

Estabilidade da solução da Equação Dissipativa de Benjamin-Bona-Mahony em Domínio com Fronteira Móvel

Stability of the solution of the Benjamin-Bona-Mahony Dissipative Equation in Domain with Moving Boundary

Vanilde Bisognin*¹, Celene Buriol² e Marcio Violante Ferreira³

¹Doutora em Matemática pela UFRJ na área de Análise Aplicada. Professora Titular do Centro Universitário Franciscano. Santa Maria, RS, Brasil

²Doutora em Matemática pela UFRJ na área de Análise Aplicada. Professora Associada do Departamento de Matemática da UFSM, Santa Maria, RS, Brasil

³Doutor em Matemática pela UFRJ na área de Análise Aplicada. Professor Adjunto do Departamento de Matemática da UFSM, Santa Maria, RS, Brasil

Resumo

Neste trabalho consideramos o problema de Cauchy associado à equação não-linear e dissipativa de Benjamin-Bona-Mahony em um Domínio limitado com Fronteira Móvel. Provamos a existência e unicidade de solução global e estudamos o seu comportamento assintótico. Utilizamos o método de Faedo-Galerkin, técnicas multiplicativas, estimativas de energia e compacidade para a obtenção dos resultados

Palavras-chave: Equação de Benjamin-Bona-Mahony, fronteira móvel, existência e unicidade de solução, estabilização.

Abstract

In this work we consider the Cauchy problem associated to nonlinear and dissipative Benjamin-Bona-Mahony equation in a bounded domain with moving boundary. We prove the existence and uniqueness of global solution and study the asymptotic behavior of the solution. We use the Faedo-Galerkin method, multiplier techniques, energy estimates and compactness for the results.

Keywords: Benjamin-Bona-Mahony equation, moving boundary, existence and uniqueness of solution, stabilization.

*vanildebisognin@gmail.com

1 Introdução

Sejam $\alpha, \beta \in C^2([0, +\infty])$ funções reais satisfazendo

$$\alpha(\tau) < \beta(\tau), \quad \forall \tau \geq 0$$

e consideremos o "intervalo móvel"

$$\Omega_\tau = \{\xi \in \mathbb{R}; \alpha(\tau) < \xi < \beta(\tau), 0 < \tau < T, T > 0\}.$$

Por Q_τ denotaremos o domínio limitado com fronteira móvel

$$Q_\tau = \{(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^2; \xi \in \Omega_\tau \text{ e } \tau \in (0, T), T > 0\}.$$

A fronteira de Q_τ é o conjunto

$$\Sigma_\tau = \bigcup_{0 < \tau < T} \Gamma_\tau \times \{\tau\},$$

onde Γ_τ é a fronteira de Ω_τ . Em Q_τ consideramos o problema

$$u_\tau - u_{\xi\xi\tau} - \eta u_{\xi\xi} + u_\xi + u^p u_\xi = 0, (\xi, \tau) \in Q_\tau, \quad (1)$$

$$u(\xi, 0) = u_0(\xi), \xi \in \Omega_0, \quad (2)$$

$$u(\xi, \tau) = 0 \text{ sobre } \Sigma_\tau, \quad (3)$$

onde $u = u(\xi, \tau)$ é uma função real das variáveis ξ e τ , Ω_0 , que aparece em (2), é o conjunto $\{\xi \in \mathbb{R}; \alpha(0) < \xi < \beta(0)\}$, η é uma constante positiva e p é um inteiro, $p \geq 1$.

Em todo o trabalho suporemos que, além de ser $\alpha, \beta \in C^2([0, +\infty])$, existem constantes c_1 e c_2 tais que

$$0 < c_1 \leq \beta(\tau) - \alpha(\tau) \leq c_2, \quad \forall \tau \geq 0 \quad (4)$$

e

$$\alpha'(\tau) \geq 0 \text{ e } \beta'(\tau) \leq 0, \quad \forall \tau \geq 0. \quad (5)$$

O problema (1)-(3) em um domínio cilíndrico e não-limitado é conhecido como o modelo matemático dissipativo que descreve a propagação de ondas longas em um canal de fundo raso e foi obtido pelos matemáticos B. Benjamin, J. L. Bona e J. J. Mahony em 1972 (ver Benjamin et al. (1972)). A equação (1) é considerada como um modelo alternativo para a equação de Korteweg-de Vries.

O problema de existência, unicidade e estabilidade de soluções foi estudado por vários autores nos últimos anos. Albert (1986) considerou o problema dissipativo em \mathbb{R} e provou a existência e unicidade de solução e obteve a taxa de decaimento, na norma de $L^\infty(\mathbb{R})$, na ordem de

$$\|u(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = O(1 + \tau)^{-\frac{1}{2}}, \text{ quando } \tau \rightarrow +\infty,$$

sem restrições ao dado inicial e $p > 1$, p inteiro.

Quando $\eta = 0$ na equação (1) e $\xi \in \mathbb{R}$, tem-se a equação dispersiva de Benjamin-Bona-Mahony (BBM) e, neste caso, Albert (1989) também obteve resultados de existência, unicidade e estabilidade de solução global. Neste caso, a taxa de decaimento, na norma de $L^\infty(\mathbb{R})$, é da ordem de

$$\|u(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = O(1 + \tau)^{-\frac{1}{3}}, \text{ quando } \tau \rightarrow +\infty,$$

desde que o dado inicial seja suficientemente pequeno e $p > 4$.

Em Bisognin e Perla Menzala (1995), os autores consideraram o modelo que descreve a propagação de ondas longas em um canal cujo fundo não é raso, ou seja, o problema

$$u_\tau - u_{\xi\xi\tau} + a(\tau)u_\xi + b(\tau)u^p u_\xi - \eta u_{\xi\xi} = 0, \\ u(\xi, 0) = u_0(\xi), \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Neste caso os coeficientes variáveis $a(\tau)$ e $b(\tau)$ estão associados com a variação da profundidade do canal. Os autores estudaram o problema dispersivo ($\eta = 0$) e o problema dissipativo, quando $\eta > 0$ e obtiveram resultados semelhantes aos de Albert (1986) e Albert (1989), porém dependentes dos coeficientes variáveis que aparecem na equação.

O problema (1)-(3) para $\xi \in [0, 1]$ e $\eta = 0$ foi estudado por Medeiros e Milla Miranda (1977), que obtiveram resultados de existência, unicidade e regularidade da solução considerando o termo não-linear geral. Ainda, para $\xi \in [0, 1]$ e considerando a equação (1) com $\eta = 0$ e condições de fronteira não homogêneas, a existência e unicidade de solução foram obtidas por Bona e Dougalis (1980). No caso em que $p = 1$, a existência e unicidade de solução em um domínio não cilíndrico foi estabelecida por Límaco et al. (2004).

No trabalho de Rincon et al. (2010) os autores consideraram o problema (1)-(3) com $p = 1$ e $\eta = 0$ e estudaram a existência, unicidade e analisaram a solução numérica em um domínio com fronteira móvel.

O objetivo de nosso trabalho é mostrar que o problema com fronteira móvel (1)-(3), com $p \geq 1$ e $\eta > 0$, é bem posto e estabelecer o decaimento exponencial da solução. A ideia para tratar o problema é, primeiramente, transformar o domínio com fronteira móvel em um domínio cilíndrico. Após a transformação do domínio, obtém-se uma equação com coeficientes dependendo das variáveis espacial e temporal. Usando o método de Faedo-Galerkin, técnicas multiplicativas, estimativas de energia e resultados de compacidade provamos a existência, unicidade e o comportamento assintótico da solução.

Ao longo do trabalho, utilizamos as seguintes notações. Por $L^p(0, 1)$ denotamos o espaço de (classes de) funções cuja potência p é integrável com norma

$$\|u\|_p^p = \int_0^1 |u(x)|^p dx, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Quando for $p = 2$, escreveremos simplesmente $\|u\|$, ou seja,

$$\|u\| = \left(\int_0^1 |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

O produto interno usual neste espaço será denotado por (\cdot, \cdot) . Assim,

$$(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x) dx.$$

Já para a norma de $L^\infty(0,1)$, que se refere ao espaço de funções essencialmente limitadas em $(0,1)$, usaremos a notação $\|\cdot\|_\infty$, isto é,

$$\|u\|_\infty = \inf\{K; |u(x)| \leq K \text{ q.s em } (0,1)\}.$$

Para cada $s \in \mathbb{R}$, $H^s(0,1)$ denotará o espaço de Sobolev de ordem s usual, conforme Adams (1975). Finalmente, por $C^k(I)$ denotamos o espaço das funções contínuas em I cujas derivadas, até ordem k , são contínuas. Várias constantes positivas são denotadas por C ou K , mas salientamos que estas podem mudar de uma linha para outra.

O trabalho está organizado do seguinte modo: na seção 2, provamos a existência e unicidade de solução para o problema (1)-(3) e na seção 3, estabelecemos o decaimento exponencial da solução.

2 Existência e unicidade de solução

O método a ser utilizado na prova da existência de solução consiste em, primeiramente, transformar o problema com fronteira móvel (1)-(3) num outro definido sobre um domínio cilíndrico. Para isso, considera-se a mudança de variável

$$x = \frac{\xi - \alpha(\tau)}{\beta(\tau) - \alpha(\tau)} \quad \text{e} \quad t = \tau. \quad (6)$$

Vê-se, facilmente, que

$$u_\tau = \left[(\ln \gamma(t))' x - \alpha'(t)\gamma(t) \right] u_x + u_t, \quad (7)$$

onde

$$\gamma(t) = \frac{1}{\beta(t) - \alpha(t)}. \quad (8)$$

Obtém-se, também,

$$u_{\xi} = \gamma(t)u_x, \quad u_{\xi\xi} = \gamma^2(t)u_{xx} \quad (9)$$

e

$$u_{\xi\xi\xi} = \left[(\ln \gamma(t))' x - \alpha'(t)\gamma(t) \right] \gamma^2(t)u_{xxx} + \quad (10)$$

$$+ 2\gamma(t)\gamma'(t)u_{xx} + \gamma^2(t)u_{xxt}. \quad (11)$$

Isto nos dá, após substituição na equação (1),

$$u_t + q(x,t)u_x - q(x,t)\gamma^2(t)u_{xxx} - 2\gamma(t)\gamma'(t)u_{xx} - \gamma^2(t)u_{xxt} - \eta\gamma^2(t)u_{xx} + \gamma(t)u_x + \gamma(t)u^p u_x = 0, \quad (12)$$

onde

$$q(x,t) = \left[(\ln \gamma(t))' x - \alpha'(t)\gamma(t) \right]. \quad (13)$$

Quanto à função $q(x,t)$, nota-se que

$$\frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} = \gamma(t) (\alpha'(t) - \beta'(t)), \quad (14)$$

$$q(0,t) = -\alpha'(t)\gamma(t) \leq 0 \quad (15)$$

e

$$q(1,t) = -\beta'(t)\gamma(t) \geq 0, \quad (16)$$

fatos esses que serão usados repetidas vezes ao longo deste trabalho. Observe-se agora que

$$x = \frac{\xi - \alpha(\tau)}{\beta(\tau) - \alpha(\tau)} = \begin{cases} 0, & \text{se } \xi = \alpha(\tau) \\ 1, & \text{se } \xi = \beta(\tau) \end{cases} \quad (17)$$

e, por (4), $0 < x < 1$. Quanto ao dado inicial, tem-se

$$u(x,0) = u_0((\beta_0 - \alpha_0)x + \alpha_0), \quad 0 < x < 1, \quad (18)$$

onde $\beta_0 = \beta(0)$ e $\alpha_0 = \alpha(0)$. Já para as condições de contorno, obtém-se

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0. \quad (19)$$

Em suma, nas novas variáveis x e t , dadas por (6), o problema (1)-(3) se escreve

$$u_t - \gamma^2(t)u_{xxt} + [q(x,t) + \gamma(t)]u_x - \frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma^2(t)q(x,t)u_{xx} \right) - a(t)u_{xx} + \gamma(t)u^p u_x = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \quad (20)$$

$$u(x,0) = v_0(x), \quad 0 < x < 1, \quad (21)$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (22)$$

onde $Q_T = (0,1) \times (0,T)$, $v_0(x) := u_0((\beta_0 - \alpha_0)x + \alpha_0)$ e

$$a(t) = \eta\gamma^2(t) + \gamma(t)\gamma'(t) \geq \eta \frac{1}{c_2^2} \geq 0. \quad (23)$$

Com relação à existência e unicidade de solução de (20)-(22) temos o seguinte

Teorema 2.1. *Suponhamos que $v_0 \in H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1)$ e que α e β satisfazem as hipóteses (4)-(5). Então, para todo $T > 0$, existe uma única $u : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ com*

$$u \in L^\infty(0,T; H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)), \quad u_t \in L^\infty(0,T; H_0^1(0,1))$$

satisfazendo

$$\int_{Q_T} \left(u_t w + \gamma^2(t) \frac{\partial u_t}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + [q(x,t) + \gamma(t)] \frac{\partial u}{\partial x} w + \right. \\ \left. + \gamma^2(t) q(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x} - a(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} w + \right. \\ \left. + \gamma(t) u^p \frac{\partial u}{\partial x} w \right) dx dt = 0, \quad \forall w \in L^2(0,T; H_0^1(0,1)). \tag{24}$$

Demonstração: Aplicaremos o método de Faedo - Galerkin, conforme Lions (1969). Seja $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ base especial de $H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$ composta pelas autofunções do problema espectral

$$\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} = \lambda_j w_j, \quad em \quad (0,1), \\ w_j(0) = w_j(1) = 0, \quad j \in \mathbb{N}$$

e consideremos o seguinte

Problema aproximado: Encontrar $u_m(t)$, da forma

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j,$$

soluções de

$$(u'_m, w_j) - \gamma^2(t) \left(\frac{\partial^2 u'_m}{\partial x^2}, w_j \right) + \\ + \left([q(x,t) + \gamma(t)] \frac{\partial u_m}{\partial x}, w_j \right) - \\ - \gamma^2(t) \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[q(x,t) \frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} \right], w_j \right) - a(t) \left(\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2}, w_j \right) + \\ + \gamma(t) \left(u_m^p \frac{\partial u_m}{\partial x}, w_j \right) = 0, \quad 1 \leq j \leq m, \tag{25}$$

$$u_m(0) = u_{0m}, \tag{26}$$

com

$$u_{0m} = \sum_{j=1}^m \alpha_{jm} w_j \rightarrow v_0 \quad em \quad H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1). \tag{27}$$

Devido à teoria geral de equações diferenciais ordinárias (Coddington e Levinson, 1955), está assegurada a existência de solução u_m de (25)-(26) num intervalo $[0, t_m)$. As estimativas a priori que serão obtidas a seguir mostrarão que $t_m = T$.

Para simplificar a notação, omitiremos a partir de agora o índice m da sequência (u_m) de soluções aproximadas. Identificaremos simplesmente por (u) .

Estimativa a priori I: Tomando-se $w_j = u$ em (25) obtém-se

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 - \gamma^2(t) \int_0^1 u_{xxt} u \, dx + \\ + \int_0^1 [q(x,t) + \gamma(t)] u_x u \, dx -$$

$$- \gamma^2(t) \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} (q(x,t) u_{xx}) u \, dx - \\ - a(t) \int_0^1 u_{xx} u \, dx + \gamma(t) \int_0^1 u^p u_x u \, dx = 0.$$

Usando-se integração por partes e as identidades (14)-(16) obtém-se, separadamente,

$$- \gamma^2(t) \int_0^1 u_{xxt} u \, dx = \gamma^2(t) \int_0^1 u_{xt} u_x \, dx = \\ = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\gamma^2(t) \|u_x\|^2) - \gamma(t) \gamma'(t) \|u_x\|^2,$$

$$\int_0^1 [q(x,t) + \gamma(t)] u_x u \, dx = \\ = \frac{1}{2} \int_0^1 [q(x,t) + \gamma(t)] \frac{\partial u^2}{\partial x} \, dx = \\ = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} (u^2) \, dx = -\frac{\gamma'(t)}{2\gamma(t)} \|u\|^2,$$

$$- \gamma^2(t) \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} (q(x,t) u_{xx}) u \, dx = \\ = \gamma^2(t) \int_0^1 q(x,t) u_{xx} u_x \, dx = \frac{\gamma^2(t)}{2} \int_0^1 q(x,t) \frac{\partial u_x^2}{\partial x} \, dx = \\ - \frac{\gamma^2(t)}{2} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} \int_0^1 u_x^2 \, dx + \frac{\gamma^2(t)}{2} [q(x,t) u_x^2]_0^1 = \\ - \frac{1}{2} \gamma(t) \gamma'(t) \|u_x\|^2 + \\ + \frac{\gamma^2(t)}{2} q(1,t) (u_x(1,t))^2 - \frac{\gamma^2(t)}{2} q(0,t) (u_x(0,t))^2 = \\ = -\frac{1}{2} \gamma(t) \gamma'(t) \|u_x\|^2 - \\ - \frac{\gamma^3(t)}{2} \beta'(t) (u_x(1))^2 + \frac{\gamma^3(t)}{2} \alpha'(t) (u_x(0,t))^2,$$

$$- a(t) \int_0^1 u_{xx} u \, dx = a(t) \|u_x\|^2$$

e

$$\gamma(t) \int_0^1 u^p u_x u \, dx = \frac{\gamma(t)}{p+2} \int_0^1 \frac{\partial u^{p+2}}{\partial x} \, dx = 0,$$

donde segue, graças à hipótese (5), que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u\|^2 + \gamma^2(t) \|u_x\|^2) \leq \frac{1}{2} \gamma(t) \gamma'(t) \|u_x\|^2 - \\ - \eta \gamma^2(t) \|u_x\|^2 + \frac{\gamma'(t)}{2\gamma(t)} \|u\|^2,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u\|^2 + \gamma^2(t) \|u_x\|^2) \leq \\ \frac{1}{2} |\gamma(t)| |\gamma'(t)| \|u_x\|^2 + \frac{|\gamma'(t)|}{2|\gamma(t)|} \|u\|^2 \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{|\gamma'(t)|}{2|\gamma(t)|} \left(\gamma^2(t) \|u_x\|^2 + \|u\|^2 \right) \leq \\ &\leq \frac{c_2 |\gamma'(t)|}{2} \left(\gamma^2(t) \|u_x\|^2 + \|u\|^2 \right), \end{aligned}$$

onde usou-se a hipótese (4). Denotando

$$\gamma_1 = \sup_{0 \leq t \leq T} |\gamma'(t)|,$$

obtém-se

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|u\|^2 + \gamma^2(t) \|u_x\|^2 \right) \leq \\ &\leq \frac{c_2 \gamma_1}{2} \left(\|u\|^2 + \gamma^2(t) \|u_x\|^2 \right). \end{aligned}$$

Aplicando-se a Desigualdade de Gronwall e lembrando que $\frac{1}{c_2} \leq \gamma^2(t)$, conclui-se que

$$\|u_m\|_{H^1(0,1)} \leq K_1(T), \quad 0 < t < t_m, \quad (28)$$

sendo K_1 dependente de T e do dado inicial v_0 , mas não de m .

Estimativa a priori II: Tomando-se agora $w_j = -u_{xx}$ em (25) obtém-se

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_x\|^2 + \frac{\gamma^2(t)}{2} \frac{d}{dt} \|u_{xx}\|^2 - \\ &- \int_0^1 [q(x,t) + \gamma(t)] u_x u_{xx} dx + \\ &+ \gamma^2(t) \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} (q(x,t) u_{xx}) u_{xx} dx + \\ &+ a(t) \|u_{xx}\|^2 - \gamma(t) \int_0^1 u^p u_x u_{xx} dx = 0. \end{aligned}$$

Observe-se que

$$\begin{aligned} &\gamma^2(t) \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} (q(x,t) u_{xx}) u_{xx} dx = \\ &- \frac{\gamma^2(t)}{2} \int_0^1 q(x,t) \frac{\partial u_{xx}^2}{\partial x} dx = \frac{1}{2} \gamma(t) \gamma'(t) \|u_{xx}\|^2 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|u_x\|^2 + \gamma^2(t) \|u_{xx}\|^2 \right) = \\ &= \int_0^1 [q(x,t) + \gamma(t)] u_x u_{xx} dx - \eta \gamma^2(t) \|u_{xx}\|^2 \\ &- \frac{1}{2} \gamma(t) \gamma'(t) \|u_{xx}\|^2 + \gamma(t) \int_0^1 u^p u_x u_{xx} dx, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|u_x\|^2 + \gamma^2(t) \|u_{xx}\|^2 \right) \leq \\ &\leq \int_0^1 [q(x,t) + \gamma(t)] u_x u_{xx} dx + \gamma(t) \int_0^1 u^p u_x u_{xx} dx, \end{aligned}$$

já que $\gamma(t) \gamma'(t) \geq 0$. Vamos estimar separadamente os dois termos do segundo membro da desigualdade anterior. Da imersão $H^1(0,1) \hookrightarrow L^\infty(0,1)$ tem-se

$$\|u\|_\infty \leq c_0 \|u\|_{H^1(0,1)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left| \gamma(t) \int_0^1 u^p u_x u_{xx} dx \right| &\leq \frac{\|u\|_\infty^p}{2} \left(\|u_x\|^2 + \gamma^2(t) \|u_{xx}\|^2 \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} c_0^p K_1^p \left(\|u_x\|^2 + \gamma^2(t) \|u_{xx}\|^2 \right), \end{aligned}$$

graças à estimativa (28). Por outro lado, notando que

$$|q(x,t)| \leq c_2 \gamma_1 + \alpha_1 \frac{1}{c_1}, \quad x \in [0,1], t \in [0,T],$$

onde $\alpha_1 = \sup_{0 \leq t \leq T} |\alpha'(t)|$, obtém-se

$$\begin{aligned} &\int_0^1 [q(x,t) + \gamma(t)] u_x u_{xx} dx \leq \\ &\leq \underbrace{\left(c_2 \gamma_1 + \frac{\alpha_1 + 1}{c_1} \right)}_C \int_0^1 |u_x| |u_{xx}| dx \leq \\ &\leq \frac{C}{2} \left(\frac{1}{\gamma^2(t)} \|u_x\|^2 + \gamma^2(t) \|u_{xx}\|^2 \right) \leq \\ &\leq \frac{C}{2} \left(c_2^2 \|u_x\|^2 + \gamma^2(t) \|u_{xx}\|^2 \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left(\|u_x\|^2 + \gamma^2(t) \|u_{xx}\|^2 \right) \leq \\ &\leq \left(c_0^p K_1^p + C \right) \gamma^2(t) \|u_{xx}\|^2 + \\ &+ \left(c_0^p K_1^p + c_2^2 C \right) \|u_x\|^2 \leq \\ &\leq \left(c_0^p K_1^p + C + c_2^2 C \right) \left(\|u_x\|^2 + \gamma^2(t) \|u_{xx}\|^2 \right). \end{aligned}$$

Conclui-se, aplicando-se a Desigualdade de Gronwall, que

$$\|u_m\|_{H^2(0,1)} \leq K_2(T), \quad 0 < t < t_m. \quad (29)$$

Estimativa a priori III: Por último toma-se $w_j = u_t$ em (25). Então,

$$\begin{aligned} &\|u_t\|^2 + \gamma^2(t) \|u_{xt}\|^2 + \int_0^1 [q(x,t) + \gamma(t)] u_x u_t dx + \\ &+ \gamma^2(t) \int_0^1 q(x,t) u_{xx} u_{xt} dx - a(t) \int_0^1 u_{xx} u_t dx \\ &+ \gamma(t) \int_0^1 u^p u_x u_t dx = 0. \end{aligned}$$

Assim, procedendo como nas estimativas anteriores, obtém-se

$$\|u_t\|^2 + \frac{1}{c_2^2} \|u_{xt}\|^2 \leq \left(c_2 \gamma_1 + \frac{\alpha_1 + 1}{c_1} \right) \|u_x\| \|u_t\| +$$

$$\begin{aligned}
 &+ \frac{1}{c_1^2} \left(c_2 \gamma_1 + \frac{\alpha_1}{c_1} \right) \|u_{xx}\| \|u_{xt}\| + \\
 &\left(\frac{\eta}{c_1^2} + \frac{\gamma_1}{c_1} \right) \|u_{xx}\| \|u_t\| + \frac{\|u\|_\infty^p}{c_1} \|u_x\| \|u_t\|.
 \end{aligned}$$

Utilizando cálculos simples e a estimativa (29) conclui-se, finalmente, que

$$\|u'_m\|_{H^1(0,1)} \leq K_3(T), \quad 0 < t < t_m. \tag{30}$$

As estimativas (28)-(30) permitem estender cada solução local u_m ao intervalo $[0, T)$. Voltando-se então a tais estimativas, válidas para $0 < t < T$, obtém-se

$$u_m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)) \tag{31}$$

e

$$u'_m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_0^1(0, 1)) \tag{32}$$

o que permite a passagem ao limite no problema aproximado (25)-(26) provando-se, assim, a existência de solução u de (20)-(22) no sentido definido em (24).

Unicidade: Usaremos o método da energia. Suponha-mos que u_1 e u_2 sejam soluções de (24) e ponhamos $u = u_1 - u_2$. Tem-se, da identidade (24),

$$\begin{aligned}
 &\int_0^t \int_0^1 \left(u_s w + \gamma^2(s) \frac{\partial u_s}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + [q(x, s) + \gamma(s)] \frac{\partial u}{\partial x} w + \right. \\
 &+ \gamma^2(s) q(x, s) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x} - a(s) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} w + \\
 &\left. + \gamma(s) \left[u_1^p \frac{\partial u_1}{\partial x} - u_2^p \frac{\partial u_2}{\partial x} \right] w \right) dx ds = 0,
 \end{aligned}$$

$\forall w \in L^2(0, T; H_0^1(0, 1))$. Em particular, com $w = u$,

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \int_0^t \int_0^1 \left\{ \frac{\partial u^2}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\gamma^2(s) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) \right\} dx ds + \\
 &- \int_0^t \int_0^1 \left\{ \gamma(s) \gamma'(s) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\} dx ds + \\
 &+ \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^1 \left\{ [q(x, s) + \gamma(s)] \frac{\partial u^2}{\partial x} \right\} dx ds + \\
 &+ \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^1 \left\{ \gamma^2(s) q(x, s) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\} dx ds - \\
 &- \int_0^t \int_0^1 \left\{ a(s) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u \right\} dx ds + \\
 &+ \frac{1}{p+1} \int_0^t \int_0^1 \left\{ \gamma(s) u \frac{\partial}{\partial x} \left(u_1^{p+1} - u_2^{p+1} \right) \right\} dx ds = 0,
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \left(\|u(t)\|^2 + \gamma^2(t) \|u_x(t)\|^2 \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} \left(\|u(s)\|^2 + \gamma^2(s) \|u_x(s)\|^2 \right) ds -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &- \eta \int_0^t \gamma^2(s) \|u_x(s)\|^2 ds + \\
 &+ \frac{1}{p+1} \int_0^t \int_0^1 \left\{ \gamma(s) \left(u_1^{p+1} - u_2^{p+1} \right) u_x \right\} dx ds. \tag{33}
 \end{aligned}$$

Quanto à última integral em (33), note-se que

$$\begin{aligned}
 &\left| \frac{1}{p+1} \int_0^t \int_0^1 \left\{ \gamma(s) \left(u_1^{p+1} - u_2^{p+1} \right) u_x \right\} dx ds \right| \leq \\
 &\leq \int_0^t \int_0^1 |\gamma(s)| (|u_1|^p + |u_2|^p) |u_1 - u_2| |u_x| dx ds \leq \\
 &\leq K \int_0^t \int_0^1 |\gamma(s)| \|u\| \|u_x\| dx ds \leq \\
 &\leq \frac{K}{2} \int_0^t \left(\|u(s)\|^2 + \gamma^2(s) \|u_x(s)\|^2 \right) ds,
 \end{aligned}$$

onde

$$K = \left(\|u_1\|_{L^\infty(Q_T)}^p + \|u_2\|_{L^\infty(Q_T)}^p \right).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 &\|u(t)\|^2 + \gamma^2(t) \|u_x(t)\|^2 \leq \\
 &\leq \int_0^t \left(K + \frac{|\gamma'(s)|}{|\gamma(s)|} \right) \left(\|u(s)\|^2 + \gamma^2(s) \|u_x(s)\|^2 \right) ds,
 \end{aligned}$$

de onde conclui-se, utilizando-se a Desigualdade de Gronwall, que

$$\|u(t)\|^2 + \gamma^2(t) \|u_x(t)\|^2 = 0$$

e, portanto, $u_1 = u_2$. ■

Voltando-se agora às antigas variáveis ξ e τ obtém-se o seguinte resultado de existência e unicidade de solução para o problema (1)-(3):

Teorema 2.2. *Se $u_0 \in H_0^1(\Omega_0) \cap H^2(\Omega_0)$ então, para todo $T > 0$, existe uma única função $u : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo*

$$u \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega_\tau) \cap H_0^1(\Omega_\tau)), \quad u_\tau \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega_\tau)),$$

$$\int_{Q_\tau} (u_\tau w + u_{\xi\tau} w_\xi - \eta u_{\xi\xi} w + u_\xi w + u^p u_\xi w) d\xi d\tau = 0, \tag{34}$$

$\forall w \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega_\tau))$ e

$$u(\xi, 0) = u_0(\xi), \quad \forall \xi \in \Omega_0. \tag{35}$$

3 Comportamento assintótico

Passamos agora ao estudo do comportamento assintótico da solução do problema (1)-(3) obtida na seção anterior. Assim como na prova da existência de solução, trabalharemos com o problema transformado (20)-(22). O principal resultado desta seção é apresentado a seguir.

Teorema 3.1. *Seja u a solução do problema (1)-(3) obtida no Teorema 2.2. Então existem constantes $C > 0$ e $K > 0$ tal que*

$$\|u(\tau)\|_{H_0^1(\Omega_\tau)}^2 \leq C \|v_0\|_{H_0^1(0,1)}^2 e^{-K\tau}, \quad \forall \tau > 0,$$

onde $v_0(x) = u_0((\beta_0 - \alpha_0)x + \alpha_0)$.

Demonstração: Sabemos, do Teorema 2.1, que a solução $u : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ com

$$u \in L^\infty(0,T; H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)), \quad u_t \in L^\infty(0,T; H_0^1(0,1))$$

satisfaz

$$\begin{aligned} & \int_0^1 u_t w \, dx + \gamma^2(t) \int_0^1 \frac{\partial u_t}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \, dx + \\ & \int_0^1 [q(x,t) + \gamma(t)] \frac{\partial u}{\partial x} w \, dx + \gamma^2(t) \int_0^1 q(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x} \, dx \\ & - a(t) \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} w \, dx + \gamma(t) \int_0^1 u^p \frac{\partial u}{\partial x} w \, dx = 0, \end{aligned} \quad (36)$$

$\forall w \in L^2(0,T; H_0^1(0,1))$.

Considerando $w = u$ em (36) e utilizando argumentos análogos ao da Estimativa I da demonstração da existência de solução obtém-se a identidade

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^1 u^2 \, dx \right\} + \frac{\gamma^2(t)}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^1 u_x^2 \, dx \right\} + \\ & + \frac{\gamma(t)}{2} (\beta'(t) - \alpha'(t)) \int_0^1 u^2 \, dx + \frac{\gamma^2(t)}{2} q(1,t) u_x^2(1,t) - \\ & - \frac{\gamma^2(t)}{2} q(0,t) u_x^2(0,t) + \frac{\gamma^3(t)}{2} (\beta'(t) - \alpha'(t)) \int_0^1 u_x^2 \, dx + \\ & + a(t) \int_0^1 u_x^2 \, dx = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^1 u^2 \, dx + \gamma^2(t) \int_0^1 u_x^2 \, dx \right\} \leq \\ & \leq \frac{\gamma(t)}{2} (\alpha'(t) - \beta'(t)) \int_0^1 u^2 \, dx - \eta \gamma^2(t) \int_0^1 u_x^2 \, dx - \\ & + \frac{\gamma^3(t)}{2} (\alpha'(t) - \beta'(t)) \int_0^1 u_x^2 \, dx, \end{aligned} \quad (38)$$

onde usamos, além de (14)-(16), as identidades

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma^2(t)}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^1 u_x^2 \, dx \right\} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \gamma^2(t) \int_0^1 u_x^2 \, dx \right\} - \\ & - \gamma(t) \gamma'(t) \int_0^1 u_x^2 \, dx \end{aligned}$$

e

$$a(t) = \eta \gamma^2(t) + \gamma(t) \gamma'(t).$$

Vamos estimar separadamente cada termo do lado direito de (38). Para isso, recorde-se que, devido à hipótese (4),

$$\frac{1}{c_2} \leq \gamma(t) \leq \frac{1}{c_1}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma(t)}{2} (\alpha'(t) - \beta'(t)) \int_0^1 u^2 \, dx \leq \\ & \leq \frac{1}{2c_1} (\alpha'(t) - \beta'(t)) \int_0^1 u^2 \, dx \end{aligned} \quad (39)$$

e

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma^3(t)}{2} (\alpha'(t) - \beta'(t)) \int_0^1 u_x^2 \, dx \leq \\ & \leq \frac{1}{c_1} \frac{\gamma^2(t)}{2} (\alpha'(t) - \beta'(t)) \int_0^1 u_x^2 \, dx. \end{aligned} \quad (40)$$

De (38)-(40) obtém-se

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^1 u^2 \, dx + \gamma^2(t) \int_0^1 u_x^2 \, dx \right\} \leq \\ & \leq \frac{1}{2c_1} (\alpha'(t) - \beta'(t)) \int_0^1 u^2 \, dx - \eta \gamma^2(t) \int_0^1 u_x^2 \, dx - \\ & + \frac{\gamma^2(t)}{2c_1} (\alpha'(t) - \beta'(t)) \int_0^1 u_x^2 \, dx, \end{aligned} \quad (41)$$

Seja

$$f(t) = \int_0^1 u^2 \, dx + \gamma^2(t) \int_0^1 u_x^2 \, dx.$$

Com esta notação, a desigualdade (41) se escreve

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \{f(t)\} \leq \frac{1}{c_1} (\alpha'(t) - \beta'(t)) f(t) - \\ & - 2\eta \gamma^2(t) \int_0^1 u_x^2 \, dx. \end{aligned} \quad (42)$$

Da desigualdade de Poincaré tem-se

$$- \int_0^1 u^2 \, dx \geq - \int_0^1 u_x^2 \, dx.$$

Disto, e de (42), segue que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \{f(t)\} \leq \frac{1}{c_1} (\alpha'(t) - \beta'(t)) f(t) - \\ & - \eta \gamma^2(t) \int_0^1 u^2 \, dx - \eta \gamma^2(t) \int_0^1 u_x^2 \, dx \\ & \leq \frac{1}{c_1} (\alpha'(t) - \beta'(t)) f(t) - \\ & - \frac{\eta}{c_2^2} \int_0^1 u^2 \, dx - \eta \gamma^2(t) \int_0^1 u_x^2 \, dx. \end{aligned} \quad (43)$$

Tomando

$$c_3 = \min \left\{ \frac{1}{c_2^2}, 1 \right\}$$

obtém-se, de (43),

$$\frac{d}{dt} \{f(t)\} \leq \frac{1}{c_1} (\alpha'(t) - \beta'(t)) f(t) - c_3 \eta f(t),$$

isto é

$$\frac{d}{dt} \{f(t)\} - \left[\frac{1}{c_1} (\alpha'(t) - \beta'(t)) - c_3\eta \right] f(t) \leq 0. \quad (44)$$

Multiplicando (44) por

$$e^{-\int_0^t \left[\frac{1}{c_1} (\alpha'(s) - \beta'(s)) - c_3\eta \right] ds}$$

chega-se à desigualdade

$$\frac{d}{dt} \left\{ f(t) e^{-\int_0^t \left[\frac{1}{c_1} (\alpha'(s) - \beta'(s)) - c_3\eta \right] ds} \right\} \leq 0. \quad (45)$$

Resolvendo a inequação diferencial (45) obtém-se

$$\begin{aligned} f(t) &\leq f(0) e^{\int_0^t \left[\frac{1}{c_1} (\alpha'(s) - \beta'(s)) - c_3\eta \right] ds} = \\ &= f(0) e^{\frac{1}{c_1} (\alpha(t) - \beta(t) - \alpha(0) + \beta(0))} e^{-c_3\eta t} \leq \\ &\leq f(0) e^{\left(-1 + \frac{c_2}{c_1}\right)} e^{-c_3\eta t} \leq \\ &\leq f(0) e^{\frac{c_2}{c_1}} e^{-c_3\eta t}. \end{aligned} \quad (46)$$

Observe-se agora que

$$\begin{aligned} \int_0^1 u^2 dx + \gamma^2(t) \int_0^1 u_x^2 dx &\geq \\ &\geq \int_0^1 u^2 dx + \frac{1}{c_2^2} \int_0^1 u_x^2 dx \geq \\ &\geq c_3 \left(\int_0^1 u^2 dx + \int_0^1 u_x^2 dx \right). \end{aligned}$$

Disto, e de (46), conclui-se que

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{H_0^1(0,1)}^2 &= \int_0^1 u^2 dx + \int_0^1 u_x^2 dx \leq \\ &\leq \left[\int_0^1 v_0^2(x) dx + \gamma^2(0) \int_0^1 u_x^2(x,0) dx \right] \frac{e^{\frac{c_2}{c_1}}}{c_3} e^{-c_3\eta t} \leq \\ &\leq \left[\int_0^1 v_0^2(x) dx + \frac{1}{c_2^2} \int_0^1 u_x^2(x,0) dx \right] \frac{e^{\frac{c_2}{c_1}}}{c_3} e^{-c_3\eta t} \leq \\ &\leq \frac{c_4}{c_3} \left[\int_0^1 v_0^2(x) dx + \int_0^1 u_x^2(x,0) dx \right] e^{\frac{c_2}{c_1}} e^{-c_3\eta t} = \\ &= C \|v_0\|_{H_0^1(0,1)}^2 e^{-Kt}, \end{aligned} \quad (47)$$

onde $c_4 = \max\{1, \frac{1}{c_2^2}\}$, $C = \frac{c_4}{c_3} e^{\frac{c_2}{c_1}}$ e $K = c_3\eta$. Retornando às variáveis originais ξ e τ e usando (47) segue o resultado. ■

4 Conclusões

O resultado principal apresentado neste artigo está relacionado ao problema de existência, unicidade e comportamento assintótico da solução da equação dissipativa

do tipo BBM em um domínio com fronteira móvel. Nossos resultados de decaimento diferem daqueles obtidos por Albert (1986) e Albert (1989), quando considerou o domínio cilíndrico e $x \in \mathbb{R}$, obtendo decaimento algébrico.

Como continuidade deste trabalho, novos problemas podem ser propostos, como considerar um sistema de equações de BBM dissipativo e estudar o comportamento assintótico das soluções e também estabelecer a análise numérica das mesmas.

Agradecimentos

Este trabalho é uma homenagem dos autores pela comemoração dos 35 anos da Revista Ciência e Natura, da qual a primeira autora foi editora chefe. Os autores agradecem o convite para a participação nessa edição especial.

Referências

- Adams, R. A., 1975. Sobolev Spaces. Academic Press.
- Albert, 1986. Dispersion of low-energy waves for the generalized benjamin-bona-mahony equation. J. Differential Equations 63 (1), 117–134.
- Albert, J., 1989. On the decay of solutions of the generalized benjamin-bona-mahony equations. J. Math. Anal. Appl. 141 (2), 527–537.
- Benjamin, T. B., Bona, J. L., Mahony, J. J., 1972. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems. Philos. Trans. Roy. Soc. London 272 (1220), 47–78.
- Bisognin, V., Perla Menzala, G., 1995. Asymptotic behaviour of nonlinear dispersive models with variable coefficients. Ann. Mat. Pura Appl 168 (4), 219–235.
- Bona, J. L., Dougalis, V. A., 1980. An initial and boundary value problem for a model equation for propagation of long waves. J. Math. Anal. Appl. 75 (2), 503–522.
- Coddington, E. A., Levinson, N., 1955. Theory of ordinary differential equations. McGraw-Hill.
- Límaco, J., Clark, H. R., Medeiros, L. A., 2004. On equations of benjamin-bona-mahony type. Nonlinear Anal. 59 (8), 1243–1265.
- Lions, J. L., 1969. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Gauthier-Villars.
- Medeiros, L. A., Milla Miranda, M., 1977. Weak solutions for a nonlinear dispersive equation. J. Math. Anal. Appl. 59 (3), 432–441.

Rincon, M. A., Límaco, J., Vale, R., 2010. Analysis and numerical solution of benjamin-bona-mahony equation with moving boundary. *Appl. Math. Comput.* 216 (1), 138–148.