	0.30	0.25	0.25
2	0.50	0.45	0.30
3	0.70	0.60	0.45
4	0.80	0.65	0.50
5	0.90	0.80	0.65

În prima etapă se aplică relaţia (1), iar datele se trec în Tabelul 2.

Tabelul 2

Investiţii	**$b_1(x_1)$**	**$b_2(x_2)$**	**$f(y_1)$**	**Soluţia optimă pentru ramurile I şi II**
0	0	0	0	(0,0)
1	0.30	0.25	0.30	(1,0)
2	0.50	0.45	0.55	(1,1)
3	0.70	0.60	0.75	(1,2) sau (2,1)
4	0.80	0.65	0.95	(2,2) sau (3,1)
5	0.90	0.80	1.15	(3,2)

Primele 3 coloane sunt identice cu cele din Tabelul 1. Elementele coloanei a patra se calculează folosind relaţia (1). Astfel, obţinem:

$$f(y_1 = 1) = \max_{x_1 \in \{0,1\}} \{b_1(x_1) + b_2(y_1 - x_1)\} = \max\{b_1(0) + b_2(1); b_1(1) + b_2(0)\} = \max\{0 + 0.25;\ 0.3 + 0\} = 0.3,$$

$$f(y_1 = 2) = \max_{x_1 \in \{0,1,2\}} \{b_1(x_1) + b_2(y_1 - x_1)\} = \max\{b_1(0) + b_2(2); b_1(1) + b_2(1); b_1(2) + b_2(0)\} =$$
$$= \max\{0 + 0.45;\ 0.3 + 0.25;\ 0.5 + 0\} = 0.55,$$

$$f(y_1 = 3) = \max_{x_1 \in \{0,1,2,3\}} \{b_1(x_1) + b_2(y_1 - x_1)\} = \max\{b_1(0) + b_2(3); b_1(1) + b_2(2); b_1(2) + b_2(1); b_1(3) +$$
$$+ b_2(0)\} = \max\{0 + 0.6;\ 0.3 + 0.45;\ 0.5 + 0.25;\ 0.7 + 0\} = 0.75 \text{ etc.}$$

Să vedem cum se completează ultima coloană a Tabelului 2. Vom determina soluția optimă în cazul când volumul total de investiții este de 3 unități convenționale (30 de milioane de lei). Pentru aceasta examinăm calcularea lui $f(y_1 = 3)$. Precum ușor se observă din calculele de mai sus, valoarea de 0.75 se obține pentru cazul când $x_1 = 1$ sau $x_1 = 2$. Cazul $x_1 = 1$ înseamnă că din 30 de milioane de lei ramurii 1 îi revin doar 10 milioane. Prin urmare, celelalte 20 de milioane de lei se repartizează ramurii 2. Astfel, obținem soluția (1,2) indicată în tabel. Cazul $x_1 = 2$ înseamnă că din 30 de milioane de lei ramurii 1 îi revin 20 de milioane, iar 10 milioane rămase se repartizează ramurii 2. Astfel, obținem și cea de-a doua soluție (2,1) indicată în tabel (*a se vedea* a cincea linie din Tabelul 2).

Rezultatele obţinute în Tabelul 2 se interpretează astfel: dacă, de exemplu, dispunem de 40 de milioane de lei pentru investiţii, atunci beneficiul maxim se va obţine investind 20 de milioane în prima ramură şi 20 de milioane în a doua (sau 30 de milioane în prima şi 10 milioane în a doua); dacă dispunem de 50 de milioane, beneficiul maxim se obţine investind 30 de milioane în prima ramură şi 20 de milioane în cea de-a doua.

În continuare, se determină soluţia optimă pentru cele trei ramuri luate la un loc. În rezultatul calculelor, efectuate mai jos, obținem Tabelul 3:

Tabelul 3

Investiţii	**$b_3(x_3)$**	**$f(y_2)$**	**Soluţia optimă pentru ramurile I, II şi III**
0	0	0	(0,0,0)
1	0.25	0.30	(1,0,0)
2	0.30	0.55	(1,0,1) sau (1,1,0)
3	0.45	0.80	(1,1,1)
4	0.50	1.00	(1,2,1) sau (2,1,1)
5	0.65	1.20	(2,2,1) sau (3,1,1)

Coloana a treia din Tabelul 3 se obţine folosind relaţia (2):

$$f(y_2 = 1) = \max_{y_1 \in \{0,1\}} \{f(y_1) + b_3(y_2 - y_1)\} = \max\{f(0) + b_3(1); f(1) + b_3(0)\} =$$
$$= \max\{0 + 0.25; 0.3 + 0\} = 0.3;$$
$$f(y_2 = 2) = \max_{y_1 \in \{0,1,2\}} \{f(y_1) + b_3(y_2 - y_1)\} = \max\{f(0) + b_3(2); f(1) + b_3(1); f(2) + b_3(0)\} =$$
$$= \max\{0 + 0.3;\ 0.3 + 0.25;\ 0.55 + 0\} = 0.55;$$
$$f(y_2 = 3) = \max_{y_1 \in \{0,1,2,3\}} \{f(y_1) + b_3(y_2 - y_1)\} = \max\{f(0) + b_3(3); f(1) + b_3(2); f(2) + b_3(1); f(3) +$$
$$+ b_3(0)\} = \max\{0 + 0.45;\ 0.3 + 0.30;\ 0.55 + 0.25;\ 0.75 + 0\} = 0.80.$$

etc.

În coloana 4 a Tabelului 3 se dau soluţiile optime pentru fiecare dintre valorile lui $I \in \{0,1,2,3,4,5\}$. De exemplu, în cazul unor investiții de 2 unități convenționale (20 de milioane de lei), repartizate între ramurile 1,2 și 3, beneficiul total va fi maxim dacă investițiile se vor repartiza în proporție de 1 unitate pentru ramura 1, 0 unități pentru ramura 2 și 1 unitate pentru ramura 3 (soluția (1,0,1)) sau 1 unitate pentru ramura 1, 1 unitate pentru ramura 2 și 0 unități pentru ramura 3 (soluția (1,0,1)). Să explicăm cum au fost determinate aceste soluții.

În baza calculelor de mai sus pentru $f(y_2 = 2)$, observăm că valoarea $f(y_2 = 2) = 0.8$ se atinge în cazul când $y_1 = 1$ sau $y_1 = 2$. Ținem cont de faptul că $y_1 = x_1 + x_2$ (*a se vedea* notațiile din Introducere).

Fie $y_1 = 1$. Luând în considerare soluția optimă pentru 2 ramuri din Tabelul 2, determinăm că $x_1 + x_2 = 2$ doar în cazul când $x_1 = 1$ și $x_2 = 0$. Aceasta înseamnă că $y_2 = 2$ implică rezultatul $x_3 = 1$. Obținem soluția (1,0,1).

Cazul $y_1 = 2$ conduce, la rândul său, la valorile $x_1 = 1$ și $x_2 = 1$. De aici deducem $x_3 = 0$. Astfel, obținem cea de-a doua soluție (1,1,0).

Din cele descrise rezultă că, în cazul investiției a 20 de milioane de lei ($y_2 = 2$ unități convenționale), soluția optimă pentru 3 ramuri este (1,0,1) sau (1,1,0).

În continuare este propus un algoritm pentru soluţionarea problemei expuse mai sus. În acest scop, mai întâi construim Tabelul 4: în prima linie şi în prima coloană a tabelului sunt transcrise volumul investiţiilor (în unități convenționale); celulele din tabel sunt divizate printr-o diagonală, beneficiile $b_1(x_1)$ care pot fi realizate în ramura 1 (*a se vedea* Tabelul 1) sunt transcrise în partea de sus față de diagonalele celulelor din coloana 2; beneficiile $b_2(x_2)$ ramurii 2 sunt transcrise în partea de jos față de diagonalele celulelor din linia 2.

Tabelul 4

Forma de înscriere a beneficiilor realizate în ramurile 1 şi 2

I \ II	0	1	2	3	4	5
0	0 / 0	0.25	0.45	0.60	0.65	0.80
1	0.3					
2	0.5					
3	0.7					
4	0.8					
5	0.9					

Elaborăm Tabelul 5: datele din linia şi coloana 2 ale Tabelului 4 se transcriu pe locurile respective din Tabelul 5. Mai întâi completăm celulele din coloanele 2-7, mai jos de diagonale: în fiecare celulă din coloana 2, mai jos de diagonală, scriem cifra 0; în fiecare celulă din coloana 3, mai jos de diagonală, scriem numărul 0.25 (beneficiul $b_2(x_2)$ pentru $x_2 = 1$); în fiecare celulă din coloana 4, mai jos de diagonală, scriem numărul 0.45 (beneficiul $b_2(x_2)$ pentru $x_2 = 2$); etc. De asemenea, completăm celulele din liniile 2-7 mai sus de diagonale: în fiecare celulă din coloana 2, mai sus de diagonală, scriem cifra 0; în fiecare celulă din linia 3, mai sus de diagonală, scriem numărul 0.3 (beneficiul $b_1(x_1)$ pentru $x_1 = 1$); în fiecare celulă din linia 4, mai sus de diagonală, scriem numărul 0.5 (beneficiul $b_1(x_1)$ pentru $x_1 = 2$) etc. În continuare, prelungim diagonala celulei (0,0); diagonala celulelor (1,0) şi (0,1); diagonala celulelor (2,0), (1,1) şi (0,2); diagonala celulelor (3,0), (2,1), (1,2), (0,3) etc. Facem următoarele calcule: pentru diagonala A determinăm max{(0 + 0)} = 0; pentru diagonala B calculăm max{(0 + 0.3), (0.25 + 0)} = 0.3; pentru diagonala C, max{(0 + 0.5), (0.25 + 0.3), (0.45 + 0)}=0.55; pentru diagonala D, max{(0 + 0.7), (0.25 + 0.5), (0.45 + 0.3), (0.6 + 0)} = 0.75; pentru diagonala E, max{(0 + 0.8), (0.25 + 0.7), (0.45 + 0.5), (0.6 + 0.3), (0.65 + 0)} = 0.95; şi pentru ultima diagonală F, max{(0 + 0.9), (0.25 + 0.8), (0.45 + 0.7), (0.6 + 0.5), (0.65 + 0.3), (0.8 + 0)} = 1.15. Am obţinut soluţia de repartiţie optimă a investiţiilor pentru ramurile (domeniile) 1 şi 2: beneficiul constituie: 0; 0.3; 0.55; 0.75; 0.95; 1.15.

Conform programului: 0 investiţii vor primi fiecare din cele 2 ramuri; 10 mil. de lei vor fi repartizaţi ramurii 1, ramurii 2 – zero; 20 mil. de lei vor fi repartizaţi câte 10 mil. de lei fiecărei ramuri; 30 mil. de lei vor fi repartizaţi: 10 mil. de lei ramurii 1 şi 20 mil. de lei ramurii 2 sau invers; 40 mil. de lei pot fi repartizaţi: câte 20 mil. de lei fiecărei ramuri sau 30 mil. de lei – ramurii 1 şi 10 mil. de lei – ramurii 2;

Tabelul 5

Forma de completare a celulelor în baza datelor din Tabelul 4

(0;0) (1;0) (1;1) (1;2) sau (2;1) (2;2) sau (3;1) (3;2)

I \ II	0	1	2	3	4	5
0	0 / 0	0 / 0.25	0 / 0.45	0 / 0.60	0 / 0.65	0 / 0.80
1	0.3 / 0	0.3 / 0.25	0.3 / 0.45	0.3 / 0.60	0.3 / 0.65	
2	0.5 / 0	0,5 / 0.25	0.5 / 0.45	0.5 / 0.60		
3	0.7 / 0	0.7 / 0.25	0.7 / 0.45			
4	0.8 / 0	0.8 / 0.25				
5	0.9 / 0					

A B C D E F

Însemnările (0;0); (1;0); (1;1); (1;2) sau (2;1); (2;2) sau (3;1); (3;2) din capătul diagonalelor semnifică:
prima componentă – volumul de investiții (în unități convenționale) pentru ramura 1;
a doua componentă – volumul de investiții (în unități convenționale) pentru ramura 2.

Astfel, perechea (1;0) înseamnă că finanţele, în volum de 1 unitate convențională, au fost repartizate în ramura 1. În ramura 2 nu s-a învestit nimic.

Mai sus de diagonala celulelor din Tabelul 5 este indicat beneficiul pentru ramura 1, iar mai jos de diagonală – beneficiul pentru ramura 2 (datele sunt luate din Tabelul 1).

Luând în considerare datele din Tabelul 2, vom analiza următoarele soluțiii optime pentru ramurile 1 și 2, în dependență de volumul investițiilor alocate:

- ✓ în cazul investiției nule: 0 investiții pentru ramura 1 și 0 investiții pentru ramura 2;
- ✓ în cazul investiției de volum 1: 1 unitate convențională de investiții pentru ramura 1 și 0 investiții pentru ramura 2;
- ✓ în cazul investiției de volum 2: 1 unitate convențională de investiții pentru ramura 1 și 1 unitate convențională de investiții pentru ramura 2;
- ✓ în cazul investiției de volum 3: 2 unități convenționale de investiții pentru ramura 1 și 1 unitate convențională de investiții pentru ramura 2;
- ✓ în cazul investiției de volum 4: 2 unități convenționale de investiții pentru ramura 1 și 2 unități convenționale de investiții pentru ramura 2;
- ✓ în cazul investiției de volum 5: 3 unități convenționale de investiții pentru ramura 1 și 2 unități convenționale de investiții pentru ramura 2.

Deci, considerăm investițiile în ramura 1 egale cu 0; 1; 1; 2; 2; 3, iar în ramura 2, respectiv cu 0; 0; 1; 1; 2; 2.

În baza datelor, calculate mai sus pe diagonalele A-F, obținem $F_2 = 0;\ 0.3;\ 0.55;\ 0.75;$ 0.95; 1.15. Rezultatele pot fi trecute sub formă de tabel (Tabelul 5.1).

Tabelul 5.1

Repartiţia optimă a investiţiilor în ramurile 1 şi 2

Volum total investiții, c	**$x_1^*(c)$**	**$F_1(c)$**	**$x_2^*(c)$**	**$F_2(c)$**
0	0	0	0	0
1	1	0.3	0	0.30
2	2	0.5	1	0.55
3	3	0.7	1	0.75
4	4	0.8	2	0.95
5	5	0.9	2	1.15

Rezultatele obţinute, adică soluţiile optime pentru ramurile 1 şi 2, sunt examinate în continuare şi în beneficiul realizat în ramura 3. Elaborăm Tabelul 6. Beneficiile $b_3(x_3)$ ale ramurii 3 sunt transcrise în partea de jos față de diagonalele celulelor din linia 2 (beneficiile $b_3(x_3)$ sunt date în Tabelul 1). Valorile calculate $F_2(c)$ sunt scrise în partea de sus față de diagonalele celulelor din coloana 2.

Tabelul 6

Forma de înscriere a beneficiilor realizate în ramurile 1, 2 şi 3

I, II \ III	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	0 / 0	0.25	0.3	0.45	0.5	0.65
1	0.3					
2	0.55					
3	0.75					
4	0.95					
5	1.15					

În baza datelor din Tabelul 6 elaborăm Tabelul 7 care se completează similar Tabelului 5.

Tabelul 7

Forma de completare a calculelor în baza datelor din Tabelul 6

(0;0) (1;0) (2;0)sau (1;1) (2;1) (3;1) (4;1)

I, II \ III	0	1	2	3	4	5
0	0 / 0	0 / 0.25	0 / 0.30	0 / 0.45	0 / 0.50	0 / 0.65
1	0.3 / 0	0.3 / 0.25	0.3 / 0.30	0.3 / 0.45	0.3 / 0.50	
2	0.55 / 0	0.55 / 0.25	0.55 / 0.30	0.55 / 0.45		
3	0.75 / 0	0.75 / 0.25	0.75 / 0.30			
4	0.95 / 0	0.95 / 0.25				
5	1.15 / 0					

A B C D E F

Însemnările (0;0), (1;0), (2;0) sau (1;1), (2;1), (3;1), (4;1) din capătul diagonalelor A-F semnifică:
prima componentă – volumul de investiții (în unități convenționale) pentru ramurile 1 și 2;
a doua componentă – volumul de investiții (în unități convenționale) pentru ramura 3.

Astfel, perechea (3;1) înseamnă că finanțele, în volum de 3 unități convenționale, au fost repartizate în ramurile 1 și 2. În ramura 3 s-a învestit 1 unitate convențională.

O astfel de tratare a procesului de repartiţie optimă a investiţiilor, în viziunea noastră, permite utilizatorului practic, neiniţiat în bazele Programării Dinamice, să utilizeze cu succes acest potenţial.

În baza datelor de pe diagonalele-celule determinăm:

diagonala A: max{0+0} = 0,
diagonala B: max{(0+0.3), (0.25+0)} = 0.3,
diagonala C: max{(0+0.55), (0.25+0.3), (0.3+0) = 0.55,
diagonala D: max{(0+0.75), (0.25+0.55), (0.3+0.3), (0.45+0)} = 0.8,
diagonala E: max{(0+0.95), (0.25+0.75), (0.3+0.55), (0.45+0.3), (0.5+0} = 1.0,
diagonala F: max{(0+1.15), (0.25+0.95), (0.3+0.75), (0.45+0.55), (0.5+0.3), (0.65+0)} = 1.2.

Determinăm nivelul de investiţii în ramura 3:

Ramurile 1+2: 0; 1; 1; 2; 3; 4.
F_3 = 0; 0.30; 0.55; 0.80; 1.00; 1.20.
Ramura 3: 0; 0; 1; 1; 1; 1.

Rezultatele obţinute pot fi trecute sub formă de tabel (Tabelul 7.1).

Algoritmul de utilizare a argumentelor din Tabelul 7.1 pentru repartiţia a 5 mil. de lei între cele 3 ramuri, domenii: în linia (5) beneficiul maxim este egal cu 1.2 mil. de lei, pentru care s-a cheltuit 1 mil. de lei în ramura 3. Au mai rămas resurse financiare 5 – 1 = 4 (mil. de lei) pentru ramurile 1 şi 2. Analizăm linia (4), în care beneficiul maxim este egal cu 0.95 (mil. de lei), adică max{0.8; 0.95} = 0.95. Pentru acest beneficiu s-au consumat 2 mil. de lei, au mai rămas 4 – 2 = 2 (mil. de lei). Analizăm linia (2): beneficiul max{0.5; 0.55} = 0.55 (mil. de lei), pentru care s-a cheltuit 1 mil. de lei, au mai rămas 2 – 1 = 1 (mil. de lei). Din linia (1) max{0.3} = 0.3.

Tabelul 7.1

Repartizarea optimă a investiţiilor în ramurile 1, 2 şi 3

C	x_1*(c)	F_1(c)	x_2*(c)	F_2(c)	x_3*(c)	F_3(c)
0	0	0	0	0	0	0
1	1	0.3	0	0.30	0	0.30
2	2	0.5	1	0.55	1	0.55
3	3	0.7	1	0.75	1	0.80
4	4	0.8	2	0.95	1	1.00
5	5	0.9	2	1.15	1	1.20

2. Problema repartizării investiţiilor (cazul a patru domenii de activitate)

Admitem existenţa a 4 domenii în care pot fi suplimentate investiţiile. Suma care trebuie repartizată între aceste 4 domenii este egală cu 100 mii de lei. Valorile $g_i(x), i \in \{1,2,3,4\}$, de creştere a volumului produselor finale în fiecare domeniu, în dependenţă de suma investiţiilor x, sunt prezentate în Tabelul 8 (sursa [4], p.224). Este necesar de a elabora programul de repartiţie optimă a mijloacelor financiare de 100 mii de lei, care ar asigura per total creşterea maximă.

În cazul în care disponibilul de finanţe va fi repartizat unui singur domeniu, de exemplu domeniului 1, atunci valorilor 0; 20; 40; 80; 100 le vor corespunde, respectiv, creşterile 0; 10; 31; 42; 62; 76. Pentru cazul în care disponibilul de finanţe va fi repartizat în 2 domenii, elaborăm Tabelul 9, în care în prima coloană din stânga sunt transcrise finanţele: 0; 20; 40; 60; 80; 100 destinate domeniului 1; în prima linie, sus, sunt transcrise finanţele: 0; 20; 40; 60; 80; 100 destinate domeniului 2.

Similar tabelelor 5 şi 7 construim diagonalele A-F. Facem calculele necesare pentru celulele situate pe aceste diagonale: celulele (20;0) şi (0;20); altă diagonală e formată din celule: (40;0), (20;20), (0;40); următoarea diagonală: (60;0), (40;20), (20;40), (0;60) etc. Pentru prima diagonală determinăm suma elementelor supra şi sub diagonală: max{(0;0} = 0.

Tabelul 8

Date iniţiale pentru problema cu 4 ramuri

Investiţii, mii lei	Domeniile			
	1	2	3	4
	Creşterea produsului final în urma suplimentării investiţiilor în domeniul cu g_i(x) mii de lei			
	g_1(x)	g_2(x)	g_3(x)	g_4(x)
20	10	12	11	16
40	31	26	36	37
60	42	36	45	46
80	62	54	50	63
100	76	78	77	80

Pentru diagonala {(20;0), (0;20)} suma elementelor sub şi supra diagonală constituie (10+0) şi (0+12). Determinăm max{(10+0), (0+12)} = 12. Numărul 12 este situat sub diagonală, deci se referă la domeniul 2, este creşterea produsului final în domeniul 2 generată de 20 mii de lei investiţii, 20 mii de lei au fost repartizaţi: domeniului 1 – zero; domeniului 2 – 20 mii de lei.

Tabelul 9

Forma de completare a celulelor pentru domeniile 1 şi 2

I \ II	0	20	40	60	80	100
0	0 0	0 12	0 26	0 36	0 54	0 78
20	10 0	10 12	10 26	10 36	10 54	
40	31 0	31 12	31 26	31 36		
60	42 0	42 12	42 26			
80	62 0	62 12				
100	76 0					

(0;0) (0;1) (1;0) (1;1) (1;0) (0;1)

A B C D E F

Analizăm, în continuare, diagonalele-celule: {(40;0), (20;20), (0;40)}, suma elementelor sub şi supra diagonalei {(31+0), (10+12), (0+26)}. Determinăm max{(31+0), (10+12), (0+26)} = 31. Numărul 31 mii de lei este situat supra diagonală, deci creşterea volumului produsului final de 31 mii de lei va fi realizată dupa investiţiile în volum de 40 mii de lei. Următoarea diagonal-celulă este constituită din 4 celule: {(60;0), (40;20), (20;40), (0;60)}. În fiecare celulă sunt situate: {(42+0), (31+12), (10+26), (0+36)}. Determinăm: max{(42+0), (31+12), (10+26), (0+36)} = 43. Creşterea volumului produsului final cu 43 mii de lei este asigurată de 40 mii de lei – investiţii în domeniul 1 şi 20 mii de lei – investiţii în domeniul 2. Deci, creşterilor volumului produsului final cu 0; 12; 31; 43; 62; 78 mii de lei în domeniul 2 le corespunde finanţarea în domeniul 2 în volum de 0; 20; 0; 20; 0 şi 100 mii de lei.

Însemnările (0;0), (0;1), (1;0), (1;1), (1;0), (0;1) din capătul diagonalelor A-F semnifică:

- prima componentă – domeniul 1;
- a doua componentă – domeniul 2.

Mai sus de diagonalele celulelor din Tabelul 9 sunt transmise creşterile produsului final în urma suplimentării investiţiilor în domeniul 1, iar mai jos de diagonale – în domeniul 2. F_2= 0; 12; 31; 43; 62; 78. Soluţiile optime privind repartiţia investiţiilor în domeniile 1 şi 2 vor fi reprezentate tabelar (Tabelul 10).

Tabelul 10

Repartiţia optimă a investiţiilor pentru domeniile 1 şi 2

Costul C al investiţiilor	X_1*(c)	F_1(c)	X_2*(c)	F_2(c)
0	0	0	0	0
20	20	10	20	12
40	40	31	0	31
60	60	42	20	43
80	80	62	0	62
100	100	76	100	78

Date prelucrate din Tabelul 8, repartiţia investiţiilor numai în domeniul 1

Rezultatele calculelor din Tabelul 9, repartiţia investiţiilor se face în domeniile 1 şi 2

Rezulatatele F_2(c) şi creşterile volumului produsului final din Tabelul 8, domeniul 3, sunt transcrise în Tabelul 11.
Pentru diagonalele A-F determinăm:
diagonala A: max{(0+0)} = 0,
diagonala B: max{(12+0), (0+11)} = 12,
diagonala C: max{(31+0), (12+11), (0+36) = 36,
diagonala D: max{(43+0), (31+11), (12+36), (0+45)} = 48,
diagonala E: max{(62+0), (43+11), (31+), (12+45), (0+60)} = 67,
diagonala F: max{(78+0), (12+11), (43+36), (31+45), (12+60), (0+77)} = 79.
Determinăm nivelul de investiţii în domeniul 3:
Domeniul 1: 0; 20; 0; 20; 40; 60.
F_3=0; 12; 36; 48; 67; 79.
Domeniul 2: 0; 0; 40; 40; 40; 40.
Rezultatele obţinute pot fi trecute sub formă de tabel (Tabelul 10.1)

Tabelul 10.1

Repartiţia optimă a investiţiilor pentru domeniile 1, 2 şi 3

C	X_1*(c)	F_1(c)	X_2*(c)	F_2(c)	X_3*(c)	F_3(c)
0	0	0	0	0	0	0
20	20	10	20	12	0	12
40	40	31	0	31	40	36
60	60	42	20	43	40	48
80	80	62	0	62	40	67
100	100	76	100	78	40	79

Date prelucrate din Tabelul 9, repartiţia investiţiilor în domeniile 1 şi 2

Rezultatele calcului din Tabelul 10, repartiţia investiţiilor în domeniul 3

Prima coloană din Tabelul 10.1 corespunde domeniului 1, iar linia a doua – domeniului 2. Similar evidenţiem diagonalele-celule:
diagonala A – {(0;0)};
diagonal B – {(20;0), (0;20};
diagonala C – {(40;0), (20;20), (0;40)};
diagonala D – {(60;0), (40;20), (20;40), (0;60)} etc.
Formăm Tabelul 11.
Însemnările (0;0), (1;0), (0;1), (1;1), (1;1), (1;1) din capătul diagonalelor A-F semnifică soluția pentru domeniul 1+2 şi, respectiv, 3:

Tabelul 11

Forma de completare a celulelor pentru domeniile 1, 2 și 3

(0;0) (1;0) (0;1) (1;1) (1;1) (1;1)

III / I, II	0	20	40	60	80	100
0	0 / 0	0 / 11	0 / 36	0 / 45	0 / 60	0 / 77
20	10 / 0	10 / 11	10 / 36	10 / 45	10 / 60	
40	31 / 0	31 / 11	31 / 36	31 / 45		
60	43 / 0	43 / 11	43 / 36			
80	62 / 0	62 / 11				
100	78 / 0					

A B C D E F

Supra diagonalelor celulelor din Tabelul 11 sunt transcrise rezultatele optime din Tabelul 10 (F_2); sub diagonale – datele respective pentru domeniul 3, adică F_3 = 0; 12; 36; 48; 67; 79.

Tabelul 12

Forma de completare a celulelor pentru domeniile 1, 2, 3, 4

(0;0) (0;1) (0;1) (1;1) (1;1) (1;1)

IV / I-III	0	20	40	60	80	100
0	0 / 0	0 / 16	0 / 37	0 / 46	0 / 63	0 / 77
20	12 / 0	12 / 16	12 / 37	12 / 46	12 / 63	
40	36 / 0	36 / 16	36 / 37	36 / 46		
60	48 / 0	48 / 16	48 / 37			
80	67 / 0	67 / 16				
100	79 / 0					

A B C D E F

Însemnările (0;0), (0;1), (0;1), (1;1), (1;1), (1;1) semnifică soluția pentru domeniul 1+2+3 şi, respectiv, 4.

Supra diagonalelor celulelor din Tabelul 12 sunt transcrise rezultatele optime din Tabelul 11 (F_3), iar sub diagonală – datele respective pentru domeniul 4:

F_4= 0; 16; 37; 52; 73; 85

Pentru diagonalele A-F determinăm:

diagonala A: max{0+0} = 0,
diagonala B: max{(12+0), (0+16)} = 16,
diagonala C: max{(36+0), (12+16), (0+37) = 37,
diagonala D: max{(48+0), (36+16), (12+37), (0+46)} = 52,
diagonala E: max{(67+0), (48+16), (36+37), (12+46), (0+63)} = 73,
diagonala F: max{(79+0), (67+16), (48+37), (36+46), (12+63), (0+80)} = 85.

Determinăm nivelul de investiţii în domeniul 4:

Domeniile 1+2+3: 0; 0; 0; 40; 40; 60.
F_4= 0; 16; 37; 52; 73; 85.
Domeniul 4: 0; 20; 40; 20; 40; 40.

Rezultatele opţinute pot fi trecute sub formă de tabel (Tabelul 13). În acest tabel sunt trecute şi rezulatele din tabelele 10 şi 10.1.

Tabelul 13

Repartiţia optimă a investiţiilor pentru domeniile 1, 2, 3, 4

C	X_1*(c)	F_1(c)	X_2*(c)	F_2(c)	X_3*(c)	F_3(c)	X_4*(c)	F_4(c)
0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	20	10	20	12	0	12	20	16
40	40	31	0	31	40	36	40	37
60	60	42	20	43	40	48	20	52
80	80	62	0	62	40	67	40	73
100	100	76	100	78	40	79	40	85
	Disponibilul de finanțe poate fi repartizat numai domeniului 1		Disponibilul de finanțe este repartizat domeniilor 1 și 2		Disponibilul de finanțe este repartizat domeniilor 1, 2 și 3		Disponibilul de finanțe este repartizat numai domeniilor 1, 2, 3 și 4	

Din Tabelul 13 rezultă: din ultima linie (linia 100):

$$\max\{F_1, F_2, F_3, F_4\} = \max\{76;78;79;85\} = 85.$$

Pentru o astfel de creştere a produsului final în domeniul 4 sunt necesare 40 mii de lei, au mai rămas 100 – 40 = (60 mii de lei) şi trei domenii. În Tabelul 13 trecem la linia „60", examinăm domeniile 1, 2 şi 3 (fără domeniul 4, care deja şi-a luat poziţia de 40 de mii de lei). Pentru linia „60" determinăm max{F_1, F_2, F_3} = max {42;43;48} = 48. Pentru a realiza această creştere de 48 mii de lei, domeniului 3 îi sunt necesare 40 de mii de lei, au mai rămas încă 60 – 40 = 20 (mii de lei). În Tabelul 13 trecem la linia „20", examinăm domeniile 1 şi 2 (fără domeniile 3 şi 4 care şi-au primit „poziţia" a câte 40 mii de lei), au mai rămas înca 60 – 40 = 20 (mii de lei). Pentru linia „20" determinăm max{F_1, F_2} = max {10;12} = 12. Pentru domeniul 1 au rămas 20 – 20 = 0 lei.

Rezultatele transcrise în Tabelul 13 sunt argumente, date care pot fi puse la baza repartiţiilor resurselor financiare şi pentru alte cazuri:

a) Disponibilul de 80 mii de lei trebuie repartizat în cele 4 domenii. Pentru linia „80" din Tabelul 13 determinăm: max{F_1, F_2, F_3, F_4} = max{62;62;63;73} = 73.

Pentru creşterea de 73 mii de lei domeniul 4 are nevoie de 40 mii de lei, au mai rămas 80 – 40 = 40 (mii de lei) şi trei domenii. În Tabelul 13 trecem la linia „40". Pentru linia „40" determinăm: max{F_1, F_2, F_3} = max{31;31;36} = 36, pentru care domeniul 3 a consumat 40 mii de lei. Domeniilor 1 şi 2 le vor fi repartizate zero lei.

b) Disponibilul de 60 mii de lei trebuie repartizat în cele 4 domenii. Pentru linia „60" din Tabelul 13 determinăm max{F_1, F_2, F_3, F_4} = max {42;43;48;52} = 52, pentru care s-au consumat 20 mii de lei, au mai rămas 60 – 20 = 40 (mii de lei).

În Tabelul 13 trecem la linia „40", pentru care determinăm: max{F_1, F_2, F_3}= max{31;31;36}=36, pentru care s-au consumat 40 mii de lei. Pentru domeniile 1 şi 2 – zero lei.

c) Disponibilul de 40 mii de lei trebuie repartizate în cele 4 domenii. Pentru linia „40" din Tabelul 13 determinăm: max{F_1, F_2, F_3, F_4} = max{31;31;36;37} = 37, pentru care s-au consumat 40 mii de lei. Pentru domeniile 1, 2 şi 3 – zero lei.

d) Disponibilul de 20 mii de lei trebuie repartizat în cele 4 domenii. Pentru linia „20" din Tabelul 13 determinăm: max{F_1, F_2, F_3, F_4} = max{10;12;12;16} = 16, pentru care s-au consumat 20 mii de lei. Pentru domeniile 1, 2 şi 3 – zero lei.

Concluzii

Modalitatea de soluţionare a problemelor de programare dinamică, propusă mai sus, va contribui considerabil la creşterea minimului de utilizatori ai potenţialului enorm al programării dinamice pentru soluţionarea celor mai diverse probleme, inclusiv acordarea subvenţiilor, accesul la creditele bancare, utilizarea optimă a resurselor financiare parvenite din exteriorul Republicii Moldova.

Referinţe:

1. TAHA, A., HAMDI: *Operations Research.* London, 1982.
2. MAXIMILIAN, S. *Modelarea proceselor economice.* Chişinău: CE USM, 2004, p.163.
3. TOVISSI, L., ŢIGĂNESCU, E. *Balanţa legăturilor dintre ramuri*. Bucureşti, 1969.
4. КУЗНЕЦОВ, А.Н., ХОЛОД, Н.И., КОСТЕВИЧ, Л.С. *Руководство к решению задач по математическому програмированию*. Москва: Высшая школа, 1978.

Prezentat la 20.09.2016