ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS. ANALYTICAL METHODS

УДК 517.958
DOI: 10.21209/2308-8761-2017-12-4-6-10

Ирина Анатольевна Ефимова,
кандидат физико-математических наук, доцент,
Забайкальский институт предпринимательства
(672086, Россия, г. Чита, ул. Ленинградская, 16),
e-mail: yefimova79@yandex.ru

О движении полуограниченной струны с упругим контактом (точечной массой) на конце

Рассмотрены две краевые задачи для полуограниченной струны с неоднородными граничными условиями типа упругого контакта и точечной массы, что моделирует неидеальные контакты протяжённых объектов с внешней средой. Уравнение и начальные условия однородны. Решения рассмотренных задач получены в явном виде. Приведены конкретные примеры, для которых решения задач получены в конечном виде.

Ключевые слова: краевые задачи, движение полуограниченной струны, упругие контакты, точечные массы

В реальных условиях не существует абсолютно покоящихся объектов. Все «неподвижные» объекты под воздействием внешних факторов в той или иной мере совершают малые колебания. В технике часто концы колеблющихся предметов предохраняют от разрушения амортизирующими прокладками типа упругих контактов. Также границы колеблющихся предметов утяжеляют, что препятствует их движению. Отсюда имеет большой практический интерес решение задач о колебании протяжённых объектов с упругим контактом и с точечной массой на конце.

1. Движение струны с упругим контактом. Рассмотрим задачу о движении полуограниченной струны (или стержня) без начального возмущения и без начальной скорости с упругим контактом типа пружинки на конце струны

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \qquad 0 < x < \infty, \qquad 0 < t < \infty, \tag{1}$$

$$u_{|t=0} = 0, \qquad u_{t|t=0} = 0, \qquad x \geq 0, \tag{2}$$

$$u + Bu_{x|x=0} = f(t), \tag{3}$$

где t – время, $B > 0$ – постоянная, буквенные индексы означают частные производные. В данном случае к концу струны $x = 0$ прикреплена пружинка, свободный (левый) конец которой двигается по заданному закону $f(t)$. Отсюда на конце струны проекция силы натяжения на ось u (т. е. Tu_x) пропорциональна растяжению пружинки: $Tu_x = k[f(t) - u]$ при $x = 0$, где T – модуль силы натяжения, k – жёсткость пружинки, $B = T/k$ (3). Отметим, что в статье [1] рассмотрена аналогичная задача, когда левый конец пружинки не двигается.

Из первого условия (2) следует

$$u(0,0) = 0. \tag{4}$$

Поскольку в задаче (1)–(3) источник движения находится на левом конце струны, то решение этой задачи будем искать в виде прямой волны (т. к. для обратной волны нет источника движения справа от точки $x = 0$)

$$u(x,t) = P(x - at), \tag{5}$$

где $a > 0$. Отсюда функция $u(x,t)$ для любой дважды кусочно-дифференцируемой функции $P(z)$ удовлетворяет уравнению (1) (на соответствующих отрезках). Из начальных условий (2) находим

$$P(x) \equiv 0, \qquad x > 0. \tag{6}$$

Граничное условие (3) для функции (5) примет вид обыкновенного дифференциального уравнения $P(-at) + BP'(-at) = f(t)$ или

$$P(z) + BP'(z) = f(-z/a), \qquad z = -at < 0$$

при начальном условии $P(0) = 0$, которое следует из условия (4). Отсюда функцию $P(z)$ при $z < 0$ найдём в виде

$$P(z) = \beta e^{-\beta z} \int_0^z e^{\beta y} f(-y/a) dy, \qquad z < 0,$$

где $\beta = 1/B$. Тогда с учётом (5), (6) решение исходной задачи (1)–(3) получим в виде

$$u(x,t) = \begin{cases} \beta e^{-\beta(x-at)} \int_0^{x-at} e^{\beta y} f(-y/a) dy, & 0 < x < at, \\ 0 & x \geq at. \end{cases} \tag{7}$$

Отметим, что полученное решение непрерывно при $0 < x < \infty$, включая «бегущую» точку $x = at$ (в точке $x = at$ производная u_x имеет разрыв). Справа от «бегущей» точки (при $x \geq at$) струна находится в покое, т. к. до этой точки волна, индуцированная на левом конце струны, еще не дошла для момента времени t.

Рассмотрим конкретные примеры. Пусть левый конец пружинки двигается по периодическому закону $f(t) = \sin pt$. Тогда решение (7) задачи (1)–(3) найдём в конечном виде в элементарных функциях

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{q[\cos p(t-x/a)+q\sin p(t-x/a)-e^{\beta(at-x)}]}{1+q^2}, & 0 < x < at, \\ 0 & x \geq at, \end{cases}$$

где $q = a/(pB)$, $\beta = 1/B$.

Аналогично решается задача для начальной функции $f(t) = \cos pt$, при этом решение задачи (1)–(3) имеет вид

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{q[q\cos p(t-x/a)-qe^{\beta(at-x)}-\sin p(t-x/a)]}{1+q^2}, & 0 < x < at, \\ 0 & x \geq at. \end{cases}$$

Последнее позволяет находить решения задач в конечном виде для широкого класса функций $f(t)$ вида частичных сумм рядов Фурье.

2. Движение струны с точечной массой. Рассмотрим задачу о движении полуограниченной струны (стержня) с точечной массой на конце $x = 0$

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \qquad 0 < x < \infty, \qquad 0 < t < \infty, \tag{8}$$

$$u_{|t=0} = 0, \qquad u_{t|t=0} = 0, \qquad x \geq 0, \tag{9}$$

$$u_x + Au_{xx|x=0} = f(t), \tag{10}$$

где постоянная $A > 0$. В данном случае на конце струны $x = 0$ находится точечная масса m, на которую действует сила с заданным законом изменения проекции этой силы на ось u вида $\varphi(t)$. При этом на конце струны сила инерции mu_{tt} пропорциональна приращению проекции сил натяжения на ось u: $mu_{tt} = \varphi(t) - Tu_x$ при $x = 0$ [2, с. 147]. Отсюда с учётом уравнения (8) ($u_{tt} = a^2 u_{xx}$) следует граничное условие (10), где $A = ma^2/T$, $f(t) = \varphi(t)/T$.

Из первого условия (9) вида $u(x,0) \equiv 0$ следует

$$u(0,0) = 0, \qquad u_x(0,0) = 0, \tag{11}$$

где $x = +0$.

Как и выше, представим решение задачи (8)–(10) в виде прямой волны (5), т. е. функция $u(x,t)$ (5) удовлетворяет уравнению (8). Из начальных условий (9) находим

$$P(x) \equiv 0, \qquad x > 0. \tag{12}$$

Граничное условие (10) для функции (5) примет вид обыкновенного дифференциального уравнения

$$P'(z) + AP''(z) = f(-z/a), \qquad z = -at < 0$$

при начальных условиях $P(0) = 0$, $P'(0) = 0$, которые следуют из условий (11). Отсюда функцию $P(z)$ при $z < 0$ найдём в виде

$$P(z) = \int_0^z f(-y/a)dy - e^{-\gamma z}\int_0^z e^{\gamma y} f(-y/a)dy, \qquad z < 0,$$

где $\gamma = 1/A$. Тогда с учётом (5), (12) решение задачи (8)–(10) получим в виде

$$u(x,t) = \begin{cases} \int_0^{x-at} f(-y/a)dy - e^{\gamma(at-x)}\int_0^{x-at} e^{\gamma y} f(-y/a)dy, & 0 < x < at, \\ 0 & x \geq at. \end{cases} \tag{13}$$

При этом функция (13) непрерывна при $0 < x < \infty$.

В качестве примера рассмотрим функцию $f(t) = \sin pt$. Тогда решение (13) задачи (8)–(10) найдём в конечном виде

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{a[q^2\cos p(t-x/a) - q\sin p(t-x/a) + e^{\gamma(at-x)}]}{p(1+q^2)}, & 0 < x < at, \\ 0 & x \geq at, \end{cases}$$

где $q = a/(pA)$, $\gamma = 1/A$.

В случае $f(t) = \cos pt$ решение задачи (8)–(10) имеет вид

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{a[qe^{\gamma(at-x)} - q\cos p(t-x/a) - q^2\sin p(t-x/a)]}{p(1+q^2)}, & 0 < x < at, \\ 0 & x \geq at. \end{cases}$$

Для линейной комбинации рассмотренных в данных примерах функций $f(t)$ с различными значениями p решение задачи (8)–(10) также строится в конечном виде.

Список литературы

1. Холодовский С. Е., Потехо А. О. Решение краевой задачи о движении полуограниченной струны с граничным условием третьего рода // Ученые записки ЗабГУ. Сер. Физика, математика, техника, технология. 2013. № 3. С. 140–145.

2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.

Статья поступила в редакцию 19.05.2017; принята к публикации 01.06.2017

Библиографическое описание статьи

Ефимова И. А. О движении полуограниченной струны с упругим контактом (точечной массой) на конце // Учёные записки Забайкальского государственного университета. Сер. Физика, математика, техника, технология. 2017. Т. 12, № 4. С. 6–10. DOI: 10.21209/2308-8761-2017-12-4-6-10.

Irina A. Efimova,
Candidate of Engineering Science, Associate Professor,
Transbaikal Institute of Entrepreneurship
(16 Leningradskaya st., Chita, Russia, 672086),
e-mail: yefimova79@yandex.ru

On the Motion of Semi Bounded String with Elastic Contact (Mass Point) at the End

We consider two boundary value problems for semi bounded string with non-uniform boundary conditions of type elastic contact and a point mass, which simulates non-ideal contacts of extended objects with the external environment. The equation and the initial conditions are homogeneous. Solving the considered task is given explicitly. Specific examples for which the solution of tasks is received in final form are given.

Keywords: boundary value problems, movement of semi bounded string, elastic contacts, the mass point

References

1. Kholodovskii S. E., Potekho A. O. Reshenie kraevoi zadachi o dvizhenii poluogranichennoi struny s granichnym usloviem tret'ego roda // Uchenye zapiski ZabGU. Ser. Fizika, matematika, tekhnika, tekhnologiya. 2013. № 3. S. 140–145.

2. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. Uravneniya matematicheskoi fiziki. M.: Nauka, 1972. 735 s.

Received: May 19, 2017; accepted for publication June 01, 2017

Reference to article

Efimova I. A. On the Motion of Semi Bounded String with Elastic Contact (Mass Point) at the End // Scholarly Notes Of Transbaikal State University. Series Physics, Mathematics, Engineering, Technology. 2017. Vol. 12, No 4. No. 4. PP. 6–10. DOI: 10.21209/2308-8761-2017-12-4-6-10.