УДК 536.2:519.876

***Н. А. Колесниченко*[1], *Н. В. Волгушева*[2], *И. Л. Бошкова*[3]**
Одесская национальная академия пищевых технологий, ул. Канатная, 112, Одесса, 65039, Украина
e-mail: [1]kolesnychenko.natalia@yandex.ua, [2]n-volgusheva@mail.ru , [3]ira_boshkova@mail.ru
ORCID: [1]http://orcid.org/0000-0002-7521-5191, [2]http://orcid.org/0000-0002-9984-6502, [3]http://orcid.org/0000-0001-5989-9223

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОВОГО СОСТОЯНИЯ ТЕЛА ПРИ ВЫСОКОИНТЕНСИВНЫХ ПРОЦЕССАХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛОТЫ

Анализируются результаты расчетов избыточной температуры в теле с учетом релаксационных явлений. Определена возможность получения данных по тепловому состоянию тела для любых сколь угодно малых значений чисел Фурье. Показано, что при числах Фурье, близких к релаксационным числам Фурье, координата теплового слоя практически совпадает с поверхностью тела. Расчетные температуры тела в первой стадии с учетом релаксационных явлений и по упрощенной методике демонстрируют заметное расхождение, однако в конце первой стадии и во второй стадии температуры удовлетворительно коррелируют между собой.

Ключевые слова: *Время релаксации; Число Фурье; Безразмерная температура; Гиперболическое уравнение; Теплопроводность.*

***Н. А. Колесниченко*[1], *Н. В. Волгушева*[2], *И. Л. Бошкова*[3]**
Одеська національна академія харчових технологій, вул. Канатна, 112, Одеса, 65039, Україна
e-mail: [1]kolesnychenko.natalia@yandex.ua, [2]n-volgusheva@mail.ru , [3]ira_boshkova@mail.ru
ORCID: [1]http://orcid.org/0000-0002-7521-5191, [2]http://orcid.org/0000-0002-9984-6502, [3]http://orcid.org/0000-0001-5989-9223

АНАЛІТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕПЛОВОГО СТАНУ ТІЛА ПРИ ВИСОКОІНТЕНСИВНИХ ПРОЦЕСАХ ПОШИРЕННЯ ТЕПЛОТИ

Аналізуються результати розрахунків надлишкової температури в тілі з урахуванням релаксаційних явищ. Визначена можливість одержання даних по тепловому стану тіла для будь-яких як завгодно малих значень чисел Фур'є. Показано, що при числах Фур'є, близьких до релаксаційних чисел Фур'є, координата теплового шару практично збігається з поверхнею тіла. Розрахункові температури тіла в першій стадії з урахуванням релаксаційних явищ і за спрощеною методикою демонструють помітну розбіжність, однак наприкінці першої стадії й у другій стадії температури задовільно корелюють між собою.

Ключові слова: *Час релаксації; Число Фур'є; Безрозмірна температура; Гіперболічне рівняння; Теплопровідність.*

I. ВВЕДЕНИЕ

Решения прямых задач нестационарной теплопроводности необходимы для получения информации о тепловом состоянии тела и определения характеристик теплообменного процесса. Особую сложность представляет моделирование высокоинтенсивных процессов распространения теплоты, при которых возможно нарушение линейной связи между тепловым потоком и градиентом температур. Обычно при решении задач теплопроводности используется дифференциальное уравнение, в котором временное и пространственное изменение температуры описывается уравнением параболического вида. Основные теплотехнические процессы хорошо описываются моделями на основе уравнений параболического вида, однако при описании высокоинтенсивных процессов его применение могло приводить к неудовлетворительным результатам. Как отмечено в [1], конкретному виду изотермической поверхности соответствует определенный дифференциальный оператор теплопроводности, среди которых оператор параболического типа является частным случаем. Этому оператору соответствует строго определенный класс изотермических поверхностей, и выйти за его пределы нельзя изменением начальных и граничных условий [1, 2]. Утверждается [1], что попытка из параболического оператора получить несвойственные ему температурные поля за счет "навязывания" различных начальных и граничных условий привела к проблеме парадоксов и некорректных задач. Уравнения теплопроводности параболического типа характерны для случая, когда скорость распространения теплоты может быть принята бесконечно большой и приводит к повышению температуры во всех точках тела сразу после начала действия источника теплоты. Дифференциальное уравнение теплопроводности, связывающее временное и пространственное изменение температуры, для среды с переменными физическими характеристиками и внутренними источниками теплоты при допущении о том, что скорость распространения теплоты бесконечно велика, имеет следующий вид:

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = div(\lambda \, grad \, t) + q_v \; . \qquad (1)$$

При его выводе тепловой поток через контрольную площадку в некоторый момент времени принят пропорциональным разности температур в точках тела, удаленных от этой площадки на некоторое расстояние, в тот же момент времени. В 1941 году А. В. Лыковым была предложена гипотеза о конечных скоростях распространения теплоты и массы [3]. В случаях, когда линейная связь между тепловым потоком и градиентом температур нарушается, плотность теплового потока определяется обобщенным законом Фурье (в предположении, что теплофизические характеристики не зависят от температуры и внутренние источники теплоты отсутствуют):

$$\vec{q} = -\lambda \nabla t - \tau_r \frac{\partial \vec{q}}{\partial \tau} , \qquad (2)$$

где τ_r – постоянная времени (время релаксации).

При резком изменении $\vec{q}$ перестройка температурного поля и градиента температуры происходит со смещением во времени (τ_r). Чем выше степень нестационарности, тем больше τ_r . Дифференциальное уравнение теплопроводности с учетом релаксационных процессов было получено на основе уравнения теплового баланса и обобщенного закона Фурье (гиперболическое уравнение теплопроводности):

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + \tau_r \frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2} = a \nabla^2 t \, . \qquad (3)$$

Переход к гиперболическому оператору устраняет некоторые некорректные решения классической теории теплопроводности. В [4] представлены результаты исследования решений краевых задач переноса для уравнений гиперболического типа, где рассматривалась корректность постановки задачи при ГУ I и ГУ III рода. В работе [5] представлено решение нелинейного гиперболического уравнения теплопроводности при ГУ I рода в квазистационарном режиме нагрева для полубесконечного тела. Показано, в рассматриваемом случае можно вместо гиперболического уравнения теплопроводности использовать решение параболического уравнения, при условии, что коэффициент теплопроводности будет функцией как температуры, так и скорости нагрева. Анализ литературных данных показывает, что от правильности выбора дифференциального уравнения теплопроводности, гиперболического – для высокоинтенсивных процессов нагрева, или параболического типа – для процессов с интенсивностью, позволяющей принять скорость распространения теплоты бесконечно большой, зависит верность полученных решений.

II. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗБЫТОЧНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ТЕЛА

В работе [6] приведено аналитическое решение гиперболического уравнения теплопроводности полуограниченного массива при ГУ I рода. Авторы установили, что фронт тепловой волны разделяет исследуемую область на две подобласти: возмущенную, где температура изменяется от температуры стенки до температуры на фронте волны, и невозмущенную, на всем протяжении которой температура равна начальной температуре. Полученные зависимости представляли интерес для анализа теплового состояния тела при малых значениях числа Фурье. Как известно [7-8], существует проблема расчета температур при малых числах Фурье по аналитическим зависимостям, обусловленная необходимостью учета большого количества членов ряда в решении и учета времени релаксации, которое необходимо для перевода теплового потока в форму теплового движения частиц, участвующих в процессе передачи теплоты [6].

Аналитическое исследование теплового состояния тела проведено с использованием зависимостей [6]. На рисунке 1 представлен график изменения избыточной температуры тела при различных значениях Fo. Релаксационное число Фурье $Fo_r = \frac{a \cdot \tau_r}{\delta^2}$ относительная координата $\xi = \frac{x}{\delta}$, безразмерная избыточная температура $\theta_K = \frac{t - t_{cm}}{t_0 - t_{cm}}$. Расчеты проводились при следующих условиях: $Fo_r = 2{,}78 \cdot 10^{-11}$, $\delta = 0{,}06$ м. При Fo порядка 10^{-3} – 10^{-4} наблюдается существенное изменение температуры на границе тела, далее температурная кривая начинает сглаживаться, в этих случаях вид кривых соответствует результатам получаемым по известным зависимостям, в основе которых лежит дифференциальное уравнение теплопроводности параболического типа. Фронт ударной волны при $Fo = 2{,}78 \cdot 10^{-4}$ ограничивается безразмерной координатой $\xi = 0{,}97$, при $Fo = 2{,}78 \cdot 10^{-3}$ координата сместилась до значения

$\xi = 0{,}92$. Расчеты показывают, что за фронтом ударной волны температура менее интенсивно, но изменяется, т.е. в период времени релаксации теплота продолжает распространяться путем теплопроводности.

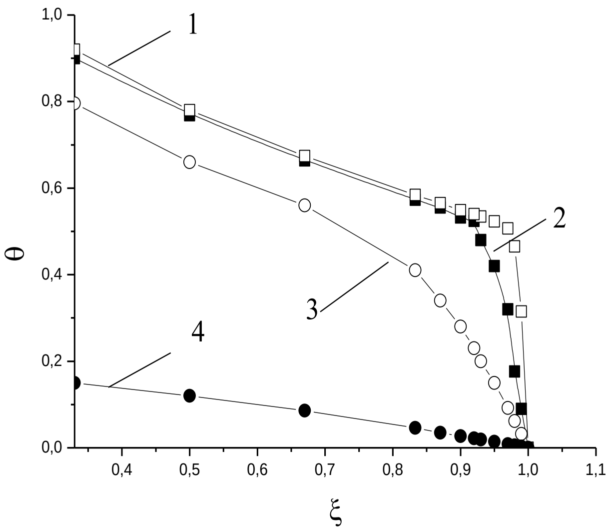

***Рисунок 1** – Избыточная температура тела при различных значениях числа Фурье*

1 – $Fo = 2{,}78 \cdot 10^{-4}$, *2 –* $Fo = 2{,}78 \cdot 10^{-3}$,

3 – $Fo = 2{,}78 \cdot 10^{-2}$, *4 –* $Fo = 2{,}78 \cdot 10^{-1}$

На рисунке 2 приведен график изменения температурных кривых при значениях Fo, сопоставимых с Fo_r и значительно больших.

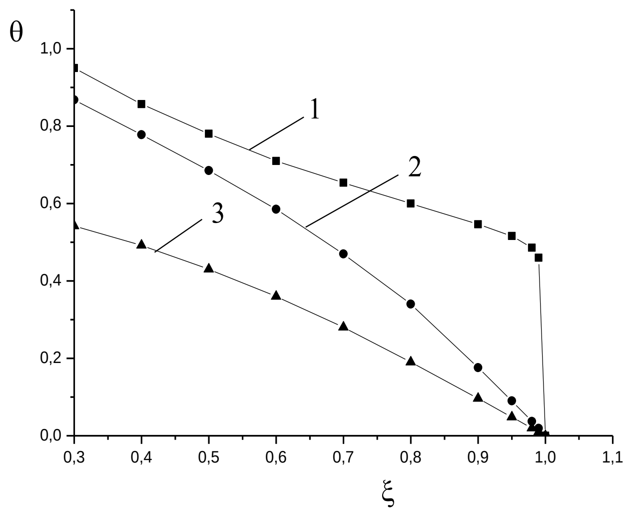

***Рисунок 2** – Избыточные температуры тела при различной степени приближения к* Fo_r

1 – $Fo = 10^{-7}$, *2 –* $Fo = 0{,}1$, *3 –* $Fo = 0{,}3$

При $Fo = Fo_r$ тепловой фронт практически находится на поверхности тела. Расчеты проводились при $Fo_r = 2{,}78 \cdot 10^{-7}$, $\delta = 0{,}001$ м.

На рисунке 3 представлен характер изменения избыточной температуры от числа Фурье, полученный при $Fo_r = 10^{-7}$, $\xi = 0{,}7$, $a = 10^{-6}$ м^2/с, $\tau_r = 10^{-7}$ с, $\delta = 0{,}001$ м. Ход кривой верно отражает реальную картину изменения избыточной температуры тела.

Как видно, применение зависимостей [6] позволяет проводить уточненные расчеты температурного поля с учетом релаксационных процессов при любых (сколь угодно малых) числах Фурье и определять границу теплового фронта.

Существуют методики, позволяющие рассчитывать нестационарную теплопроводность тел приближенными методами для случая, когда тепловой фронт не распространился на всю толщину тела [9]. Весь процесс нагрева (охлаждения) тела разделяют на две стадии: в первой стадии теплота проникает от поверхности вглубь тела, температура изменяется только в прогретой (охлажденной) зоне, толщина которой увеличивается с течением времени; во второй стадии температура изменяется по всему объему (толщине) тела. Прогретая (охлажденная) зона в первой стадии называется термическим слоем. Распределение температур в теле не находят из решения дифференциального уравнения теплопроводности, а задаются им на основе анализа литературных данных. Первая стадия заканчивается в тот момент, когда толщина термического слоя становится равной половине толщины тела.

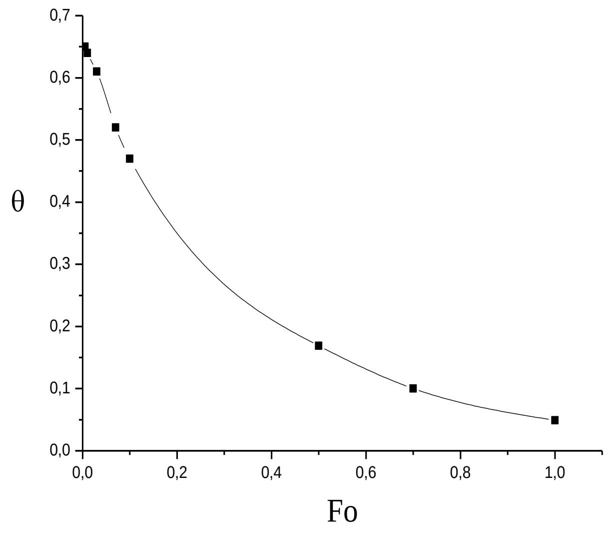

***Рисунок 3** – Зависимость избыточной температуры от числа Фурье*

На рисунке 4 приведены результаты расчетов температуры для первой стадии по упрощенным зависимостям [9] и [6], основанных на решении гиперболического уравнения теплопроводности. Расчет проводился для пластины толщиной $\delta = 0{,}06$ м, $Fo_r = 2{,}78 \cdot 10^{-7}$.

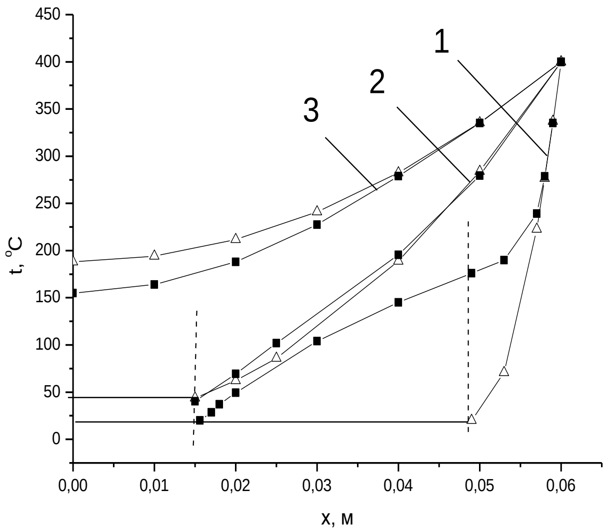

***Рисунок 4** – Распределение температур в теле на первой и второй стадиях процесса нагрева*
1 – $\tau = 10$ с, *2* – $\tau = 300$ с, *3* – $\tau = 1000$ с,
Δ – расчет по зависимостям [10], ■ – расчет по [6].

Линии 1 получены для первой стадии нагрева, 2 – для завершающей, когда тепловой слой достиг центра пластины, линии 3 характеризуют температуру во второй стадии. Вертикальные линии обозначают границы теплового слоя. При τ = 10 с температура 20°C по [6] достигается на большем расстоянии, чем при расчете по [9]. Хорошая сопоставимость наблюдается в непосредственной близости к поверхности, характер изменения температуры совпадает в пределах теплового слоя.

III. ВЫВОДЫ

Аналитические исследования температурного поля в теле с использованием зависимостей, учитывающих релаксационные процессы, показывают, что за фронтом тепловой волны температура продолжает изменяться, однако менее интенсивно, чем тепловом слое. Расчеты температур по зависимостям, полученным на основе гиперболического уравнения теплопроводности, позволяют получать уточненные данные по сравнению с данными упрощенной методики, а также проводить уточненные расчеты температурного поля с учетом релаксационных процессов при любых (сколь угодно малых) числах Фурье и определять границу теплового фронта.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шашков А.Г., Бубнов В.А., Яновский С.Ю.** Волновые явления теплопроводности. – М., Эдиториал УССР, 2004. – 296 с.
2. **Риман Б.** Математическое сочинение, в котором содержится попытка дать ответ на вопрос, предложенный знаменитейшей Парижской Академией. – Соч. М.; Л.: Гос. Техн.-теор. – Изд-во, 1948 . – 339 с.
3. **Лыков А. В.** Теория теплопроводности. – М., 1967. – 559 с.
4. **Карташов Э. М.** Краевые задачи для гиперболических моделей переноса. Математические методы и информационные технологии в химии и химической технологии // Вестн. МИТХТ, 2008. – Т. 3, № 3. – С. 20-22.
5. **Исаев К. Б.** К вопросу об учете конечной скорости распространения тепла в твердом теле // Тр. V Минского межд. форума ММФ-2004. – Минск: ИТМО НАНБ, 2004. – С. 1-6.
6. **Кудинов В.А., Кудинов И.В.** Об одном методе получения точного аналитического решения гиперболического уравнения теплопроводности на основе использования ортогональных методов // Вестн. Сам. Техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Наук. – 2010. - № 5 (21). – с. 159-169.
7. **Антимонов М.С.** Численно-аналитические методы решения задач теплопроводности на основе ортогональных методов взвешенных невязок Автореф. дисс… к.ф.-м.н., Ульяновский гос. техн. ун-т, 2008. – 24 с.
8. **Логинов**. **В.С., Дорохов А.Р., Репкина Н.Ю.** Расчет нестационарной теплопроводности при малых числах Фурье (Fo<0,001) // Письма в ЖТФ, 1997. – т. 23. – №1. – с. 22-25.
9. **Вейник А.И.** Приближенный расчет процессов теплопроводности. – М.–Л.: Госэнергоиздат, 1959. – 184 с.

Отримана в редакції 04.07.2016, прийнята до друку 08.09.2016

***N. A. Kolesnychenko*[1], *N. V. Volgusheva*[2], *I. L. Boshkova*[3]**
Odessa National Academy of Food Technologies, 112 Kanatnaya str., Odessa, 65039, Ukraine
e-mail: [1]kolesnychenko.natalia@yandex.ua, [2]n-volgusheva@mail.ru , [3]ira_boshkova@mail.ru
ORCID: [1]http://orcid.org/0000-0002-7521-5191, [2]http://orcid.org/0000-0002-9984-6502, [3]http://orcid.org/0000-0001-5989-9223

ANALYTICAL STUDY OF HEAT STATE OF THE BODY AT HIGH-INTENSITY PROCESSES OF HEAT PROPAGATION

Modeling of high intensity heat propagation processes in which the possible violation of the linear relationship between heat flux and temperature gradient is particularly complex. In this case the heat flux density is determined by the generalized Fourier law which takes into account relaxation processes. To estimate the contribution of relaxation phenomena of the body excessive temperature for the first kind boundary conditions was calculated. The possibility of getting on the thermal state of the body of data for any arbitrarily small values of the Fourier numbers is determined. Utilization of analytical functions which are based on hyperbolic heat equation, enables more accurate calculation of the temperature field in view of the relaxation processes and define the boundaries of the thermal front. It is shown that at the Fourier numbers close to the relaxation of the Fourier numbers, coordinate of the thermal layer is almost identical with the body surface. Estimated body temperatures in the first stage taking into consideration relaxation phenomena and on the simplified procedure demonstrate a marked divergence, however at the end of the first stage and at the second stage the temperatures correlation is satisfactory. Good comparability is observed in close proximity to the surface, the nature of changes in temperature coincides within the same thermal layer.

Keywords: Relaxation time; Fourier Number; Dimensionless temperature; Hyperbolic equation; Thermal conductivity.

REFERENCES

1. **Shashkov A.G., Bubnov V.A., Yanovskiy S.Yu.** (2004). Volnovyie yavleniya teploprovodnosti. – M., Editorial USSR.– 296 p. (in Russian)
2. **Riman B.** (1948). Matematicheskoe sochinenie, v kotorom soderzhitsya popyitka dat otvet na vopros, predlozhennyiy znameniteyshey Parizhskoy Akademiey. – Soch. M.; L.: Gos. Tehn.-teor. – Izd-vo,– 339 p. (in Russian)
3. **Lyikov A. V.** (1967). Teoriya teploprovodnosti.– M.,– 559 p. (in Russian)
4. **Kartashov E. M.** (2008). Kraevyie zadachi dlya giperbolicheskih modeley perenosa. Matematicheskie metodyi i informatsionnyie tehnologii v himii i himicheskoy tehnologii // Vestn. MITHT. – T. 3, No.3. – P. 20-22. (in Russian)
5. **Isaev K. B.** (2004). K voprosu ob uchete konechnoy skorosti rasprostraneniya tepla v tverdom tele [Tekst] // Tr. V Minskogo mezhd. foruma MMF-2004. – Minsk: ITMO NANB, – P. 1-6. (in Russian)
6. **Kudinov V.A., Kudinov I.V.** (2010). Ob odnom metode polucheniya tochnogo analiticheskogo resheniya giperbolicheskogo uravneniya teploprovodnosti na osnove ispolzovaniya ortogonalnyih metodov // Vestn. Sam. Tehn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. Nauk. –No. 5 (21). – P. 159-169. (in Russian)
7. **Antimonov M.S.** (2008). Chislenno-analiticheskie metodyi resheniya zadach teploprovodnosti na osnove ortogonalnyih metodov vzveshennyih nevyazok Avtoref. diss… k.f.-m.n., Ulyanovskiy gos. tehn. un-t,– 24 p. (in Russian)
8. **Loginov V.S., Dorohov A.R., Repkina N.Yu.** (1997). Raschet nestatsionarnoy teploprovodnosti pri malyih chislah Fure (Fo<0,001) / // Pisma v ZhTF, – t. 23. – No. 1. – P. 22-25. (in Russian)
9. **Veynik A.I.** (1959). Priblizhennyi raschet protsessov teploprovodnosti. – M.–L.: Gosenergoizdat, – 184 p. (in Russian)

Received 04 July 2016
Approved 08 September 2016
Available in Internet 30 October 2016