Artigo Original *DOI:10.5902/2179460X12973*

Ciência e Natura, Santa Maria, v. 37 Ed. Especial PROFMAT, 2015, p. 342–355
Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas - UFSM
ISSN impressa: 0100-8307 ISSN on-line: 2179-460X

O problema que tornou Euler famoso

The problem that has Euler famous

Jairo Gayo[1] e Roy Wilhelm[2]

[1,2] Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Paraná, Brasil
jairogayo@yahoo.com.br, rwprobst@gmail.com

Resumo

Neste trabalho é apresentado o problema da Basileia cuja resposta tornou Leonhard Euler famoso. Apresenta a prova de Euler que por muito tempo continha uma passagem tida como incorreta, mas que após o Teorema da Fatoração de Weierstrass foi aceita. Aborda também outras resoluções para o problema, sua representação geométrica e uma aplicação. Discute também, por meio deste problema, a importância da História da Matemática para o professor desta disciplina.

Palavras-chave: *Problema da Basileia. Leonhard Euler. História da Matemática*

Abstract

In this study we present the Basel Problem whose answer has Leonhard Euler famous. Presents the Euler's Proof which long contained a passage regarded as incorrect, but that after the Weierstrass Factorization Theorem was accepted. Also addresses other resolutions to the problem, its geometric representation and an application. It also discusses, through this problem, the importance of the History of Mathematics for the teacher of this discipline

Keywords: *Basel Problem. Leonhard Euler. History of Mathematics*

Recebido: 21/02/2014 Aceito: 28/03/2014

1 Introdução

Atualmente nossa sociedade conquistou um nível de desenvolvimento tecnológico jamais visto. Além do conforto e facilidades que este desenvolvimento nos proporciona, o que mais impressiona é a velocidade com que ele ocorreu no último século. Basta pensarmos que no início do século passado voar era um sonho e que hoje jatos supersônicos dão a volta em torno da terra em menos de 6 horas ou que já é possível enviar sondas exploratórias para outros planetas.

Quem pensa que esta evolução está perto de sofrer uma desaceleração está completamente enganado, a tendência é de que cada vez mais a tecnologia se desenvolva. A modernização de produtos já existentes, surgimento de novos produtos, bem como a melhoria nos serviços que geram conforto e segurança para humanidade, tais como meios de comunicação e de transportes, são o retrato desta tendência.

Esta demanda por tecnologia exigirá que em nossa sociedade sejam formados profissionais com capacidade técnica para implementar este desenvolvimento. Estes profissionais, inevitavelmente, terão que possuir uma boa base de conhecimentos de Física, Química, Biologia, Computação e como não poderia deixar de ser, Matemática. É necessário lembrar que a ciência é a base do desenvolvimento tecnológico e que cientistas, através de trabalho de pesquisa, criaram praticamente todas as maravilhas tecnológicas de hoje.

É por isso que o currículo escolar está repleto de disciplinas da área científica. Ávila (2011) aborda o tema salientando a importância da matemática neste currículo:

> "A Matemática deve ser ensinada nas escolas porque é parte substancial de todo o patrimônio cognitivo da Humanidade. Se o currículo escolar deve levar a uma boa formação humanística, então o ensino da Matemática é indispensável para que essa formação seja completa.
>
> O ensino da Matemática se justifica ainda pelos elementos enriquecedores do pensamento matemático na formação intelectual do aluno, seja pela exatidão do pensamento demonstrativo que ela exibe, seja pelo exercício criativo da intuição, da imaginação e dos raciocínios por indução e analogia.
>
> O ensino da Matemática é também importante para dotar o aluno do instrumental necessário no estudo das outras ciências e capacitá-lo no trato das atividades práticas que envolvem aspectos quantitativos da realidade."

Neste contexto, percebe-se que a Matemática é uma das disciplinas mais importantes na formação de um profissional da área tecnológica, pois é pré-requisito no desenvolvimento das demais ciências. Porém, as dificuldades que alguns alunos têm com esta disciplina fazem com que estes busquem profissões fora desta área. Em grande parte, esta dificuldade vem da falta de professores capacitados. Na tentativa de suprir esta demanda, foi lançado em 2011 o PROFMAT, um programa de Mestrado Profissional que busca melhorar o nível de conhecimento dos professores de Matemática da rede pública.

Outras iniciativas também tomaram vulto, tais como o Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio (PAPMEM) e a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Em contrapartida, surgem diversas tendências que buscam encontrar a melhor metodologia de ensino para a disciplina. A História da Matemática vem se destacando como ferramenta básica e indispensável para o ensino de Matemática. Na referência (Cajori, 2007) encontramos célebre frase de J.W.L. Glaisher: "Estou certo de que nenhuma outra disciplina perde mais do que a Matemática quando dissociada de sua história".

Uma das principais propriedades da utilização da História da Matemática no ensino é que o aluno passa a entender a Matemática como um conhecimento dinâmico, fruto de uma evolução, repleto de fatos curiosos. O estudante, através desta percepção entende que a Matemática está aberta a avanços que se dão por meio de estudo, dedicação e criatividade.

Geralmente quando lemos alguma revista ou assistimos algum programa de televisão que tratam de avanços científicos, logo imaginamos que se trata de algo sobre Química ou Biologia e esquecemos que tais avanços também estão ocorrendo na Matemática. Os avanços da Matemática ocorrem em torno de processo e métodos de resolução de problemas, tais métodos quando encontram dificuldades em superar desafios, são traduzidos em problemas em abertos.

Ao longo da História da Matemática, foram diversos os problemas que permaneceram em aberto por anos, alguns por séculos, até que uma mente brilhante conseguisse a solução final. Atualmente são muitos os problemas que permanecem em abertos à espera de alguém que possa solucioná-los. Geralmente matemáticos que conseguem resolver um destes problemas garantem seu lugar na História da Matemática.

Um dos matemáticos que alcançou notoriedade após resolver um problema em aberto foi Leonhard Euler, após encontrar a resposta para o famoso problema da Basileia. Atualmente Euler é reconhecido como um dos mais importantes da História da Matemática, não só por ter resolvido tal problema, mas principalmente por ter contribuído com a Matemática em diversas áreas com mais de 850 trabalhos (Simmons, 2002), muitos de extrema importância.

Neste trabalho apresentamos:

- Um pouco da vida e da obra do matemático Leonhard Euler a fim de justificar sua importância para a Matemática.
- O problema da Basileia, que tornou Leonhard Euler famoso, e a solução apresentada por ele.
- Algumas de suas diversas soluções ao longo da história, as aceitas atualmente.
- A utilização da História da Matemática como ferramenta de ensino.

2 A Vida e Obra de Euler

Nesse capítulo mostraremos as principais obras de Euler, nas diversas áreas em que ele atuou, e quão importante este homem foi para a Matemática. Você vai se surpreender com a personalidade e com o exemplo de vida deste matemático que produziu muito, mesmo depois de ter ficado completamente cego.

2.1 A Vida de Euler

O matemático Leonhard Paul Euler nasceu em 1707 na Basileia, importante cidade suíça. Filho de uma família muito bem estruturada, desde cedo teve acesso a boas escolas e bons professores. Esta preocupação com os estudos do garoto se devia principalmente ao fato de que Paul Euler, pai de Leonhard, era pastor da Igreja Calvinista e sonhava que seu filho o seguisse na profissão (Boyer, 2003). Apesar de Leonhard não ter se tornado um pastor como desejava seu pai, seguiu seus preceitos religiosos por toda a vida (Simmons, 2002).

A opção de Leonhard não foi tomada por seu pai como uma afronta, pois o mesmo também havia estudado Matemática com Jakob Bernoulli (1654 - 1705), seu amigo pessoal. A proximidade da família de Euler com a família Bernoulli talvez seja o que mais influenciou interesse do jovem pela Matemática (Boyer, 2003).

Aos 14 anos de idade ingressou na Universidade da Basileia onde inicialmente estudou Medicina, Teologia e Ciências Humanas. Dois anos mais tarde, nesta mesma universidade, dedicou-se a Matemática (Simmons, 2002). Após se formar atuou, ainda na Basileia, nas áreas de Filosofia, Teologia e Matemática. Em 1727, por influência dos irmãos Daniel e Nicolas Bernoulli, filhos de Jakob Bernoulli, Euler foi convidado a integrar a Academia de Ciências São Petersburgo na Rússia, onde foi nomeado professor de Física em 1730 e de Matemática em 1733 (Simmons, 2002). Aos 28 anos de idade, perdeu a visão do olho direito o que não reduziu seu ritmo de trabalho. O que muitos especulam é que este fato ocorreu devido a uma rotina intensa de trabalho, forçando a visão até tarde da noite (Boyer, 2003).

Permaneceu na Rússia até 1741 quando foi convidado a ser professor de Matemática na Academia de Ciências de Berlim. Nesta cidade conquistou a admiração de alguns integrantes da corte do imperador da Prússia, atual Alemanha e Polônia. No entanto, devido a sua timidez, e por ter perdido um olho, tornou-se motivo de zombaria e em 1766 aceita um convite para retornar a Academia de Ciências de São Petersburgo onde trabalhou até o último dia de sua vida (Cajori, 2007).

Ainda em 1766 percebeu que, devido à catarata, estava perdendo a visão do segundo olho e, para continuar trabalhando treinou um de seus filhos para escrever enquanto ele ditava. Apesar destas condições, sua memória admirável permitiu que continuasse trabalhando sem parar (Eves, 2004). Em 1783 morre enquanto tomava chá com um de seus netos, após ter passado o dia estudando a órbita do recém descoberto planeta Urano (Simmons, 2002).

Sua vida acadêmica movimentada não o impediu de formar com Katharina Gsell uma família numerosa: tiveram ao todo 13 filhos. Segundo alguns autores, conseguia sem muitas dificuldades escrever seus artigos enquanto cuidava das crianças. "Um amigo que presenciava sua vida doméstica disse: Uma criança no colo, um gato sobre o ombro, assim escrevia ele suas obras imortais" (Garbi, 1997) .

2.2 A Obra de Euler

Falar da obra de Euler é nada menos que falar de uma obra com mais de 850 títulos, entre livros e artigos. Na História da Matemática nenhum outro estudioso produziu tanto, somente no período que permaneceu em Berlim produziu cerca de 275 trabalhos (Simmons, 2002). Euler foi tão eficiente que viu apenas cerca de 500 destes trabalhos serem publicados, a Academia de São Petersburgo levou meio século após sua morte para publicar completamente sua obra (Boyer, 2003).

Todo seu magnífico trabalho está atualmente sendo condensado e publicado pela Sociedade Suíça de Ciências Naturais e apesar de ainda não ter sido completamente organizado deverá atingir mais de 85 volumes (Eves, 2004). Suas obras eram bem variadas, entre elas se poderiam encontrar temas de Cálculo, Álgebra, Geometria além de Física e Astronomia. Muitas de suas obras tinham fins didáticos com o objetivo de tornar a Matemática desenvolvida naquele tempo acessível para alunos de Engenharia, Arquitetura e outras áreas técnicas (Boyer, 2003).

São diversas áreas em que Euler deixou sua marca, tanto que não é difícil para um estudante de Matemática se deparar com expressões do tipo Fórmula de Euler, Equação de Euler, Número de Euler, entre outras. Na Geometria, por exemplo, quem estuda sólidos geométricos se depara com a Relação de Euler para poliedros convexos: $V - A + F = 2$, onde V é o número de vértices, F o número de faces e A o número arestas (Lima et al., 2006). Perceba que apesar dos sólidos geométricos terem sido estudados desde a antiguidade, tal relação só foi descoberta por Euler no século XVIII.

Euler também provou que em um triângulo qualquer os pontos baricentro, ortocentro e circuncentro são colineares e, em sua homenagem a reta que contem os três pontos é chamada de Reta de Euler. Atualmente sabe-se que outro matemático, o inglês Robert Simson, havia provado anteriormente esta colinearidade, no entanto a homenagem a Euler foi mantida (Eves, 1992).

Em Trigonometria convencionou A, B, C como os vértices opostos aos lados a, b, c de um triângulo ABC qualquer, convencionou ainda s como semiperímetro deste triângulo e r como o raio de seu círculo inscrito (Boyer, 2003).

Apesar destas contribuições a Geometria Clássica, foi a Geometria Analítica que obteve grandes avanços com Euler. Apresentou no Volume II de *Introduction* uma extensa e eficaz abordagem ao uso de coordenadas no plano e no espaço. Sistematizou e popularizou o estudo de curvas e superfícies por meio de equações algébricas e transcendentes, em especial as quadráticas e trigonométricas (Boyer, 2003).

Na Álgebra Euler introduziu a letra i para representar a raiz quadrada de -1 (Eves, 2004):

$$i = \sqrt{-1}$$

e deu aos números complexos a forma $z = a + bi$, com a e b pertencentes ao conjunto dos números reais. Esta notação impulsionou o estudo dos números complexos, o próprio Euler observou que

$$e^{ix} = \cos\ x + i \text{ sen }\ x$$

de onde, substituindo x por π concluiu que

$$e^{i\pi} = -1$$

ou

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Assim Euler reuniu em uma só fórmula os 5 números notáveis da Matemática: 1, 0, e, i e π, além das operações de adição, multiplicação e potenciação (Eves, 2004). Esta fórmula atualmente é conhecida como Identidade de Euler.

O número e também recebeu esta notação de Euler. Acredita-se que a escolha se deve a inicial da palavra expoente (Boyer, 2003). Não é correto creditar a escolha do e por ser a inicial do sobrenome de Euler, a modéstia e a timidez jamais permitiriam a este matemático tal auto homenagem.

A função $\varphi(n)$ denominada função *fi* de Euler, determina a quantidade de números naturais menores que n e que com ele são primos entre si (Baumgart, 1992). Esta função foi desenvolvida por Euler para apresentar uma generalização do Pequeno Teorema de Fermat (Hefez, 2011) e mais tarde se mostrou uma importante ferramenta no desenvolvimento da Teoria dos Números.

As áreas da Matemática que mais evoluíram com Euler foram o Cálculo Diferencial e Integral e a Análise Matemática. Sua contribuição foi tão significativa que Boyer (2003) afirma: "Pode ser dito com justiça que Euler fez pela Análise de Newton e Leibniz o que Euclides fez pela Geometria de Eudoxo e Teaetetus, ou que Vième fizera pela Álgebra de Al-Khowarizmi e Cardano. Euler tomou o Cálculo Diferencial e o Método dos Fluxos e tornou-os parte de um ramo mais geral da Matemática que a partir dai é chamado 'Análise' - o estudo de processos infinitos. Se os antigos *Os Elementos* constituem a pedra angular da Geometria e *Al jabr wa'l muqabalah* medieval a pedra fundamental da Álgebra, então a *Introductio in Analysin Infinitorum* de Euler pode ser considerada como chave de abóbada da Análise."

Deixou sua marca na notação do Cálculo sendo o primeiro a utilizar $f(x)$ para funções e por popularizar o ∂ para representar derivadas parciais (Boyer, 1992). Não é por acaso que o físico e astrônomo François Arago, amigo de Euler, disse (Eves, 2004): "Euler poderia muito bem ser chamado, quase sem metáfora, e certamente sem hipérbole, a encarnação da Análise."

Além do já mencionado *Introductio in Analysin Infinitorum* de 1748, são também relevantes *Institutiones Calculi Differentialis* de 1755 e *Institutiones Calculi Integralis* publicado em três volumes de 1768 à 1774. Estas três obras influenciaram o estilo, a notação e o desenvolvimento do Cálculo e da Análise desde o século XVIII até os dias atuais (Eves, 2004). Inúmeras outras obras, entre artigos, e livros, foram publicadas nesta área abordando equações diferenciais, integrais indefinidas, séries convergentes e divergentes, geometria diferencial e cálculo das variações.

3 O problema da Basileia

Nesse capítulo apresentaremos um breve histórico do problema da Basileia, seu enunciado e a primeira resolução, apresentada por Leonhard Euler, com suas peculiaridades. Esta resolução surpreendeu toda comunidade Matemática da época, e fez com que Euler passasse a figurar entre os maiores matemáticos de seu tempo.

3.1 Definição do Problema

O problema que tornou Leonhard Euler famoso foi proposto inicialmente pelo matemático italiano Pietro Mengoli (1625 - 1686) em 1644 (Szpiro, 2008). Após ter consumido esforços dos maiores matemáticos do período, a solução ainda não havia surgido. Criava-se em torno deste problema um mistério semelhante ao que envolvia o Último Teorema de Fermat. Entre os gênios que tentaram resolvê-lo estavam Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), John Wallis (1616 - 1703), Henry Oldenburg (1615? - 1677) e os matemáticos da família Bernoulli (Boyer, 2003).

Durante algum tempo Jakob Bernoulli (1654 - 1705) atacou o problema, sem sucesso, publicou algo sobre o assunto em 1689. Com a morte de Jakob, seu irmão Johann Bernoulli (1667 - 1748) ocupou seu cargo de professor na Universidade da Basileia, onde teve entre seus alunos Leonhard Euler (Boyer, 2003). Provavelmente foi Johann que apresentou este problema à Euler, até então apenas um aluno brilhante. Após resolver o problema passou a chamar a atenção não só de seus professores na Universidade da Basileia, mas de toda a comunidade acadêmica da época.

Este problema ficou conhecido como "problema da Basileia", pois Euler nasceu e se formou nesta cidade, bem como resolveu o problema lá. Foi nela ainda que outros matemáticos de renome, como os da família Bernoulli trabalharam e tentaram resolvê-lo (Szpiro, 2008).

O problema proposto por Mengoli consistia em apresentar o resultado da soma dos inversos dos quadrados perfeitos, ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$$

Antes de Euler, os matemáticos já sabiam que esta série é convergente (Kalman, 1993). Basta notarmos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k\cdot k} &< \\
\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(k-1)k} &= \\
\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} &= 1 - \frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

Quando k tende ao infinito, temos

$$\lim_{k\to\infty} \left[1 - \frac{1}{k}\right] = 1$$

logo

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots < 1$$

e portanto

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots < \frac{1}{1^2} + 1$$

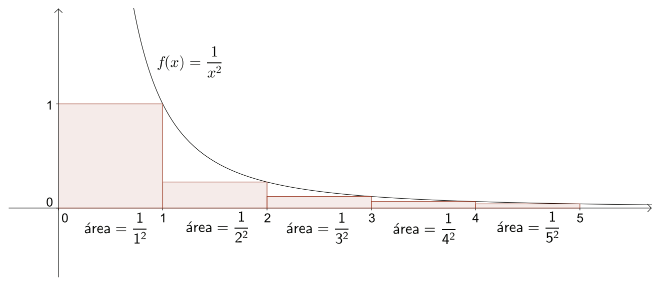


Figura 1: Teste da Integral

ou seja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2.$$

Portanto, esta série é limitada superiormente e, como ela também é crescente, pelo Teorema de Sequência Monótona (Stewart, 2011), conclui-se que é convergente.

Outra maneira de visualizar esta convergência é através de um argumento geométrico (Stewart, 2011). A figura 1 mostra o gráfico da função

$$f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Abaixo da curva que define este gráfico aparecem retângulos cujas bases são intervalos de comprimento 1 e alturas iguais aos valores da função $f(x)$ nos extremos direitos de cada intervalo.

Assim a soma das áreas dos retângulos é

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Excluindo o primeiro retângulo, a soma das áreas dos retângulos restantes será menor que a área definida por uma integral imprópria:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots < \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

Mas note que esta integral é convergente:

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx &= \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^t \\
&= \lim_{t\to\infty} \left[1 - \frac{1}{t}\right] = 1.
\end{aligned}$$

Assim

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots < 1$$

portanto

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots < 2$$

Esta é a mesma ideia do Teste da Integral para convergência de séries numéricas (Stewart, 2011):

Se f é uma função contínua, positiva e decrescente em $[1,\infty)$ e $a_n = f(n)$, então a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

é convergente se, e somente se, a integral imprópria

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

é convergente.

Somente em 1735, mais de 90 anos após o lançamento da questão, é que Leonhard Euler apresentou uma solução aceita na época que surpreendeu a todos devido a sua originalidade (Szpiro, 2008).

3.2 A Prova de Euler

Na solução apresentada por Euler (1740), inicialmente tomamos a série de Maclaurin da função seno (Guidorizzi, 2003)

$$\text{sen}\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Dividindo ambos os lados desta equação por x

$$\frac{\text{sen}\, x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

e substituindo x por $\sqrt{x}$ obtemos

$$\frac{\text{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \frac{x^3}{7!} + \cdots$$

Seja então a função

$$f(x) = \frac{\text{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$$

Os zeros desta função são $\pi^2, 4\pi^2, 9\pi^2, 16\pi^2, \ldots$

Já era conhecido na época de Euler que todo polinômio

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

com raízes $r_1, r_2, \ldots, r_n$ pode ser escrito como um produto envolvendo suas raízes

$$\begin{gathered}(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)\ldots(x-r_n) = \\ x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0\end{gathered}$$

de onde obtemos

$$\begin{aligned} a_0 &= (-1)^n r_1 r_2 \ldots r_n \\ a_1 &= (-1)^{n-1} r_2 r_3 \ldots r_n + (-1)^{n-1} r_1 r_3 \ldots r_n \\ &\quad + \ldots + (-1)^{n-1} r_1 r_2 \ldots r_{n-1} \end{aligned}$$

e dividindo a_1 por a_0, obtemos

$$\frac{a_1}{a_0} = -\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \cdots - \frac{1}{r_n},$$

ou ainda

$$-\frac{a_1}{a_0} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \cdots + \frac{1}{r_n}. \tag{1}$$

Assumindo que esta propriedade dos polinômios continua valendo para séries de potências e aplicando à função $f(x)$, concluímos que

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2} + \cdots$$

e multiplicando ambos os lados desta equação por π^2 obtemos

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

O resultado obtido por Euler está correto e surpreendeu a todos, pois envolvia π como resposta de uma série que aparentemente não estava relacionada com circunferências ou trigonometria. O próprio Euler, devido a este fato, relutou em apresentar a prova por um breve tempo (Szpiro, 2008).

Assim que Johann Bernoulli soube do triunfo de Euler, escreveu (Boyer, 2003): "E assim está satisfeito o ardente desejo de meu irmão que, percebendo que a investigação da soma era mais difícil do que qualquer um teria imaginado, abertamente confessou que todo seu zelo acabara em fracasso. Quem dera que meu irmão estivesse vivo agora."

No entanto, apesar da resposta estar correta e da belíssima demonstração, existem alguns passos efetuados por ele que não estavam bem explicados.

3.3 A invalidade da prova de Euler

O problema com a prova de Euler é a utilização da propriedade dos polinômios (1) em uma séries de potências, o que nem sempre é válido. Basta observarmos a identidade

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

válida para todo $x \in (-1,1)$, e a função

$$g(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{1-x}.$$

É fácil perceber que o único zero da função $g(x)$ é $r_1 = -1$. Reescrevendo esta função temos

$$g(x) = -\frac{1}{2} - x - x^2 - x^3 - \ldots$$

Note que a região de convergência da série é diferente do domínio da função e que r_1 não pertence à região de convergência da série. Mas, assumindo que a propriedade (1) continua valendo para esta série, temos

$$-\frac{-1}{-1/2} = \frac{1}{-1},$$

ou seja $1 = 2$, o que deixava a prova de Euler inválida.

No ano de 1885, o matemático alemão Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 - 1897) provou um teorema atualmente denominado Teorema da Fatoração de Weierstrass. Neste teorema ele afirma (Knopp, 1996):

Toda função analítica (aquelas que podem ser representadas por uma série de potências) pode ser expressa por um produto envolvendo suas raízes.

Realmente, a função

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

é uma função analítica e pode ser representada por uma série de potências em todo seu domínio, passo justificado pelo Teorema da Fatoração de Weierstrass. O problema é que a resolução de Euler é anterior a este teorema. A resolução de Euler é de 1735, ou seja, para uma das passagens de sua resolução não havia justificativa por aproximadamente 150 anos. Foi neste período que outros matemáticos, ao mesmo tempo em que aplaudiam o resultado obtido, chamavam a atenção para falta de rigor desta passagem. Muitos matemáticos, também brilhantes, conseguiram soluções contendo apenas passagens válidas para o problema da Basileia. O trabalho destes, com certeza de grande valia para a Matemática, foi de certa forma facilitado, uma vez que já conheciam o resultado numérico do problema.

O Teorema da Fatoração de Weierstrass dificilmente é apresentado em livros de cálculo para iniciantes devido sua complexidade. Apresentar a prova de Euler sem mencionar o Teorema de Weierstrass incorre em falta de rigor matemático, invalidando a prova (Simmons, 1987). É por isto que autores de tais livros não consideram a prova de Euler válida neste nível.

4 Provas rigorosas do problema da Basileia

Após Euler chegar a resposta do problema da Basileia muitos outros matemáticos também apresentaram suas resoluções (Giesy, 1972). Dentre as provas para o problema da Basileia estão algumas bem elementares e outras um tanto quanto complexas. Neste capítulo vamos apresentar algumas de diferentes níveis.

4.1 A prova de Cauchy

A primeira resolução que apresentaremos é a do matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857). Esta prova se destaca por utilizar apenas conhecimentos de Matemática Elementar.

Inicialmente tomamos a fórmula de De Moivre

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^n = \cos(nx) + i \operatorname{sen}(nx)$$

consideramos $0 < x < \pi/2$ e n ímpar inteiro positivo. Dividimos os dois lados da igualdade por $(\operatorname{sen} x)^n$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\cos(nx) + i \operatorname{sen}(nx)}{(\operatorname{sen} x)^n} &= \frac{(\cos x + i \operatorname{sen} x)^n}{(\operatorname{sen} x)^n} \\ &= \left(\frac{\cos x + i \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}\right)^n \qquad (2) \\ &= (\cot x + i)^n . \end{aligned}$$

Em seguida desenvolvemos o binômio

$$\begin{aligned} &(\cot x + i)^n \\ &= \binom{n}{0} i^0 \cot^n x + \binom{n}{1} i^1 \cot^{n-1} x + \ldots + \\ &\binom{n}{n-1} i^{n-1} \cot^{n-(n-1)} x + \binom{n}{n} i^n \cot^{n-n} x \\ &= \binom{n}{0} \cot^n x + \binom{n}{1} i \cot^{n-1} x + \ldots + \\ &\binom{n}{n-1} i^{n-1} \cot^1 x + \binom{n}{n} i^n \cot^0 x \\ &= \binom{n}{0} \cot^n x + \binom{n}{1} i \cot^{n-1} x + \ldots + \\ &\binom{n}{n-1} i^{n-1} \cot x + \binom{n}{n} i^n \end{aligned}$$

como n é ímpar, $n - 1$ é par, portanto

$$\begin{aligned} &= \binom{n}{0} \cot^n x + \binom{n}{1} i \cot^{n-1} x + \ldots + \\ &\binom{n}{n-1} \cot x \, (-1)^{\frac{n-1}{2}} + \binom{n}{n} i^n \\ &= \left[\binom{n}{0} \cot^n x - \binom{n}{2} \cot^{n-2} x + \ldots + \right. \\ &\left. \binom{n}{n-1} \cot x \, (-1)^{\frac{n-1}{2}} \right] \qquad (3) \\ &+ i \left[\binom{n}{1} \cot^{n-1} x - \binom{n}{3} \cot^{n-3} x + \ldots + \right. \\ &\left. \binom{n}{n} \cot^0 x (-1)^{\frac{n-1}{2}} \right] . \end{aligned}$$

Como (2) e (3) são iguais, possuem a mesma parte imaginária, com isto

$$\frac{\text{sen}(nx)}{(\text{sen } x)^n}$$

$$= \binom{n}{1}\cot^{n-1}x - \binom{n}{3}\cot^{n-3}x + \ldots +$$

$$\binom{n}{n-2}\cot^2 x\,(-1)^{\frac{n-3}{2}} + \binom{n}{n}\cot^0 x(-1)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Agora, já que n é ímpar e inteiro positivo, podemos escrevê-lo como $2m+1$ para qual quer m inteiro positivo.

$$\frac{\text{sen}[(2m+1)x]}{(\text{sen } x)^{2m+1}}$$

$$= \binom{2m+1}{1}\cot^{2m+1-1}x -$$

$$\binom{2m+1}{3}\cot^{2m+1-3}x + \ldots +$$

$$\binom{2m+1}{2m+1-2}\cot^2 x\,(-1)^{\frac{2m+1-3}{2}}$$

$$+\binom{2m+1}{2m+1}\cot^0 x(-1)^{\frac{2m+1-1}{2}} \tag{4}$$

$$= \binom{2m+1}{1}\cot^{2m}x -$$

$$\binom{2m+1}{3}\cot^{2m-2}x \ldots$$

$$+\binom{2m+1}{2m-1}\cot^2 x\,(-1)^{m-1} +$$

$$\binom{2m+1}{2m+1}\cot^0 x(-1)^m.$$

Nesta equação x é a incógnita, então tomamos

$$x_r = \frac{r\pi}{2m+1},$$

com $r = 1, 2, 3, ..., m$, assim são definidos m valores x_r que respeitam a condição inicial $0 < x < \pi/2$. Ao substituir qualquer x_r no primeiro membro de (4) temos

$$\begin{aligned}
\frac{\text{sen}[(2m+1)x]}{(\text{sen } x)^{2m+1}} &= \frac{\text{sen}\left[(2m+1)\dfrac{r\pi}{2m+1}\right]}{\left(\text{sen}\dfrac{r\pi}{2m+1}\right)^{2m+1}} \\
&= \frac{\text{sen}(r\pi)}{\left(\text{sen}\dfrac{r\pi}{2m+1}\right)^{2m+1}} \\
&= \frac{0}{\left(\text{sen}\dfrac{r\pi}{2m+1}\right)^{2m+1}} = 0.
\end{aligned}$$

Sendo assim todos os x_r são raízes da equação (4).

$$0 = \binom{2m+1}{1}\cot^{2m}x_r - \binom{2m+1}{3}\cot^{2m-2}x_r + \ldots +$$

$$\binom{2m+1}{2m-1}\cot^2 x_r\,(-1)^{m-1} + \binom{2m+1}{2m+1}\cot^0 x_r(-1)^m.$$

Para facilitar a compreensão e a manipulação da equação nos passos seguintes, tomamos $t_r = \text{cotg}\,^2 x_r$, de onde temos

$$0 = \binom{2m+1}{1}t_r^m - \binom{2m+1}{3}t_r^{m-1} + \ldots +$$

$$\binom{2m+1}{2m-1}t_r^1\,(-1)^{m-1} + \binom{2m+1}{2m+1}t_r^0(-1)^m.$$

Portanto todos os t_r são raízes do polinômio

$$P(t) = \binom{2m+1}{1}t^m - \binom{2m+1}{3}t^{m-1} + \ldots +$$

$$\binom{2m+1}{2m-1}t_r^1\,(-1)^{m-1} + \binom{2m+1}{2m+1}t_r^0(-1)^m.$$

Fazendo uso da fórmula de Viète chegamos em

$$\begin{aligned}
t_1 + t_2 + t_3 + ... + t_m &= -\frac{-\dbinom{2m+1}{3}}{\dbinom{2m+1}{1}} \\
&= \frac{\dfrac{(2m+1)(2m)(2m-1)}{6}}{2m+1} \\
&= \frac{(2m)(2m-1)}{6}
\end{aligned}$$

e voltando a substituir t_r por $\cot\,^2 x_r$ obtemos

$$\cot^2 x_1 + \cot^2 x_2 + \cot^2 x_3 + ... + \cot^2 x_m$$
$$= \frac{(2m)(2m-1)}{6}. \tag{5}$$

Em seguida lembramos que $\text{cotg}^2 x = \csc^2 x - 1$ fazendo então

$$\csc^2 x_1 - 1 + \csc^2 x_2 - 1 + \csc^2 x_3 - 1 + ... + \csc^2 x_m - 1$$

$$= \frac{(2m)(2m-1)}{6}$$

obtemos

$$\csc^2 x_1 + \csc^2 x_2 + \csc^2 x_3 + ... + \csc^2 x_m$$

$$= \frac{(2m)(2m-1)}{6} + m \qquad (6)$$

$$= \frac{(2m)(2m+2)}{6}.$$

Lembramos também que é válida a inequação (Guidorizzi, 2003)

$$\cot^2 x < \frac{1}{x^2} < \csc^2 x$$

portanto

$$\cot^2 x_1 + \cot^2 x_2 + ... + \cot^2 x_m <$$

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + ... + \frac{1}{x_m^2} <$$

$$\csc^2 x_1 + \csc^2 x_2 + ... + \csc^2 x_m$$

utilizando (5), (6) e substituindo x_r por $\frac{r\pi}{2m+1}$ obtemos

$$\frac{(2m)(2m-1)}{6} <$$

$$\frac{1}{\left(\frac{1\pi}{2m+1}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{2\pi}{2m+1}\right)^2} + ... + \frac{1}{\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right)^2} =$$

$$\left(\frac{2m+1}{1\pi}\right)^2 + \left(\frac{2m+1}{2\pi}\right)^2 + ... + \left(\frac{2m+1}{m\pi}\right)^2 =$$

$$\frac{(2m+1)^2}{(1\pi)^2} + \frac{(2m+1)^2}{(2\pi)^2} + ... + \frac{(2m+1)^2}{(m\pi)^2} <$$

$$\frac{(2m)(2m+2)}{6}$$

e multiplicamos tudo por $\frac{\pi^2}{(2m+1)^2}$

$$\frac{(2m)(2m-1)}{6}\frac{\pi^2}{(2m+1)^2} <$$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{m^2} <$$

$$\frac{(2m)(2m+2)}{6}\frac{\pi^2}{(2m+1)^2}$$

ou ainda

$$\frac{\pi^2}{6}\frac{(2m)}{(2m+1)}\frac{(2m-1)}{(2m+1)} <$$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{m^2} <$$

$$\frac{\pi^2}{6}\frac{(2m)}{(2m+1)}\frac{(2m+2)}{(2m+1)}.$$

Agora fazendo m tendendo ao infinito chegamos na resposta que Euler obteve pois

$$\lim_{m\to\infty}\frac{(2m)}{(2m+1)} = \lim_{m\to\infty}\frac{(2m-1)}{(2m+1)} = \lim_{m\to\infty}\frac{(2m+2)}{(2m+1)} = 1.$$

Perceba que esta última passagem utiliza um resultado mais avançado, porém intuitivo, conhecido como Teorema do Confronto (Guidorizzi, 2003):

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ e $\lim_{x\to p} f(x) = L = \lim_{x\to p} h(x)$, então $\lim_{x\to p} g(x) = L$.

Nas demais passagens, a prova de Cauchy utiliza apenas conhecimentos de polinômios, trigonometria e números complexos, conteúdos do currículo nacional do ensino médio. Sendo assim, esta é uma das provas válidas mais simples para o problema.

Outras formas de resolver o problema da Basileia foram apresentadas, geralmente associadas à Matemática Avançada. Vamos agora apresentar a resolução que utiliza séries de Fourier.

4.2 A prova de Fourier

Jean-Baptiste Joseph Fourier (1766-1830) nasceu na França (Eves, 2004) onde trabalhou na Escola Politécnica de Paris e foi secretário da Academia de Ciências da França. Por ser amigo e confidente de Napoleão (Zill e Cullen, 2001) participou de sua campanha de "cilivização" do Egito, onde chegou a ser indicado Governador do Baixo Egito.

Após a campanha retornou à França onde conciliou trabalhos na administração pública e o estudo do calor. Em 1822 publicou sua obra prima, *Théorie Analytique de la Chaleur*, (Teoria Analítica do Calor) que influenciou toda a Física-Matemática Moderna (Eves, 2004). Nesta obra Fourier aprofundou os estudos realizados por Daniel Bernoulli e Leonhard Euler sobre Séries Trigonométricas. A partir de então devido a suas vastas aplicações principalmente na física, tais séries foram chamadas de séries de Fourier.

A série de Fourier de uma função f seccionalmente diferenciável e de período 2π é dada por (Figueiredo, 2009):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\text{sen}(nx))$$

onde

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\text{sen}(nx)dx$$

A série converge para a função em todos os pontos de continuidade da função e converge para a média dos limites laterais nos pontos de descontinuidade.

Para resolver o problema da Basileia utilizando séries de Fourier tomamos $f(x) = x^2$ no intervalo $(-\pi, \pi)$.

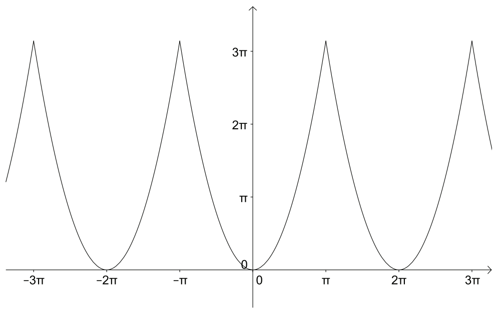


Figura 2: $f(x) = x^2$, $-\pi < x < \pi$ e $f(x + 2\pi) = f(x)$

Basta agora determinarmos os coeficientes:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

Para calcular a_n, utilizamos integração por partes duas vezes:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(nx)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[x^2\frac{\text{sen}(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x\frac{\text{sen}(nx)}{n}dx\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2\text{sen}(nx)}{n} + \frac{2x\cos(nx)}{n^2} - \frac{2\text{sen}(nx)}{n^3}\right]_{-\pi}^{\pi} \end{aligned}$$

Como n é um número natural, temos $\text{sen}(n\pi) = 0$ e $\cos(n\pi) = (-1)^n$, portanto

$$a_n = \frac{1}{\pi}\frac{4\pi}{n^2}(-1)^n = \frac{4}{n^2}(-1)^n$$

Para calcular b_n, observamos que $x^2\text{sen}(nx)$ é uma função ímpar e os limites de integração são simétricos, logo:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\text{sen}(nx)dx = 0$$

Definidos os coeficientes já podemos escrever a função como uma série de Fourier

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\text{sen}(nx)) \\ x^2 &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}(-1)^n \cdot \cos(nx)\right) \end{aligned}$$

Pela igualdade obtida acima, e tomando $x = \pi$ ocorre que

$$\begin{aligned} \pi^2 &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}(-1)^n \cdot \cos(n\pi)\right) \\ \pi^2 - \frac{\pi^2}{3} &= 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}(-1)^n \cdot (-1)^n\right) \\ \frac{2\pi^2}{3} &= 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \frac{2\pi^2}{3} \cdot \frac{1}{4} &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \frac{\pi^2}{6} &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... \end{aligned}$$

4.3 A prova de Apostol

Outra resolução deste problema utiliza integrais duplas e é atribuída a Apostol (1983).

Inicialmente analisaremos a integral

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1 - xy}\, dx\, dy.$$

Como $|xy| < 1$, exceto quando $(x,y) = (1,1)$, e tomando a série geométrica de razão xy e primeiro termo 1, podemos afirmar que

$$\sum_{n=0}^{\infty}(xy)^n = \frac{1}{1 - xy}$$

portanto

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1-xy}\,dx\,dy &= \int_0^1\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}(xy)^n\,dx\,dy\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\int_0^1 (xy)^n\,dx\,dy\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^1 x^n\,dx\right]\left[\int_0^1 y^n\,dy\right]\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}\\
&= \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.
\end{aligned}$$

Em seguida calcularemos o valor numérico da integral. Para calcular

$$I = \int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1-xy}dx\,dy,$$

vamos rotacionar os eixos coordenados no sentido horário em torno da origem de um ângulo de $\pi/4$ radianos fazendo a mudança de variável

$$x = \frac{u-v}{\sqrt{2}} \text{ e } y = \frac{u+v}{\sqrt{2}},$$

de modo que

$$1-xy = \frac{2-u^2+v^2}{2}.$$

A nova região de integração no plano uv é um quadrado com vértices opostos em (0,0) e ($\sqrt{2}$,0), conforme figura 3.

Fazendo uso da simetria desse quadrado em torno do eixo u, temos

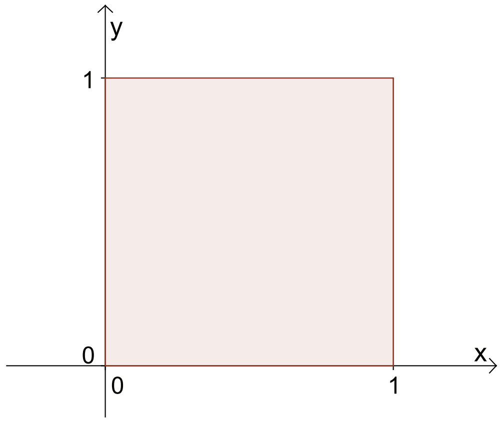
$$\begin{aligned}
I &= 4\int_0^{\sqrt{2}/2}\left(\int_0^u \frac{dv}{2-u^2+v^2}\right)du+\\
&\quad 4\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}}\left(\int_0^{\sqrt{2}-u}\frac{dv}{2-u^2+v^2}\right)du.
\end{aligned}$$

Como

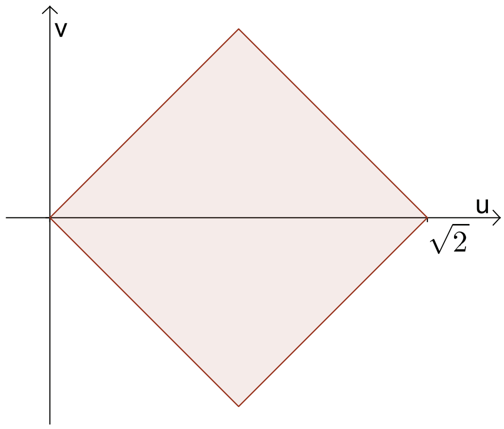
$$\int_0^x \frac{dt}{a^2+t^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a},$$

temos

$$\int_0^u \frac{dv}{2-u^2+v^2} = \frac{1}{\sqrt{2-u^2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{2-u^2}}$$



(a) Plano xy



(b) Plano uv

Figura 3: Região de integração

e

$$\int_0^{\sqrt{2}-u}\frac{dv}{2-u^2+v^2} = \frac{1}{\sqrt{2-u^2}}\arctan\frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2-u^2}},$$

logo

$$\begin{aligned}
I &= 4\int_0^{\sqrt{2}/2}\arctan\frac{u}{\sqrt{2-u^2}}\frac{du}{\sqrt{2-u^2}}\\
&\quad +4\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}}\arctan\frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2-u^2}}\frac{du}{\sqrt{2-u^2}}.
\end{aligned}$$

Para calcular

$$I_1 = 4\int_0^{\sqrt{2}/2}\arctan\frac{u}{\sqrt{2-u^2}}\frac{du}{\sqrt{2-u^2}}$$

seja

$$u = \sqrt{2}\text{sen }\theta,$$

de forma que

$$du = \sqrt{2}\cos\theta d\theta = \sqrt{2-u^2}d\theta$$

e
$$\tan\theta = u/\sqrt{2-u^2}.$$

Assim
$$I_1 = 4\int_0^{\pi/6} \theta\, d\theta = 2\left(\frac{\pi}{6}\right)^2.$$

Para calcular
$$I_2 = 4\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}} \arctan\frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2-u^2}}\frac{du}{\sqrt{2-u^2}}$$
seja
$$u = \sqrt{2}\cos 2\theta,$$
de forma que
$$\begin{aligned} du &= -2\sqrt{2}\text{sen } 2\theta d\theta \\ &= -2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos^2 2\theta}d\theta \\ &= -2\sqrt{2}\sqrt{1-u^2/2}d\theta \\ &= -2\sqrt{2-u^2}d\theta \end{aligned}$$
e
$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2-u^2}} &= \frac{\sqrt{2}(1-\cos 2\theta)}{\sqrt{2-2\cos^2 2\theta}} \\ &= \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}} \\ &= \sqrt{\frac{2\text{sen}^2\theta}{2\cos^2\theta}} \\ &= \tan\theta. \end{aligned}$$

Assim
$$I_2 = 8\int_0^{\pi/6} \theta\, d\theta = 4\left(\frac{\pi}{6}\right)^2.$$

Portanto
$$I = I_1 + I_2 = 6\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{\pi^2}{6}.$$

Além das provas aqui apresentadas, existem diversas outras, cada uma com suas características próprias. As três provas apresentadas mostram que tal problema pode ser resolvido tanto utilizando conteúdos de Matemática Elementar quanto conteúdos de Cálculo e Análise.

A prova de Apostol é do século XX, a de Fourier é do século XIX e do século XVIII temos as provas de Cauchy e Euler. A prova de cada período traz características da Matemática desenvolvida até seu tempo, mostrando que um assunto dentro da Matemática nunca está finalizado.

5 Curiosidades do problema da Basileia

Não poderíamos finalizar este trabalho sem apresentar a representação geométrica e uma aplicação da série. Estas duas curiosidades mostram que, apesar de antiga, esta série ainda é um tema atual.

5.1 Representação geométrica

O fato de estarmos trabalhando com uma série de quadrados, nos faz pensar inicialmente em Teorema de Pitágoras (Maor, 2007). Tomamos então as duas primeiras parcelas da soma e montamos um triângulo retângulo de vértices nos pontos A, P_1 e P_2, de forma que $\overline{AP_1} = 1$, $\overline{P_1P_2} = 1/2$ e que o ângulo em p_1 seja reto conforme figura 4. Para facilitar a representação fazemos $r_1 = \overline{AP_1}$ e $r_2 = \overline{AP_2}$. Com o Teorema de Pitágoras obtemos
$$r_2^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2^2}.$$

Marcamos agora o ponto P_3 de forma que $\overline{P_2P_3} = 1/3$ e que o ângulo $\widehat{AP_2P_3}$ seja reto. Assim o triângulo AP_2P_3 é retângulo e considerando $\overline{AP_3} = r_3$ temos
$$r_3^2 = r_2^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}.$$

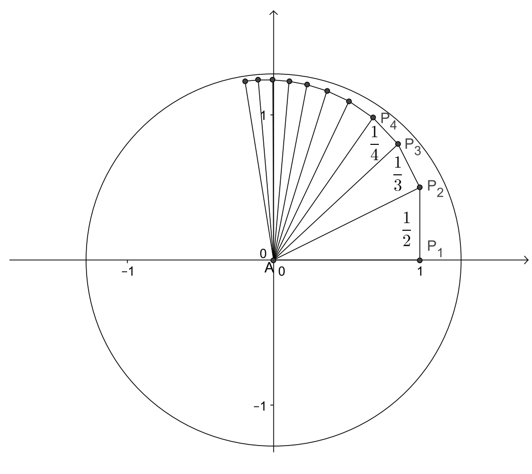


Figura 4: Teorema de Pitágoras e problema da Basileia

Continuando a marcar pontos desta forma, ao marcarmos o ponto P_n, conforme a figura 4 temos um segmento r_n onde vale a seguinte igualdade
$$r_n^2 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}.$$

Assim, pelo problema da Basileia é verdade que
$$r_n^2 < \frac{\pi^2}{6}$$

ou ainda

$$r_n < \frac{\pi}{\sqrt{6}}.$$

Desta forma, continuando com a sequência, teremos a certeza que todos os pontos P_n estarão contidos dentro do círculo de raio $\pi/\sqrt{6}$ e centro em A.

Percebemos que os segmentos $\overline{AP_1}$, $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, ... , $\overline{P_nP_{n+1}}$, ... formam uma espiral. Realmente, somando a medida de cada segmento temos a série harmônica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ...$$

que pelo fato de ser divergente (Simmons, 1987) gera uma espiral infinita. Esta espiral por sua vez, se afasta cada vez mais do ponto A, se aproximando cada vez mais da circunferência sem ultrapassá-la.

5.2 Probabilidade

Agora vamos mostrar uma aplicação do problema da Basileia. Esta série será utilizada para calcular a probabilidade de dois números serem primos entre si, conforme (Abrams e Paris, 1992). Mais precisamente, calcular a probabilidade de dois números menores que n serem primos entre si, quando n tende ao infinito.

Seja g o máximo divisor comum de dois inteiros positivos a e b, isto é $g = (a,b)$ e seja p a probabilidade de que $g = 1$. Primeiro vamos mostrar que a probabilidade de que $g = n$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ é p/n^2.

A probabilidade de que n divide tanto a quanto b é $1/n^2$. Para que, além de dividir a e b, n seja o máximo divisor comum entre a e b, é necessário que $(a/n, b/n) = 1$, o que ocorre com probabilidade p. Portanto a probabilidade de que $g = n$ é p/n^2.

Como a soma das probabilidades de que $g = n$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ deve ser igual a 1, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p}{n^2} = 1.$$

Isolando p, obtemos

$$p = \frac{1}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\left(\frac{\pi^2}{6}\right)} = \frac{6}{\pi^2}.$$

Como uma consequência interessante deste resultado, a probabilidade de uma fração gerada aleatoriamente ser irredutível é $6/\pi^2 \cong 60{,}8\%$ (Kalman, 1993).

6 Conclusões

A ideia deste trabalho é mostrar, através do problema que tornou Leonhard Euler famoso, a interessante ferramenta didática que é a História da Matemática para os professores desta disciplina. O objetivo não é contar a História da Matemática por meio de uma maçante biografia, ou por meio de fatos pitorescos ocorridos com matemáticos, mas sim contar esta história mostrando como um assunto surge, se desenvolve e ganha importância ao longo do tempo.

Pietro Mengoli era professor universitário de Matemática na Itália em uma época em que o Cálculo ainda não havia sido inventado por Newton e Leibniz, porém já se estudava a convergência de séries. Provavelmente foi estudando este assunto que Mengoli teve a ideia de sugerir o problema. Não há evidências de que ele propôs esta questão com o objetivo de resolver um problema aplicado a uma situação real. Este fato mostra que nem todo conhecimento matemático surge de uma necessidade prática da humanidade.

Este problema circulou entre os melhores matemáticos da época, sua convergência foi provada de uma forma tão simples que hoje em dia um aluno do ensino médio compreenderia sem muito esforço. No entanto, na busca do valor exato da soma infinita, muitos matemáticos se desdobraram e muitas ideias surgiram, uma delas foi o teste da integral para séries convergentes. Isto mostra mais uma curiosidade da Matemática por meio de sua história: ao se procurar uma coisa, encontra-se outra.

Então chegou a vez de Euler, ele produziu tanto que alcançou notoriedade por muitas outras contribuições à Matemática, mas foi resolvendo o problema da Basileia que se destacou pela primeira vez. Sua prova tinha um equívoco, o que não tirava sua beleza haja visto que o resultado estava certo. Neste ponto a história nos mostra que o raciocínio, a criatividade e o conhecimento são tão importantes na Matemática quanto seu rigor e formalismo.

Na verdade o equívoco ocorre na utilização de uma propriedade dos polinômios em uma série de potências, que como vimos, caso Euler quisesse justificá-la corretamente hoje seria perfeitamente possível com o Teorema de Weierstrass. Aqui percebemos que no desenvolvimento da Matemática, a intuição e o pensamento vem a frente do formalismo e dos teoremas. Percebemos ainda que a Matemática não se desenvolve linearmente, tal como está em um livro didático, sua evolução é dinâmica, partes que compõem um mesmo tema surgiram e se desenvolveram em tempos, lugares e com finalidades diferentes.

Enquanto não surgia o Teorema de Weierstrass, muitos matemáticos se mobilizaram para apresentarem suas provas para o problema. Diversas provas surgiram, todas com suas peculiaridades, isso nos mostra que apesar da Matemática ser exata, um problema pode ser resolvido de diversas maneiras, basta observarmos as provas apresentadas no texto, que com certeza não são as únicas (Giesy, 1972).

A representação geométrica da série mostra que as áreas da Matemática se relacionam. Estas relações também podem ser percebidas na aplicação encontrada para a série. Perceba que nosso problema está ligado ao Teorema de Pitágoras, limites, circunferências, probabilidade, frações e divisibilidade. Isto nos leva a refletir que a aplicação de um conhecimento pode vir através da relação entre conteúdos.

Quando se passa no quadro para os alunos apenas um exemplo e uma lista de exercícios semelhantes, estamos privando-os do prazeroso e necessário exercício de intuir e conjecturar sobre um assunto. Na verdade este deveria ser o principal objetivo das aulas de Matemática. Na História da Matemática, os grandes matemáticos se tornaram grandes por terem intuído, conjecturado, estudado e resolvido e não apenas decorando fórmulas e repetido exercícios já resolvidos.

Estas considerações nos levam a concluir que a História da Matemática é de extrema importância para a visão que o professor tem da Matemática, o que vai refletir no interesse dos alunos pela disciplina.

Referências

Abrams, A. D., Paris, M. J., 1992. The probability that $(a,b) = 1$. College Mathematics Journal 23.

Apostol, T. M., 1983. A proof that Euler missed: evaluating $\zeta(2)$ the easy way. The Mathematical Intelligencer 5.

Ávila, G., 2011. Várias faces de Matemática. Blucher, São Paulo.

Baumgart, J. K., 1992. História da Álgebra - Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula; v. 4. Atual, São Paulo.

Boyer, C. B., 1992. História do Cálculo - Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula; v. 6. Atual, São Paulo.

Boyer, C. B., 2003. História da Matemática. Editora Edgard Blücher, São Paulo.

Cajori, F., 2007. Uma História da Matemática. Editora Ciência Moderna Ltda, Rio de Janeiro.

Euler, L., 1740. De Summis Serierum Reciprocarum. Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae Opera Omnia.

Eves, H., 2004. Introdução à História da Matemática. Editora da UNICAMP, Campinas.

Eves, H. W., 1992. História da Geometria - Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula; v. 1. Atual, São Paulo.

Figueiredo, D. G. d., 2009. Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais. Projeto Euclides, Rio de Janeiro.

Garbi, G. G., 1997. O Romance das Equações Algébricas. Makron Books, São Paulo.

Giesy, D. P., 1972. Still another elementary proof that $\sum 1/k^2 = \pi^2/6$. Mathematics Magazine 45.

Guidorizzi, H. L., 2003. Um Curso de Cálculo Vol. I. LTC, Rio de Janeiro.

Hefez, A., 2011. Elementos de Aritmética. SBM, Rio de Janeiro.

Kalman, D., 1993. Six ways to sum a series. The College Mathematics Journal 24.

Knopp, K., 1996. Theory of Functions, Part II. Dover, New York.

Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., Morgado, A. C., 2006. A Matemática do Ensino Médio - Volume 2. SBM, Rio de Janeiro.

Maor, E., 2007. The Pythagorean Theorem: A 4,000-Year History. Princeton University Press, Princeton.

Simmons, G. F., 1987. Cálculo com Geometria Analítica Vol. II. McGraw-Hill, São Paulo.

Simmons, J. C., 2002. Os 100 maiores cientistas da História: Uma classificação dos cientistas mais influentes do passado e do presente. DIFEL, Rio de Janeiro.

Stewart, J., 2011. Cálculo Vol. II. Cengage Learning, São Paulo.

Szpiro, G. G., 2008. A vida secreta dos números. DIFEL, Rio de Janeiro.

Zill, D. G., Cullen, M. R., 2001. Equações Diferenciais Vol. II. Makron Books Ltda, São Paulo.