Ciência e Natura, Santa Maria, v. 37 Ed. Especial PROFMAT, 2015, p. 608–616
Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas - UFSM
ISSN impressa: 0100-8307 ISSN on-line: 2179-460X

Geometria e Trigonometria: Possibilidades de um Vínculo Vantajoso

Geometry and Trigonometry: Possibilities of an Advantageous Bond

Alberto Martin Martinez Castaneda[1]

[1]Pós-doutorado na UFRGS (2003). Professor Associado IV do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Roraima, Professor associado do Núcleo de Estudos Comparados da Amazônia e do Caribe (NECAR) da Universidade Federal de Roraima, Brasil
acastaneda@uol.com.br

Resumo

A relação entre a Geometria e a Trigonometria pode ir muito além do clássico problema que envolve as duas áreas no ensino básico, que é a resolução de triângulos. As possibilidades de uso da Geometria a serviço da Trigonometria ou da Trigonometria a serviço da Geometria são muitas. Há uma tendência para separá-las por limites rígidos, afetando a cooperação entre os métodos e técnicas de ambas as áreas na solução de certos problemas matemáticos, não obrigatoriamente limitados a uma das áreas, por exemplo, os problemas propostos nas Olimpíadas. Neste trabalho mostramos algumas dessas possibilidades trabalhando com exemplos em que a partir de um resultado geométrico obtemos determinados resultados trigonométricos ou, a partir de um resultado trigonométrico obtemos determinado resultado geométrico. Também apresentaremos a solução de alguns problemas geométricos utilizando ambos os métodos.

Palavras-chave: *Geometria. Trigonometria, métodos geométrico, métodos trigonométricos.*

Abstract

The relationship between geometry and trigonometry can go far beyond the classic problem involving the two areas in basic education, which is the resolution of triangles. Possibilities of using the geometry in the service of Trigonometry, or the Trigonometry in the service of Geometry, are many. There is a tendency to separate them by rigid boundaries, affecting cooperation among the methods and techniques of both areas in solving certain mathematical problems, not necessarily limited to one area, for example, the problems posed in the Olympics. In this paper we show some of these possibilities, working with examples where from a geometric result we obtain certain trigonometric results, or, from a trigonometric result we obtain some geometric result. We also present the solution of some geometric problems using both methods.

Keywords: *Geometry, trigonometry, trigonometric methods, geometric methods.*

submissão: 2014-06-30 Aceito: 2015-03-04

1 Introdução

Este artigo está baseado no trabalho de conclusão do Curso de Mestrado Profissionalizante em Matemática (PROFMAT) do primeiro autor, orientado pelo segundo autor, na Universidade Federal de Roraima (UFRR) e defendido em abril de 2014. O objetivo geral da dissertação, intitulada *Trigonometria e Geometria: Uma Abordagem Conjunta* é mostrar a relação estreita que existe entre a Geometria e a Trigonometria e como cada uma destas áreas da Matemática pode contribuir com seus métodos e técnicas para a demonstração de proposições e a resolução de problemas da outra área, aportando elegância, brevidade e destacando certos aspectos de forma mais clara.

No Ensino Fundamental tradicionalmente não são exploradas as possibilidades e a riqueza da relação entre a Geometria e a Trigonometria, se limitando basicamente à definição das razões trigonométricas diretas e posteriormente, no Ensino Médio, ao estudo das relações métricas conhecidas como Lei dos Senos e Lei dos Cossenos e os tradicionais problemas de resolução de triângulos.

O livro intitulado *Trigonometric Delights* da autoria de Eli Maor inspirou a dissertação e constituiu sua principal fonte bibliográfica.

2 A Geometria ao serviço da Trigonometria. O Teorema de Ptolomeu

Nesta seção ilustramos a relação entre a Geometria e a Trigonometria, no sentido "a Geometria ao serviço da Trigonometria". Apresentaremos algumas proposições trigonométricas importantes que podem ser obtidos com elegância e simplicidade baseando-se no chamado Teorema de Ptolomeu, atribuído a Cláudio Ptolomeu, matemático e astrônomo grego do século II d.C. e que trata sobre quadriláteros inscritíveis.

Em Maor (2002), além do Teorema de Ptolomeu se aplica criativamente o teorema que relaciona as medidas dos ângulos inscrito e central que subtendem um mesmo arco numa circunferência.

Teorema 1 (Teorema de Ptolomeu). Se $ABCD$ é um quadrilátero inscritível de diagonais AC e BD (figura 1), então

$$AB.CD+AD.BC=AC.BD \qquad (1)$$

Isto é, o teorema nos diz que num quadrilátero qualquer inscrito num círculo, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos.

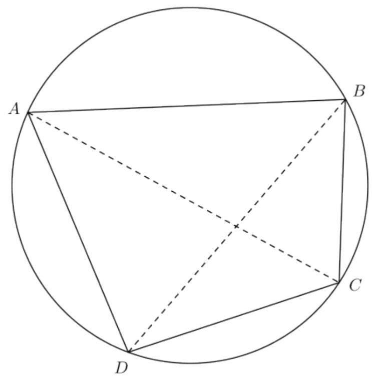

Figura 1: Quadrilátero inscrito num círculo
Fonte: Autor

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em (NETO, 2013, p. 179).

Dado um triângulo retângulo qualquer, pode ser construído um retângulo que tenha sua hipotenusa como diagonal. Na figura 2 mostra-se um triângulo ABC retângulo em B e o retângulo $ABCD$ construído a partir dele. Sabe-se da Geometria que todo retângulo é inscritível. Então, a equação (1) ficaria:

$$\left(AC\right)^2=\left(AB\right)^2+\left(BC\right)^2 \qquad (2)$$

que é o conhecido Teorema de Pitágoras.

Mostraremos a seguir a dedução da Relação Trigonométrica Fundamental a partir do Teorema de Ptolomeu.

2.1 Relação Fundamental da Trigonometria

Consideremos o retângulo $ABCD$ inscrito no círculo de diâmetro unitário mostrado na figura 2.

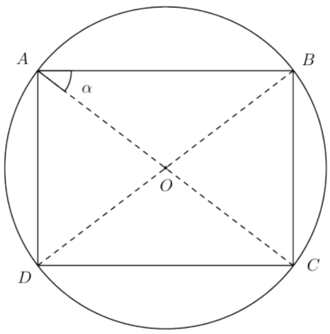

Figura 2: Retângulo inscrito no círculo de diâmetro unitário.
Fonte: MAOR (2002)

Provemos primeiro que as diagonais do retângulo coincidem com o diâmetro do círculo: Em efeito, cada um dos ângulos internos do retângulo é um ângulo reto inscrito no círculo. Tomemos um deles, digamos o $\angle ADC$, que subtende a corda *AOC* e o arco *ABC*. O ângulo central $\angle AOC$ correspondente a esse arco mede $2 \cdot 90°$=180°. Portanto, a corda *AOC* é um diâmetro. Raciocinando em forma análoga resulta que *BOD* é também um diâmetro.

Referindo-nos à figura 2, se fizermos $\angle BAC$ $=\alpha$, temos que $\dfrac{AB}{AC} = \cos\alpha$.

Como *AC*=1, segue que $AB = \cos\alpha$. Analogamente, obtém-se que $BC = \operatorname{sen}\alpha$. Dessa maneira, a equação 2 se transforma em

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \tag{3}$$

A equação obtida em (3) é a conhecida relação fundamental da trigonometria e aqui poderia ser interpretada como um equivalente trigonométrico do Teorema de Pitágoras.

Prosseguindo vamos ver o que mais o Teorema de Ptolomeu tem para nos revelar de informações trigonométricas.

2.2 Uma Interpretação Trigonométrica do Teorema de Ptolomeu: seno da soma e da diferença de dois ângulos

Seja *ABCD* um quadrilátero inscritível tal que uma de suas diagonais coincida com um diâmetro do círculo de diâmetro unitário e centro *O* que o circunscreve. Suponhamos que *AC* seja a diagonal coincidente com o diâmetro. Denotemos por α e β os ângulos $\angle BAC$ e $\angle CAD$, respectivamente (cf. figura 3).

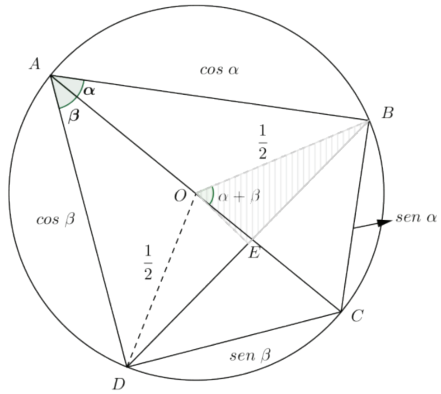

Figura 3: Seno da soma de dois ângulos
Fonte: MAOR (2002)

Observe que os ângulos $\angle ABC$ e $\angle ADC$ são retos visto que subtendem o diâmetro *AC*. É imediato dos triângulos *ABC* e *ACD* que

(*i*) $BC = \operatorname{sen}\alpha$
(*ii*) $AB = \cos\alpha$
(*iii*) $CD = \operatorname{sen}\beta$
(*iv*) $AD = \cos\beta$

Vamos mostrar que

(*v*) $BD = \operatorname{sen}(\alpha + \beta)$.

Demonstração:

Note que o triângulo *BOD* é isósceles de base *BD*. Seja *E* o pé da perpendicular bissetriz baixada de *O* sobre *BD*. Obtemos o triângulo *OBE* que é retângulo de hipotenusa *OB*=$\dfrac{1}{2}$ (*OB* é um raio), como aparece destacado na figura 3. O $\angle BOD$ é central e subtende o mesmo arco que o $\angle BAD = \alpha + \beta$, logo sua medida é $2(\alpha+\beta)$. Então, o $\angle BOE = \alpha + \beta$ e tem-se que $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \dfrac{EB}{1/2}$. Mas $EB = \dfrac{BD}{2}$, logo resulta que $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = BD$.

Pelo Teorema de Ptolomeu no quadrilátero *ABCD* têm-se $AC \cdot BD = BC \cdot AD + AB \cdot CD$.

Substituindo acima as igualdades $(i), \ldots, (v)$ e lembrando que *AC*=1, segue a fórmula da adição de arcos para a função seno:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha.\cos\beta \tag{4}$$

Abordemos agora o caso em que um dos lados do quadrilátero $ABCD$ coincide com um diâmetro, como apresentado na figura 4.

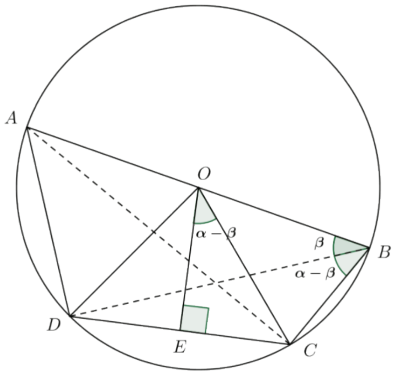

Figura 4: Seno da diferença de dois ângulos
Fonte: MAOR (2002)

Veja que os ângulos $\angle ADB$ e $\angle ACB$ são retos, já que subtendem um diâmetro. Sejam $\angle ABC=\alpha$ e $\angle ABD=\beta$. Daí $\angle DBC=\alpha-\beta$. Dos triângulos ADB e ACB se inferem as seguintes relações:

(i) $AD = \operatorname{sen}\beta$
(ii) $BD = \cos\beta$
(iii) $AC = \operatorname{sen}\alpha$
(iv) $BC = \cos\alpha$

Provemos que

v) $DC = \operatorname{sen}(\alpha-\beta)$.

***Demonstração*:**

Com referência à figura 4, traçam-se os raios OD e OC e a perpendicular bissectriz OE a DC, ficando determinado o DOC, isósceles de base DC. Note que $\angle DBC = \alpha - \beta = \dfrac{\angle DOC}{2}$, pois $\angle DBC$ é um ângulo inscrito que subtende o mesmo arco que o subtendido pelo ângulo central $\angle DOC$. Como OE é bissetriz do $\angle DOC$, temos que $\angle EOC = \alpha - \beta$. Segue do triângulo EOC que

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \frac{EC}{OC} = \frac{DC/2}{1/2} = DC$$

Utilizando agora os resultados de $(i), \ldots, (v)$ e o teorema de Ptolomeu, obtemos a fórmula do seno da diferença de dois ângulos:

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\operatorname{sen}\beta \qquad (5)$$

3 A Trigonometria ao serviço da Geometria. Uma Prova Trigonométrica do Teorema de Steiner-Lehmus

Nesta seção, como indicado no título, ilustraremos a aplicação dos métodos trigonométricos para provar proposições de índole geométrica. Dentre várias opções escolhemos o Teorema de Steiner-Lehmus.

Este teorema foi formulado pelo matemático alemão Daniel Christian Ludolph Lehmus e posteriormente demonstrado por Jakob Steiner, matemático suíço. Segundo HAJJA, "a declaração desafiadora desse teorema tem atraído muita atenção desde 1840, quando o professor Lehmus de Berlin escreveu a Sturm pedindo uma prova puramente geométrica". HAJJA diz ainda que, "desde então um grande número de pessoas, incluindo vários matemáticos de renome, teve interesse no problema, resultando em cerca de 80 diferentes provas". Em função do nosso objetivo apresentamos uma demonstração do teorema (abaixo enunciado) que utiliza recursos da trigonometria.

Teorema 2 (Steiner-Lehmus). Seja ABC um triângulo qualquer e BE e CD bissetrizes internas desse triângulo. Se $BE = CD$, então o triângulo ABC é isósceles (*Vide* Figura 5).

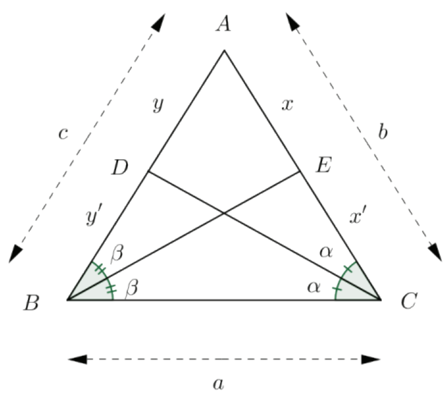

Figura 5: Teorema de Steiner-Lehmus
Fonte: HAJJA (2008)

***Demonstração*:** Sejam BE e CD as bissetrizes dos ângulos internos $\angle ABC$ e $\angle ACB$, respectivamente, do triângulo ABC cujos lados medem $a = BC$, $b = AC$ e $c = AB$ como mostra a

Figura 5. Definimos conforme as notações dessa figura:

$\angle ABC = 2\beta$, $\angle ACB = 2\alpha$, $x = AE$, $x' = EC$, $y = AD$ e $y' = DB$.

Suponhamos $\angle ABC \neq \angle ACB$, sem perda de generalidade assumamos que $\angle ACB > \angle ABC$ e daí $c > b$. Consideremos a diferença das razões $\frac{AC}{AE}$ e $\frac{AB}{AD}$:

$$\frac{AC}{AE} - \frac{AB}{AD} = \frac{b}{x} - \frac{c}{y} = \frac{x+x'}{x} - \frac{y+y'}{y} =$$

$$\frac{xy + x'y - xy - xy'}{xy} = \frac{x'y - xy'}{xy} = \frac{x'}{x} - \frac{y'}{y} \qquad (6)$$

Agora, pelo teorema da bissetriz interna, fazendo referência a Figura 5, temos da bissetriz BE que $\frac{x}{c} = \frac{x'}{a}$ e daí

$$\frac{a}{c} = \frac{x'}{x} \qquad (7).$$

Da bissetriz CD, resulta $\frac{y}{b} = \frac{y'}{a}$, ou

$$\frac{a}{b} = \frac{y'}{y} \qquad (8).$$

Substituindo (7) e (8) em (6) e tendo em conta que como $c > b$ resulta $\frac{a}{c} < \frac{a}{b}$, chegamos ao resultado

$$\frac{b}{x} - \frac{c}{y} = \frac{x'}{x} - \frac{y'}{y} = \frac{a}{c} - \frac{a}{b} < 0,$$

de onde resulta

$$\frac{b}{x} < \frac{c}{y} \qquad (9)$$

Calculando agora o quociente entre as razões $\frac{AC}{AE}$ e $\frac{AB}{AD}$ tem-se que

$$\frac{AC/AE}{AB/AD} = \frac{b}{x} \div \frac{c}{y} = \frac{b}{c} \cdot \frac{y}{x} \qquad (10)$$

Aplicando a Lei dos Senos no triângulo ABC da Figura 5

$$\frac{b}{\text{sen}\angle ABC} = \frac{c}{\text{sen}\angle ACB}$$

$$b \cdot \text{sen}\angle ACB = c \cdot \text{sen}\angle ABC$$

$$\frac{b}{c} = \frac{\text{sen}\angle ABC}{\text{sen}\angle ACB} \qquad (11)$$

Substituímos em (10) o resultado obtido em (11), e em seguida usamos a fórmula do ângulo duplo e depois a Lei dos Senos nos triângulos ABE e ADC. Resulta:

$$\frac{b}{x} \div \frac{c}{y} = \frac{\text{sen}\angle ABC}{\text{sen}\angle ACB} \cdot \frac{y}{x} = \frac{\text{sen}2\beta}{\text{sen}2\alpha} \cdot \frac{y}{x} =$$

$$= \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \cdot \frac{\text{sen}\angle BAC}{BE} \cdot \frac{CD}{\text{sen}\angle BAC} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$$

> 1,

já que $c > b$ implica $\cos\beta > \cos\alpha$.

Como $\frac{b}{x} \div \frac{c}{y} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} > 1$, tem-se que

$$\frac{b}{x} > \frac{c}{y} \qquad (12)$$

Mas, a conjunção de (9) e de (12) é uma contradição. Portanto, o teorema fica provado.

4 Resolução de Problemas de Geometria usando o método geométrico ou o método trigonométrico

Nesta seção apresentaremos alguns problemas de geometria cuja solução será dada de duas maneiras: uma por técnicas geométricas e a outra por técnicas trigonométricas. Com isso, pretendemos mostrar que os problemas geométricos admitem a possibilidade de serem resolvidos não exclusivamente se servindo de métodos puramente geométricos, mas existe a alternativa de empregar técnicas trigonométricas, ou até usar ferramentas de ambas as áreas conjuntamente num dado problema.

PROBLEMA 1. $ABCD$ é um quadrilátero inscrito e P é um ponto da diagonal AC tal que $\angle ABP = \angle CBD = \theta$ e $\angle CBD = \angle ADP = \alpha$, como mostra a Figura 6. Calcule $\frac{AP}{PC}$.

Observação: Este problema foi tomado no site Sobregeometrias do post intitulado *"Problemas de Geometría resueltos por*

Trigonometría", cujo endereço será disponibilizado nas referências.

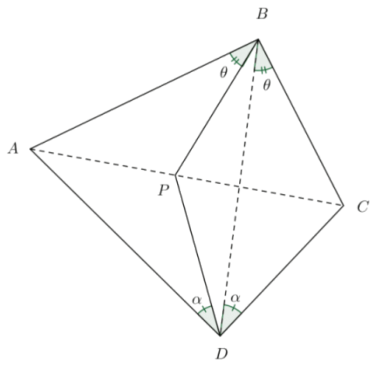

Figura 6:
Fonte: CEPREUNI (2012)

(*i*) Resolução por Geometria

Para auxiliar na resolução consideremos o quadrilátero *ABCD* inscrito num círculo, como mostra a figura 7.

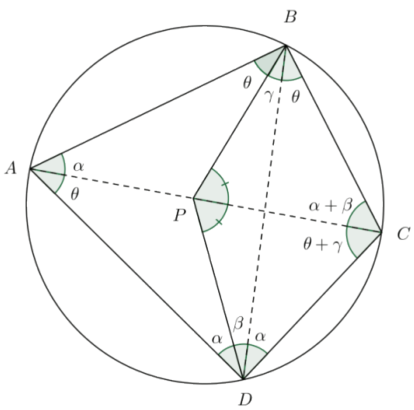

Figura 7:
Fonte: CEPREUNI (2012)

Em Geometria é conhecida a proposição que estabelece que num dado círculo, todos os ângulos inscritos que subtendem a mesma corda são iguais, pelo que $\angle BAC = \angle BDC = \alpha$ e $\angle CAD = \angle CBD = \theta$. Dessa forma, os triângulos *APD* e *APB* são semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo).

Então, $\dfrac{AP}{PD} = \dfrac{PB}{AP} \Rightarrow AP^2 = PB.PD$ (13)

Se $\angle APD = \angle APB = \delta$, então, $\angle CPD = \angle CPB = 180° - \delta$. Então, $\angle ACD = \angle ABD = \theta - \gamma$, e $\angle ADB = \alpha + \beta$. Temos que os triângulos *PCD* e *PBC* são semelhantes (pois, $\angle CPD = \angle CPB$, $\angle PCD = \angle PBC$ e $\angle PDC = \angle PCB$). Daí,

$$\frac{PC}{PD} = \frac{PB}{PC} \Rightarrow PC^2 = PB.PD \qquad (14)$$

Dos resultados obtidos em (13) e (14), chegamos ao resultado pretendido

$$AP^2 = PC^2 \Rightarrow \frac{AP}{PC} = 1$$

(*ii*) Resolução por Trigonometria

Vamos primeiro aplicar a Lei dos Senos aos triângulos *APD* e *PCD*.

No triângulo *APD*:

$$\frac{AP}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{PD}{\operatorname{sen}\theta} \text{ ou } PD = \frac{AP \cdot \operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad (15)$$

No triângulo *PCD*:

$$\frac{PC}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} = \frac{PD}{\operatorname{sen}(\theta+\gamma)}, \text{ ou}$$

$$PD = \frac{PC \cdot \operatorname{sen}(\theta+\gamma)}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} \qquad (16)$$

Igualando os resultados obtidos para *PD* em (15) e (16):

$$\frac{AP \cdot \operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{PC \cdot \operatorname{sen}(\theta+\gamma)}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}$$

$$AP \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{sen}(\alpha+\beta) = PC \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}(\theta+\gamma)$$

$$\frac{AP}{PC} = \frac{\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}(\theta+\gamma)}{\operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{sen}(\alpha+\beta)} \qquad (17)$$

Aplicando, agora, a Lei dos Senos aos triângulos *APB* e *PBC*, obtemos, respectivamente, os resultados:

$$\frac{AP}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{PB}{\operatorname{sen}\alpha} \Rightarrow PB = \frac{AP \cdot \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\theta} \qquad (18)$$

e $\dfrac{PC}{\operatorname{sen}(\gamma+\theta)} = \dfrac{PB}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} \Rightarrow$

$$PB = \frac{PC \cdot \operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}(\gamma+\theta)} \qquad (19)$$

Igualando os resultados encontrados para *PB* em (18) e (19):

$$\frac{AP \cdot \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{PC \cdot \operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}(\gamma+\theta)}$$

$$AP \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}(\alpha+\beta) = PC \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{sen}(\alpha+\beta)$$

$$\frac{AP}{PC}=\frac{\text{sen}\theta\cdot\text{sen}(\alpha+\beta)}{\text{sen}\alpha\cdot\text{sen}(\gamma+\theta)} \qquad (20)$$

Mais uma vez comparando os resultados encontrados em (18) e (19), temos

$$\frac{\text{sen}\alpha\cdot\text{sen}(\theta+\gamma)}{\text{sen}\theta\cdot\text{sen}(\alpha+\beta)}=\frac{\text{sen}\theta\cdot\text{sen}(\alpha+\beta)}{\text{sen}\alpha\cdot\text{sen}(\gamma+\theta)}$$

$$\left(\text{sen}\alpha\cdot\text{sen}(\theta+\gamma)\right)^2=\left(\text{sen}\theta\cdot\text{sen}(\alpha+\beta)\right)^2$$

$$\text{sen}\alpha\cdot\text{sen}(\theta+\gamma)=\text{sen}\theta\cdot\text{sen}(\alpha+\beta)$$

Voltando em (17), ou em (20), chegamos ao resultado pretendido:

$$\frac{AP}{PC}=1$$

PROBLEMA 2. Na figura 8, temos um triângulo equilátero ABC e um segundo triângulo ΔPQR cujos lados RP, PQ, QR são, respectivamente, perpendiculares aos lados AB, BC, AC do triângulo ABC. Mostre que o triângulo PQR cujos lados RP, PQ, QR são, respectivamente, perpendiculares aos lados AB, BC, AC do triângulo ABC é um triângulo equilátero.

Nota: Este problema foi retirado do Exame de Qualificação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT 2013.2.

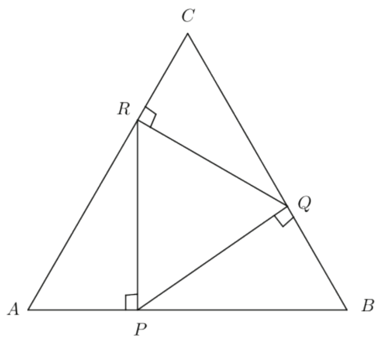

Figura 8:
Fonte: Exame de Qualificação 2013.2 - PROFMAT

(i) Resolução por Geometria

Parte (a) Como ABC é um triângulo equilátero, então, $\angle ABC = \angle ACB = \angle BAC = 60°$. Os triângulos PAR, QPB e RQC possuem um ângulo reto e um ângulo de 60°, logo o terceiro ângulo, necessariamente, mede 30°. Agora, no triângulo PQR cada ângulo interno é igual a 180° − 90° − 30° = 60°. Portanto, PQR é equilátero.

Parte (b) No triângulo QPB tracemos a mediana QT relativa ao lado PB (Figura 9). Como no triângulo retângulo a mediana relativa a hipotenusa é metade desta, então, $QT=TB$. Assim o ângulo $\angle BQT$ do triângulo BQT é igual a 60°, logo, $\angle QTB$ também mede 60° e o triângulo BQT é equilátero. Daí resulta que $PB=2BQ$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo QPB teremos

$$PQ^2+BQ^2=PB^2$$
$$PQ^2=PB^2-BQ^2$$
$$PQ^2=(2BQ)^2-BQ^2$$
$$PQ^2=4BQ^2-BQ^2$$
$$PQ=\sqrt{3}BQ \qquad (21)$$

Procedendo da mesma maneira com os triângulos PAR e RQC, obtemos

$$PR=\sqrt{3}AP \text{ e } QR=\sqrt{3}CR \qquad (22)$$

De (21) e (22) e sabendo que o triângulo PQR é equilátero temos

$$\sqrt{3}BQ=\sqrt{3}AP=\sqrt{3}CR \Rightarrow BQ=AP=CR$$

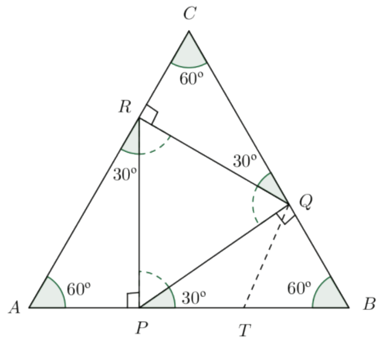

Figura 9:
Fonte: Autor

(ii) Resolução por Trigonometria

Vamos considerar os resultados obtidos na parte (a) e faremos a parte (b). Aplicando a lei dos senos ao triângulo QPB teremos

$$\frac{PQ}{\text{sen}60^0}=\frac{BQ}{\text{sen}30^0}$$
$$PQ\text{sen}30^0=BQ\text{sen}60^0$$

$$\frac{PQ}{2} = \frac{\sqrt{3}BQ}{2}$$
$$PQ = \sqrt{3}BQ$$

Repetindo o procedimento para os triângulos *PAR e R*QC encontramos $PR = \sqrt{3}AP$ e $QR = \sqrt{3}CR$, respectivamente. Como o triângulo *PQR* é equilátero, então, *BQ*=*AP*=*CR*.

Para concluir esta seção apresentaremos um problema de extremos (maximização) em geometria resolvido utilizando técnicas trigonométricas. Aparentemente não há um caminho puramente geométrico para resolvê-lo. Este problema pode ser encontrado em (ANDREESCU, 2006, p. 36).

PROBLEMA 3. Um ponto *A* está situado entre duas linhas paralelas r_1 e r_2 a uma distância $AP_1 = a$ de r_1 e $AP_2 = b$ de r_2, medidas na reta *l* perpendicular a r_1 e r_2, conforme mostrado na figura. Encontre pontos *B* em r_1 e C em r_2 tais que o triângulo acutângulo *ABC* ($0 < \alpha < 90°$) tenha área máxima (*vide* figura 10).

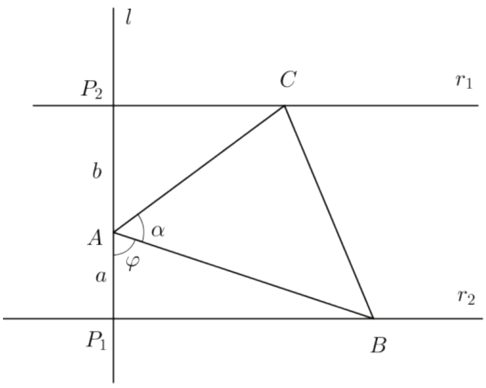

Figura 10:
Fonte: ANDREESCU (2006)

Resolução:

Denotemos por $[\Delta ABC]$ a área do triângulo *ABC*, que deve ser maximizada. Sejam $\angle BAC = \alpha$ e $\angle BAP_1 = \varphi$. Então, $\angle CAP_2 = 180° - \alpha - \varphi$.

Tem-se no triângulo retângulo AP_1B que $AB = \dfrac{a}{\cos\varphi}$ e no triângulo retângulo CP_2A, $CA = \dfrac{b}{\cos(180° - \alpha - \varphi)}$. Como $\cos(180° - \alpha - \varphi) = -\cos(\alpha + \varphi)$, $CA = -\dfrac{b}{\cos(\alpha+\varphi)}$. A área do triângulo *ABC* fica, então

$$[\Delta ABC] = \frac{1}{2}\cdot \text{sen}\alpha \cdot AB \cdot CA =$$
$$= -\frac{a\cdot b\cdot \text{sen}\alpha}{2\cos\varphi\cdot\cos(\alpha+\varphi)} \quad (23)$$

Lembrando a fórmula trigonométrica $\cos A\cdot\cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B)+\cos(A+B)\right]$ e tomando $A=\alpha+\varphi$ e $B=\varphi$, resulta que $2\cos\varphi\cdot\cos(\alpha+\varphi) = \cos\alpha + \cos(\alpha+2\varphi)$ e a equação (23) ficará

$$[\Delta ABC] = -\frac{a\cdot b\cdot \text{sen}\alpha}{\cos\alpha + \cos(\alpha+2\varphi)} \quad (24)$$

Como foi dado que $0 < \alpha < 90°$, resulta que $0 < \cos\alpha < 1$. Para que o quociente (24) seja máximo deve ser $\cos(\alpha + 2\varphi) = -1$, isto é, deve ser $\alpha + 2\varphi = 180°$. De onde, $\varphi = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$.

O valor máximo da área é:

$$[\Delta ABC] = -\frac{a\cdot b\cdot \text{sen}\alpha}{\cos\alpha - 1} = ab\cdot\frac{\text{sen}\alpha}{1-\cos\alpha} = ab\cot\frac{\alpha}{2}$$

.

5 Conclusões

Neste trabalho mostramos que há várias possibilidades em que a Trigonometria e a Geometria podem caminhar juntas, colaborando mutuamente na obtenção de resultados, sem serem consideradas áreas relativamente separadas na Matemática. Quando se aplicam métodos e técnicas de ambas as áreas na demonstração de proposições ou na resolução de problemas geométricos ou trigonométricos aumentam-se as alternativas de resolução ou demonstração, podendo-se, as vezes, chegar a uma solução mais prática e mais elegante.

As ideias expostas neste trabalho podem inspirar enfoques interessantes na abordagem didática dos conteúdos da Geometria e da Trigonometria na escola e também na preparação dos alunos para as Olimpíadas de Matemática, contribuindo para mostrar a unidade e a harmonia interna da Matemática.

Agradecimentos

Agradeço ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT e à Universidade Federal de Roraima. Agradeço também à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, pelo auxílio financeiro.

Referências

ANDREESCU, T., MUSHKAROV, O., STOYANOV, L. (2006). Geometric Problems on Maxima and Minima. Birkhauser.

BARBOSA, J. L. M. (1995). Geometria Euclidiana Plana – 9ª edição. SBM.

CEPREUNI. Problemas de Geometría resueltos por Trigonometría. (2012). Disponível em: <http://cpreuni.blogspot.com.br/2012/09/>. Último Acesso em: 30 junho 2014.

HAJJA, M. (2008). A Short Trigonometric Proof of the Steiner-Lehmus Theorem. Forum Geom. v.8, pp. 39-42.

IEZZI, G. et al. (2010). Matemática - Ciências e Aplicações. Vol. 1. Atual.

LIMA, E. L. et al. (2005). Temas e Problemas Elementares. SBM.

MAOR, E. (2002). Trigonometric Delights. E-BOOK: Princeton University Press.

NETO, A. C. M. (2013). Tópicos de Matemática Elementar: Geometria Euclidiana Plana - 2ª edição. SBM.

NETO, A. C. M. (2013) Geometria-Coleção PROFMAT - 1ª edição. SBM.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA. (2012) Biblioteca Central. Manual de Normas para Apresentação dos Trabalhos Técnicos – Científicos da UFRR.