УДК 517.958
DOI: 10.21209/2308-8761-2017-12-4-24-28

Святослав Евгеньевич Холодовский,
доктор физико-математических наук, профессор,
Забайкальский государственный университет,
(672039, Россия, г. Чита, ул. Александро-Заводская, 30)
e-mail: hol47@yandex.ru

О решении краевых задач для неоднородных дифференциальных уравнений в полуцилиндрах, ограниченных двухслойной плёнкой

В статье рассмотрен класс краевых задач в полуцилиндрах $D = (x < 0) \times (y \in Q \subseteq R^m)$, ограниченных по основанию $x = 0$ двухслойной плёнкой, состоящей из сильно- и слабо проницаемых прослоек. На плёнке задано однородное граничное условие первого типа. В полуцилиндре рассмотрены неоднородные дифференциальные уравнения определённого класса. С помощью метода свёртывания разложений Фурье решения задач с плёнкой выражены через решения классических задач в цилиндре $D_0 = (x \in R) \times (y \in Q \subseteq R^m)$ (без плёнки) с сохранением уравнения в D.

Ключевые слова: краевые задачи, двухслойные плёнки, обобщённые граничные условия

В современных условиях широкие приложения имеют композитные материалы, содержащие многослойные плёночные покрытия. Расчёт динамических процессов в указанных материалах приводит к краевым задачам математической физики в областях, ограниченных многослойными плёнками.

В статье [3] разработан метод решения краевых задач в областях с многослойными плёночными включениями. В статье [4] указанный метод применён к решению краевых задач для однородных дифференциальных уравнений в полупространстве, ограниченном многослойной плёнкой, при неоднородных граничных условиях на плёнке. В настоящей статье данный метод применяется к решению краевых задач для неоднородных уравнений в полуцилиндрах, ограниченных по основанию многослойной плёнкой, с однородным граничным условием на плёнке первого типа, т. е. когда на внешней стороне плёнки заданы значения искомого решения. Метод иллюстрируется на примере определённого достаточно широкого класса линейных неоднородных уравнений в полуцилиндре, ограниченном двухслойной плёнкой.

Рассмотрим для функции $u(x, y)$ в полуцилиндре $D = (-\infty < x < 0) \times (y \in Q \subseteq R^m)$ класс краевых задач вида

$$\partial_x^2 u + Lu = H(x, y), \qquad Mu_{|(x,y)\in S} = h(x, y), \tag{1}$$

$$u + B\partial_x u + AB\partial_x^2 u_{|x=-0} = 0, \tag{2}$$

где $u(x, y) = O(1)$, $\partial_x^i = \partial^i/\partial x^i$, $H(x, y) = 0$ в окрестности $x = 0$, L – линейный дифференциальный оператор по переменным y_i, $y = (y_1, ..., y_m)$, т. е. оператор L не содержит производных по x и коэффициенты при производных не зависят от x; $S = (x < 0) \times (y \in \partial Q)$ –

боковая поверхность полуцилиндра D; M – оператор граничных условий первого, или второго, или третьего рода по y. Здесь полуцилиндр D ограничен двухслойной плёнкой, состоящей из сильно проницаемой прослойки $x = -0$ с параметром A и слабо проницаемой прослойки $x = +0$ с параметром B [4].

Далее операторы L и M, а также функции $H(x, y)$ и $h(x, y)$ считаются такими, для которых аналогичная классическая задача в цилиндре $D_0 = (-\infty < x < \infty) \times (y \in Q \subseteq R^m)$ без плёнки вида

$$\partial_x^2 f + Lf = \begin{cases} H(x,y), & x < 0, \\ 0 & x \geq 0, \end{cases} \qquad M f_{|S} = \begin{cases} h(x,y), & x < 0, \\ 0 & x \geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

корректна в классе достаточно дифференцируемых функций. При этом функция $f(x, y)$ предполагается ограниченной в полуцилиндре $D_1(x \geq 0)$ (где она удовлетворяет однородным условиям (1)).

Выразим решение задачи (1), (2) с плёнкой через решение классической задачи (3). Для вывода общих формул применим метод свёртывания разложений Фурье [1; 3 ; 4]. В соответствии с указанным методом рассмотрим частные модельные случаи задач (1)–(3), допускающие применение метода Фурье. В качестве модельных задач рассмотрим простейшие случаи задач (1)–(3) для оператора Лапласа в полуплоскости $x < 0$

$$\Delta u = H(x, y), \qquad x < 0 \tag{4}$$

при выполнении граничного условия (2) на плёнке $x = 0$ и соответствующую задачу на всей плоскости R^2

$$\Delta f = \begin{cases} H(x,y), & x < 0, \\ 0 & x \geq 0, \end{cases} \qquad |f| = O(1), \qquad x^2 + y^2 \to \infty, \tag{5}$$

где $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$, $H \in C(x > 0)$. Выразим решение задачи (4), (2) через решение $f(x, y)$ классической задачи (5).

Предположим сначала, что функция $f(0, y)$ разлагается в интеграл Фурье с коэффициентами Фурье $f_i(\lambda)$ [2, с. 529]

$$f(0, y) = \int_0^\infty g(y, \lambda)\, d\lambda, \qquad g(y, \lambda) = f_1(\lambda) \sin \lambda y + f_2(\lambda) \cos \lambda y, \tag{6}$$

где

$$f_i(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(0, y) \sigma_i(y, \lambda) dy, \qquad f(0, y) \to 0, \qquad |y| \to \infty,$$

$\sigma_1(y, \lambda) = \sin \lambda y$, $\sigma_2(y, \lambda) = \cos \lambda y$. Отсюда функция $f(x, y)$ в полуплоскости $x \geq 0$, где она удовлетворяет уравнению Лапласа (5), представима в виде

$$f(x, y) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} g(y, \lambda)\, d\lambda, \qquad x \geq 0. \tag{7}$$

Здесь левая и правая части последнего равенства являются ограниченными решениями однозначно разрешимой задачи Дирихле в полуплоскости: $\Delta u = 0$, $x > 0$, $u_{|x=0} = f(0, y)$.

Представим решение модельной задачи с плёнкой (4), (2) также в виде разложения Фурье

$$u(x, y) = f(x, y) + \int_0^\infty a(\lambda) e^{\lambda x} g(y, \lambda)\, d\lambda, \qquad x < 0, \tag{8}$$

где функция $g(y, \lambda)$ имеет вид (6), $a(\lambda)$ – неизвестная функция. Отсюда функция $u(x, y)$ (8) удовлетворяет уравнению (4) (при условии сходимости и дифференцируемости интеграла).

Из граничного условия (2) с учётом (7) находим

$$a(\lambda) = -1 + \frac{2B\lambda}{d(\lambda)}, \tag{9}$$

где $d(\lambda) = AB\lambda^2 + B\lambda + 1$, при этом $d(\lambda) > 0$ при $\lambda \geq 0$. Отсюда интеграл (8) и его производные мажорируются интегралом (7) и его соответствующими производными, т. е. интеграл (8) сходится и допускает дифференцирование необходимое число раз. Раскладывая правильную дробь (9) на простейшие дроби, получим

$$a(\lambda) = -1 + \frac{2B}{\sqrt{T}} \left(\frac{\gamma_2}{\lambda + \gamma_2} - \frac{\gamma_1}{\lambda + \gamma_1} \right), \qquad T \neq 0; \tag{10}$$

$$a(\lambda) = -1 + \frac{2}{A} \left[\frac{1}{\lambda + \gamma_0} - \frac{\gamma_0}{(\lambda + \gamma_0)^2} \right], \qquad T = 0, \tag{11}$$

где

$$T = B(B - 4A), \qquad \gamma_i = \frac{B + (-1)^i \sqrt{T}}{2AB}, \qquad i = 1, 2; \qquad \gamma_0 = \frac{1}{2A}, \tag{12}$$

при этом $AB\gamma_i^2 - B\gamma_i + 1 = 0$, $i = 0, 1, 2$.

Из разложения функции $f(x, y)$ (7) следует равенство $f(x + t, y) = \int_0^\infty e^{-\lambda(x+t)} g\, d\lambda$ при $x \geq 0$, $t > 0$. Умножая это равенство на $e^{-\gamma t} t^n$ и интегрируя по $t \in (0, \infty)$, с учётом $\int_0^\infty e^{-at} t^n dt = n! a^{-n-1}$ получим формулу

$$\frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-\gamma t} t^n f(x + t, y) dt = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda x} g(y, \lambda)}{(\lambda + \gamma)^{n+1}}\, d\lambda, \qquad x \geq 0,$$

где $\mathtt{Re}\gamma > 0$, $n = 0, 1, 2, ...$; $g(y, \lambda)$ имеет вид (6). Отсюда с учётом (8), (10), (11) решение $u(x, y)$ задачи (4), (2) приведём к виду без разложений Фурье

$$u(x, y) = f(x, y) - f(-x, y) +$$
$$+ \frac{2B}{\sqrt{T}} \int_0^\infty f(-x + t, y) \left(\gamma_2 e^{-\gamma_2 t} - \gamma_1 e^{-\gamma_1 t} \right) dt, \qquad B \neq 4A, \tag{13}$$

$$u(x, y) = f(x, y) - f(-x, y) +$$
$$+ \frac{2}{A} \int_0^\infty f(-x + t, y) e^{-\gamma_0 t} (1 - \gamma_0 t) dt, \qquad B = 4A. \tag{14}$$

При $T < 0$ функция (13) действительна и имеет вид

$$u(x,y) = f(x,y) - f(-x,y) + \frac{4B}{\sqrt{|T|}} \int_0^\infty f(-x+t,y) e^{-\alpha t} (\beta \cos \beta t - \alpha \sin \beta t) dt,$$

где $\alpha = 1/(2A)$, $\beta = \sqrt{|T|}/(2AB)$.

Полученные формулы (13), (14) справедливы для общего случая задач (1)–(3). Действительно, правые части формул (13), (14) являются операторами, действующими на функцию $f(x,y)$ по одной переменной x (y – свободная переменная). В силу $\mathtt{Re}\gamma_i > 0$, $i = 0,1,2$ (12) интегралы (13), (14) сходятся и допускают дифференцирование необходимое число раз, при этом учитываем ограниченность функции $f(x,y)$ в полуцилиндре $D_1(x \geq 0)$.

Аргументы функции $f(x,y)$ в формулах (13), (14), кроме первого слагаемого, принадлежат полуцилиндру $D_1(x > 0)$, где условия задачи (3) для функции $f(x,y)$ однородны. При этом если функция $f(x,y)$ удовлетворяет однородному уравнению (3) $\partial_x^2 f + Lf = 0$ при $x > 0$, то функция $f(-x,y)$ удовлетворяет этому уравнению при $x < 0$. Отсюда условия задачи (1), (2) с учётом условий (3) для функции $f(x,y)$ проверяются непосредственно.

Таким образом, если известно решение $f(x,y)$ некоторой задачи (3) в неограниченном по переменной x цилиндре $D_0 = (x \in R) \times (y \in Q \subseteq R^m)$, то по формулам (13), (14) получаем решение аналогичной задачи (1), (2) в полуцилиндре $D = (x < 0) \times (y \in Q \subseteq R^m)$, ограниченном двухслойной плёнкой $x = 0$.

Например, фундаментальные решения для уравнения Лапласа на всей плоскости $P_0 = R^2$, в полуплоскости $P_1 = (x \in R) \times (0 < y < \infty)$ и в полосе $P_2 = (x \in R) \times (0 < y < \pi)$ с однородными граничными условиями Дирихле на $\partial P_{1,2}$ имеют соответственно вид

$$f(x,y) = \frac{1}{4\pi} \ln[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2], \qquad x_0 < 0,$$

$$f(x,y) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2}, \qquad x_0 < 0, \qquad y_0 > 0$$

и

$$f(x,y) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\operatorname{ch}(x-x_0) - \cos(y-y_0)}{\operatorname{ch}(x-x_0) - \cos(y+y_0)}, \qquad x_0 < 0, \qquad 0 < y_0 < \pi,$$

при этом функция $f(x,y)$ в соответствующей области удовлетворяет условиям $\Delta f = \delta(x-x_0, y-y_0)$, $f_{|\partial P_{1,2}} = 0$, где $\delta(x,y)$ – функция Дирака. Тогда фундаментальные решения аналогичных задач в областях $P_j \cap (x < 0)$, $j = 0,1,2$, ограниченных двухслойной плёнкой $x = 0$ с однородным граничным условием (2) строятся по соответствующим формулам (13), (14).

Список литературы

1. Холодовский С. Е. Задачи математической физики в областях с плёночными включениями и плёночными границами. Чита: ЗабГУ, 2017. 234 с.

2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1962. Т. 3. 656 с.

3. Kholodovskii S. E. The Convolution Method of Fourier Expansions. The Case of Generalized Transmission Conditions of Crack (Screen) Type in Piecewise Inhomogeneous Media // Differential Equations. 2009. Vol. 45, No. 6. P. 873–877.

4. Kholodovskii S. E. On multilayer films on the boundary of a half-space // Mathematical Notes. 2016. Vol. 99, No. 3. P. 426–431.

Статья поступила в редакцию 15.05.2017; принята к публикации 29.05.2017

Библиографическое описание статьи

Холодовский С. Е. О решении краевых задач для неоднородных дифференциальных уравнений в полуцилиндрах, ограниченных двухслойной плёнкой // Учёные записки Забайкальского государственного университета. Сер. Физика, математика, техника, технология. 2017. Т. 12, № 4. С. 24–28. DOI: 10.21209/2308-8761-2017-12-4-24-28.

Svyatoslav Ye. Kholodovskii,
Doctor of Physics and Mathematics, Professor,
Transbaikal State University
(30 Aleksandro-Zavodskaya st., Chita, Russia, 672039),
e-mail: hol47@yandex.ru

Regarding the Solution of Boundary Value Problems for Nonhomogeneous Differential Equations in Half-Cylinders Bounded Two-Layer Film

In the article we consider a class of boundary value problems in the half-cylinders $D = (x < 0) \times (y \in Q \subseteq R^m)$ bounded on the basis $x = 0$ of the two-layer film composed of strongly and weakly permeable layers. On the film we set a homogeneous boundary condition of the first type. In the half-cylinder we consider nonhomogeneous differential equations of a certain class. Using the method of convolution of Fourier expansions the solutions problems with film are expressed through the solutions of the classical problems in the cylinder $D_0 = (x \in R) \times (y \in Q \subseteq R^m)$ without film with conservation of equation in D.

Keywords: boundary value problem, two-layer films, the generalized boundary conditions

References

1. Kholodovskii S. E. Zadachi matematicheskoi fiziki v oblastyakh s plenochnymi vklyucheniyami i plenochnymi granitsami. Chita: ZabGU, 2017. 234 s.

2. Fikhtengol'ts G. M. Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. M.: Nauka, 1962. T. 3. 656 s.

3. Kholodovskii S. E. The Convolution Method of Fourier Expansions. The Case of Generalized Transmission Conditions of Crack (Screen) Type in Piecewise Inhomogeneous Media // Differential Equations. 2009. Vol. 45, No. 6. P. 873–877.

4. Kholodovskii S. E. On multilayer films on the boundary of a half-space // Mathematical Notes. 2016. Vol. 99, No. 3. P. 426–431.

Received: May 15, 2017; accepted for publication May 29, 2017

Reference to article

Kholodovskii S. Ye. Regarding the Solution of Boundary Value Problems for Nonhomogeneous Differential Equations in Half-Cylinders Bounded Two-Layer Film // Scholarly Notes Of Transbaikal State University. Series Physics, Mathematics, Engineering, Technology. 2017. Vol. 12, No. 4. PP. 24–28. DOI: 10.21209/2308-8761-2017-12-4-24-28.