O INTUICIONISMO E O PROBLEMA COM AS PROVAS NÃO CONSTRUTIVAS

Diego Henrique Figueira de Melo[1]
Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)

RESUMO:
O presente artigo tem por finalidade avaliar o problema intuicionista com as provas não construtivas na matemática. Para esta posição construtivista o princípio do terceiro excluído, da lógica clássica, não deve operar sobre demonstrações matemáticas. As provas não construtivas não são aceitas, sendo as provas construtivas as únicas com caráter positivo. Após uma breve introdução ao intuicionismo e seu idealizador, o artigo abordará a relação entre o princípio do terceiro excluído e as provas na matemática, para assim falar sobre o problema das provas não construtivas e da consequência em não aceitá-las. Ao tomar a matemática unicamente como um empreendimento de construção mental, o intuicionismo quebra com o realismo platônico dominante e estabelece um debate frutífero sobre os fundamentos da matemática.

PALAVRAS-CHAVE: Intuicionismo; Provas matemáticas; Terceiro excluído; Lógicas não clássicas.

THE INTUITIONISM AND THE PROBLEM WITH NON-CONSTRUCTIVE PROOFS

ABSTRACT:
This article aims to evaluate the intuitionist problem with non-constructive mathematicals proofs. For this constructivist position the principle of the excluded middle, of classical logic, shouldn't operate on mathematical demonsrations. Non-constructive proofs aren't accepted, and the constructive proofs are the only with positive character. After a brief introduction about intuitionism and its creator, the article will address the relationship between the principle of the excluded middle and the mathematicals demonstrations, so to talk about the problem of non-constructive proofs and the consequences for not to accepting them. Taking

[1] Doutorando em Filosofia pela Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Minas Gerais – Brasil. E-mail: melo.dhf@gmail.com

the mathematics only as a mental construction project, the intuitionism break with the dominant platonic realism and establishing a fruitful debate on the foundations of mathematics.

KEYWORDS: Intuitionism; Mathematicals Proofs; Excluded Middle; Nonclassical Logic.

Introdução

O *intuicionismo* é uma vertente construtivista que diz respeito aos fundamentos da matemática. O matemático holandês Luitzen Brouwer (1881-1966) é considerado o "pai" do intuicionismo[2], sendo a versão desenvolvida por este pensador o fio condutor para a escrita aqui desenvolvida. A abordagem construtivista, elaborada por Brouwer, é oposta à abordagem *realista* (de viés platônico) adotada por vários matemáticos de sua época, como a do alemão David Hilbert[3] (1862-1943) e a do austríaco Kurt Gödel (1906-1978) "que foi um platonista por toda sua vida" (IEMHOFF, 2015, p.4). Resumidamente pode-se colocar o impasse entre essas vertentes com a seguinte pergunta: *os objetos matemáticos são construídos ou descobertos?* Os matemáticos realistas afirmam que estes objetos são descobertos enquanto os construtivistas afirmam que eles são produções mentais[4]. A proposta de Brouwer "foi considerada estranha por muitos, mas tratada como forte concorrente frente a abordagem clássica adotada por alguns dos matemáticos mais famosos do seu tempo" (IEMHOFF, 2015, p.4). O intuicionismo, fundado pelo matemático holandês, trata a matemática como uma atividade humana que almeja resolver problemas encontrados pelo próprio homem, sendo sua elaboração fruto da interação entre diversos indivíduos em constante diálogo e cooperação. A matemática, nessa linha de pensamento, é vista como uma construção intersubjetiva. Segundo Da Costa:

> Brouwer insiste que a matemática não se compõe de verdades eternas, relativas a objetos intemporais, metafísicos, semelhante às ideias platônicas. Em contraposição, com base em pressupostos pragmáticos, ele procura demonstrar que o saber matemático escapa a toda e qualquer caracterização

[2]"Na matemática clássica ele fundou a moderna geometria por estabelecer, por exemplo, a invariância geométrica da dimensão e o teorema do ponto fixo. Ele também forneceu a primeira definição correta de dimensão. Na filosofia sua criação é o intuicionismo, uma revisão sobre os fundamentos da matemática" (VAN ATTEN, 2011, p. 1).

[3]"Vimos que Hilbert admitia a existência de elementos ideais, nas disciplinas matemáticas, com a finalidade precípua de sistematizá-las e simplificá-las" (DA COSTA, 1992, p.62).

[4]"A matemática construtiva é diferente da sua contraparte tradicional, a matemática clássica, apenas por interpretar a frase *existe* como *podemos construir*". (PALMGREN & BRIDGES, 2013, p.1).

> simbólica e se forma em etapas sucessivas que não podem ser conhecidas de antemão. A matemática, em resumo, pertence à categoria das atividades sócio-biológicas e se destina a satisfazer certas exigências vitais do homem. (1992, p. 36).

Sendo assim, para Brouwer, “os fundamentos da matemática estão na própria matemática” (1975, p. 89). Para este pensador holandês, a matemática se justifica e se funda apenas em sua construção [5], não necessitando, como queriam os platônicos, assumir a existência de entidades suprassensíveis que justificariam a atividade dos matemáticos.

Dentre as motivações de Brouwer está a discussão sobre as condições necessárias para uma prova matemática ser aceita. Desta forma será conveniente compreender a crítica intuicionista ao *princípio do terceiro excluído* da lógica clássica e, por fim, as implicações que a rejeição deste princípio produz na análise das provas (como, por exemplo, a redução ao absurdo) utilizadas na prática matemática.

O terceiro excluído e as provas na matemática

Basicamente pode-se caracterizar a lógica clássica da seguinte forma:

> A lógica clássica pressupõe o princípio da *bivalência*, segundo o qual toda sentença possui um dos dois valores de verdade, isto é, toda sentença ou é verdadeira ou é falsa. Pelo *princípio da não contradição*, também endossado pela lógica clássica, uma sentença não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa. E, pelo *princípio do terceiro excluído*, ou uma dada sentença é verdadeira, ou sua negação é verdadeira. Sentenças da forma $p \vee \neg p$(terceiro excluído) e $\neg(p \wedge \neg p)$(não contradição) são sempre verdadeiras. (RODRIGUES FILHO, 2011, p. 28-29).

O princípio do terceiro excluído, como foi citado acima, garante que as valorações de uma sentença e sua negação sejam contrárias. Estendendo a noção de *sentença* para a de *prova matemática* e aplicando o terceiro excluído, pode-se dizer que toda prova matemática ou é verdadeira ou é falsa, desta forma uma prova matemática e sua negação não podem ter as mesmas valorações[6]. Matemáticos platônicos (realistas) tendem a concordar com a posição apresentada, ou seja, a de se aplicar o terceiro excluído ao âmbito das provas matemáticas. *Prima facie* parece razoável aceitar a posição platônica, afinal as provas matemáticas parecem ser ou verdadeiras ou falsas. Porém alguns questionamentos surgem quando se começa a usar

[5] “Na filosofia de Brouwer, conhecida como intuicionismo, a matemática é uma livre criação da mente humana, e um objeto existe se, e somente se, ele puder ser (mentalmente) construído” (PALMGREN & BRIDGES, 2013, p.12).

[6] “O princípio do terceiro excluído nos diz que $\models a \vee \neg a$, i.e., assumindo que a é um estado matemático definido, ou ele ou sua negação deve ser verdade” (VAN DALEN, 2008, p.30).

esse método para solucionar problemas “abertos”, surgindo a necessidade de se separar as provas matemáticas entre *construtivas* e *não construtivas*.

Para exemplificar as diferenças entre provas construtivas e não construtivas na matemática serão utilizados, como referências adaptadas, os exemplos expostos por George e Velleman (2002, P. 3-5)[7]. A primeira prova diz respeito ao somatório dos n primeiros números naturais maiores que zero, podendo ser expressa da seguinte forma:

- Teorema 1: a soma dos n primeiros números naturais maiores que zero equivale a:

$$\frac{n}{2}(1+n)$$

- Prova por indução matemática: a soma dos números naturais maiores que zero exibe uma propriedade interessante que pode ser representada no seguinte esquema:

$$1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)+n$$

Nesta sequência a soma do primeiro termo com o último (1+n) equivale à soma do segundo termo com o penúltimo [2 + (n-1)], com a soma do terceiro termo com o antepenúltimo [3 + (n-2)] e assim sucessivamente. A indução matemática pode ser aplicada porque a sequência dos números naturais sempre cresce de acordo com a unidade. Ao se agrupar as somas por pares de números, pode-se afirmar que a soma dos n primeiros termos dos números naturais maiores que zero será:

$$\frac{n}{2}(1+n)$$

A demonstração desta propriedade, a soma da sequência dos números naturais maiores que zero, ilustra a noção de prova construtiva. Foi construída uma propriedade da sequência dos números naturais de forma que sua elaboração exibisse uma especificidade da sequência em questão não deixando margens para críticas. Agora será apresentada a segunda prova para ilustrar uma situação onde se utilizará uma prova não construtiva para se demonstrar propriedades matemáticas:

- Teorema 2: $\sqrt{2}$ é irracional.

- Prova por redução ao absurdo: a prova por redução ao absurdo

[7]Os exemplos e as provas retratados neste artigo sofreram pequenas alterações de ordem e formalização com o objetivo de tornar a exposição mais simples e coerente com o texto.

requer a utilização do princípio do terceiro excluído da lógica clássica visto anteriormente. Tomando a proposição p como a afirmação de que $\sqrt{2}$ é irracional, pelo princípio do terceiro excluído pode-se dizer que $p \vee \neg p$, ou seja, ou $\sqrt{2}$ é irracional ou $\sqrt{2}$ não é irracional (logo, é racional).

A prova por redução ao absurdo da proposição p consiste em mostrar que $\neg p$ leva a uma contradição (ou trivialidade), logo se $\neg p$ é falso, então p é verdade. Partindo de $\neg p$, ou seja, de que $\sqrt{2}$ não é irracional, pode-se dizer que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, onde a e b são números inteiros e primos entre si (a fração está na forma irredutível). Se isso é verdade, pode-se elevar os dois lados da igualdade ao quadrado que a relação permanece, ou seja $\sqrt{2} = \frac{a^2}{b^2}$, podendo também ser escrito na forma $2b^2 = a^2$. Como o quadrado de todo número ímpar é um número ímpar, $2b^2$ será sempre par e a^2 também será par. Assim se conclui que a também é par. Ora, se a é par ele pode ser escrito como $a = 2c$, assim a relação $2b^2 = a^2$ pode ser escrita na forma $2b^2 = 4c^2$, ou seja, $b^2 = 2c^2$. Feito estas considerações se chega a conclusão de que b também deve ser par, contrariando a premissa com a qual a demonstração foi iniciada, que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ e a e b são números inteiros e primos entre si. A prova por redução ao absurdo pode ser formalizada de acordo com o seguinte esquema:

$$p \vee \neg p$$
$$\neg\neg p$$
$$p$$

Foi exatamente o que a demonstração do teorema 2 respeitou. Partindo do princípio do terceiro excluído de que ou $\sqrt{2}$ é irracional ou $\sqrt{2}$ não é irracional, se mostrou que não é o caso que $\sqrt{2}$ não é irracional, logo se concluiu que $\sqrt{2}$ é irracional.

A prova apresentada acima, por redução ao absurdo, é um exemplo de prova não construtiva na matemática. Observe que não foi construída nenhuma prova para p, ou seja, para o teorema que afirma que $\sqrt{2}$ é irracional. O que foi feito foi uma demonstração de que $\neg p$ leva à trivialidade, logo se demonstrou $\neg\neg p$, e a partir do terceiro excluído se concluiu p. Além da prova por redução ao absurdo se pode, também, destacar a seguinte prova não construtiva:

- Teorema 3: existem números irracionais a e b tal que a^b é racional.

- Prova por argumento de casos: como foi demonstrado no teorema anterior, $\sqrt{2}$ é irracional. Para o bem da simplicidade será considerado $a = b = \sqrt{2}$, logo $a^b = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$. Tomando p como sendo a proposição que afirma que $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ é racional, novamente pode-se dizer que, pelo terceiro excluído, ou é o caso que p ou não é o caso que p.

Diferentemente da redução ao absurdo, aqui será avaliado caso por caso do terceiro excluído:

- Caso 1: assume-se que p é o caso, ou seja, que $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ é racional. Considerando esse caso, o teorema 3 já está provado.

- Caso 2: assume-se que $\neg p$ é o caso, ou seja, que $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ é irracional. Dessa forma em vez de se escolher $a = b = \sqrt{2}$, basta escolher $a = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ e $b = (\sqrt{2})$. Portanto a exigência de que existem números irracionais a e b tal que a^b é racional é cumprida, pois para este caso $a^b = ((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$. Novamente o teorema 3 é provado.

Nesta última demonstração, apesar do uso do terceiro excluído, não foi utilizado a prova por redução ao absurdo, logo não se demonstrou $\neg\neg p$ para se concluir p. Na prova por argumento de casos foi mostrado que assumindo p ou $\neg p$ o teorema 3 é provado. A prova é não construtiva porque ela apenas admite a existência de números irracionais a e b tal que a^b seja racional, porém não apresenta quaisquer possibilidades de construção destes números.

O problema das provas não construtivas

Para a exposição da crítica intuicionista às provas não construtivas na matemática será abordado, primeiramente, aspectos básicos da lógica intuicionista. Conforme Da Costa escreveu:

> A lógica, para Brouwer, não é o fundamento da matemática, segundo pretendem os logicistas. Dá-se precisamente o oposto: as leis lógicas (aplicáveis no domínio matemático) derivam-se da matemática, ou, melhor, da linguagem matemática. E como Brouwer acha que a atividade matemática independe da linguagem, isto é, da maneira pela qual expressamos as verdades dessa ciência, conclui ele, singularmente, que as leis lógicas não constituem fenômeno matemático e, sim, fenômeno etnográfico. (1992, p. 38).

A lógica idealizada por Brouwer foi axiomatizada e melhor desenvolvida pelo seu discípulo Arend Heyting (1898-1980), porém interessa, para a presente exposição, menos os desenvolvimentos técnicos desta lógica do que alguns aspectos básicos para a continuidade do trabalho. Conforme ressalta Van Atten: "A interpretação padrão atual da lógica intuicionista é a interpretação BHK (de 'Brouwer, Heyting e Kolmogorov')" (2014, p.2), sendo que seus conectivos podem ser avaliados da maneira que se segue:

- $\perp$ não é provável.
- A prova de $a \wedge b$ consiste na prova de a e na prova de b.
- A prova de $a \vee b$ consiste na prova de a ou na prova de b.
- A prova de $a \rightarrow b$ é a construção que transforma toda prova de a em uma prova de b.
- A prova de $\exists x A(x)$ se dá por apresentar pelo menos um elemento d do domínio e uma prova de *A(d)*.
- A prova de $\forall x A(x)$ é a construção que transforma toda prova de d que pertence ao domínio em uma prova de *A(d)*.

Após elucidar estas interpretações é importante destacar o seguinte comentário sobre a introdução da negação: "A negação $\neg A$ da fórmula A é provada uma vez que se mostrou que não existe prova de A, o que significa fornecer uma construção que deriva trivialidade de qualquer prova possível de A. Logo $\neg A$ é equivalente a $A \rightarrow \perp$" (IEMHOFF, 2015, p. 10).

Com a interpretação dos símbolos lógicos apresentada, serão mostradas algumas diferenças entre princípios da lógica clássica e da lógica intuicionista. Conforme Da Costa mostrou (1992, p. 40), os princípios abaixo são válidos na lógica clássica:

1. $\neg(p \wedge \neg p)$
2. $p \vee \neg p$
3. $\neg\neg p \leftrightarrow p$

Sendo estes o *princípio da não contradição,* o *princípio do terceiro excluído* e o *princípio da dupla negação*. Na lógica intuicionista o princípio da não contradição é válido, porém os outros dois princípios não são. Da Costa (1992, p. 40) fornece os seguintes princípios para a lógica intuicionista:

4. $p \rightarrow \neg\neg p$
5. $\neg\neg(p \vee \neg p)$
6. $\neg\neg\neg p \leftrightarrow \neg p$

Para a continuação do trabalho interessa focar na diferença entre o princípio 3 da lógica clássica (terceiro excluído) e o princípio 5 da lógica intuicionista apresentado por Da Costa.

Como foi retratado neste artigo, algumas provas matemáticas utilizam o terceiro excluído em inferências para a elaboração de provas não construtivas, como os casos dos teoremas 2 e 3 apresentados no tópico anterior. Contudo intuicionistas não aceitam provas não construtivas na matemática, logo eles rejeitam o princípio do terceiro excluído da lógica clássica. Como foi falado, para Brouwer a matemática é mais uma atividade humana do que regras universais, logo uma prova que não forneça uma construção, ou um método de construção, não tem sentido para um intuicionista. Para exemplificar melhor a passagem do princípio 3, da lógica clássica, para o princípio 5, da lógica intuicionista, será utilizado como exemplo a conjectura de Goldbach, a que diz que *todo número inteiro e par maior que dois (2) equivale à soma de dois números primos*. Esta conjectura é interessante porque, até o momento, não existe um método de se afirmar que ela é verdadeira, logo o único caminho para se construir uma prova é ir encontrando todos os números pares e verificar se Goldbach estava certo. Obviamente tal método é impraticável, pois a sequência dos números pares é infinita, além da distância entre um primo e outro ir aumentando consideravelmente à medida que eles vão se tornando maiores. Feito estas considerações, pode-se dizer que a conjectura de Goldbach é um problema em aberto. Seguindo o raciocínio de Iemhoff (2015, p. 15), e tomando p como a conjectura de Goldbach, até o momento não se pode dizer $p \vee \neg p$ intuicionisticamente (construtivamente)[8]. Ainda não foi encontrada uma demonstração de que p é verdade e nem de que $\neg p$ seja, logo, também, não se pode aferir que $\neg(p \vee \neg p)$, pois não existe um método construtivo para p. Com isso se pode dizer que $\neg\neg(p \vee \neg p)$ é um teorema válido na lógica intuicionista. Outra forma de compreender a divergência dos princípios é chamar $p \vee \neg p$ de a, desta forma $\neg(p \vee \neg p)$ será $\neg a$. Um intuicionista não tem provas para a e nem para $\neg a$, pois se tivesse aplicaria o princípio do terceiro excluído sobre ele mesmo[9]. Por isso a dupla negação é rejeitada pela lógica intuicionista e a tripla negação é introduzida. Negar $\neg a$ é apenas dizer (como Iemhoff mostrou na interpretação da negação) que não existe prova para $\neg a$, e disso não se pode concluir a.

O problema em questão é sobre o *status* das provas não construtivas na solução de problemas matemáticos, afinal *estas provas devem ou não serem aceitas para solucionar determinado problema?* É claro que as respostas para esta questão divergirão de acordo com o referencial teórico

---

[8]"Brouwer observou que o princípio do terceiro excluído foi abstraído de situações finitas e aplicado, sem justificações, para situações infinitas" (MOSCHOVAKIS, 2015, p. 2).

[9]"Na visão de Brouwer não existem verdades matemáticas fora da atividade do pensamento, uma proposição se torna verdade apenas quando o sujeito experimenta sua verdade (elaborando uma construção mental apropriada); da mesma forma, uma proposição se torna falsa apenas quando o sujeito experimenta sua falsidade (realizando uma construção mental da impossibilidade)" (VAN ATTEN, 2011, p.11).

utilizado para se fundamentar a matemática. Pensadores que defendem que os objetos da matemática são descobertos pelos matemáticos aceitam tanto as provas construtivas quanto as provas não construtivas na resolução dos problemas. Para este grupo de pensadores, a matemática é algo imutável e universal, logo um problema em aberto significa uma falha epistêmica humana, cujo trabalho de um matemático deve ser o de tentar resolvê-la. Uma nova solução encontrada por determinado matemático é apenas uma descoberta de algo que antes era desconhecido. As provas não construtivas possuem caráter positivo para essa vertente porque elas representam uma forma de elucidar problemas em abertos cujas soluções existentes ainda não foram descobertas, dessa forma esse tipo de prova se apresenta como uma saída útil e aceitável.

Para matemáticos intuicionistas as provas não construtivas não possuem sentido, afinal a matemática é uma atividade da mente humana, tendo existência somente no ato de sua criação (construção). A rejeição do terceiro excluído é fundamental para esta vertente que defende a posição de que não se pode provar algo que não foi construído. Conforme ressalta Brouwer: “Se segue que a questão da validade do princípio do terceiro excluído é equivalente a questão de *saber se problemas insolúveis na matemática podem existir*. Não restam dúvidas para a convicção a favor da posição de que problemas matemáticos insolúveis não existem” (1975, p. 109).

Um intuicionista não concorda com a posição de que existem problemas em aberto (ou insolúveis) na matemática, pois a matemática só existe na medida em que é formulada pela mente humana. O sentido da matemática é sua construção, então somente provas construtivas possuem status positivo para essa linha de pensamento.

Considerações finais

A exigência, radical, de Brouwer em aceitar apenas provas construtivas é ao mesmo tempo o ponto forte e o ponto fraco da corrente intuicionista. Exigir que determinada prova matemática seja construída parece um procedimento prudente e positivo para a atividade matemática. A construção de determinada propriedade matemática aumenta a quantidade de teoremas e objetos conhecidos na área. O pensamento de Brouwer, segundo Da Costa (1992, p. 45), ao criar instabilidade sobre os fundamentos da matemática no seu tempo, acabou sendo propulsor de outras propostas filosóficas (como o *formalismo*) que tentam fornecer uma leitura mais adequada sobre a atividade matemática.

O problema do intuicionismo é a recusa dos métodos não construtivos, com isso os defensores desta vertente construtivista têm de arcar com problemas filosóficos profundos ao recusarem o terceiro excluído como princípio básico nas elaborações de provas. Pode-se colocar o problema desta forma: se hoje for elaborada uma prova construtiva para solucionar a conjectura de Goldbach, um intuicionista deverá assumir que até ontem não existiam provas nem para p e nem para $\neg p$, mas que a partir de hoje sabe-se que p é o caso. Da Costa (1992, p. 46) ainda coloca um problema a mais para os intuicionistas, o de que o matemático que construiu a prova requerida (neste caso, a solução construtiva da conjectura de Goldbach) venha, por ventura, a esquecê-la. Novamente a abordagem intuicionista levará a concluir que, a partir do momento do esquecimento, não existiriam provas nem para p e nem para $\neg p$. A abordagem intuicionista torna a matemática extremamente subjetiva, descartando qualquer traço de objetividade da mesma. Conforme enfatiza Da Costa:

> Para Brouwer, a lógica é posterior à matemática, isto é, a atividade matemática se desenvolve sem necessidade de se apelar para nenhum princípio lógico; em cada raciocínio particular, é a evidência que garante sua legitimidade. A lógica, então, codifica as regularidades observadas nas inferências feitas, e jamais podemos estar seguros de que dada codificação encerre todos os princípios que reflitam tais regularidades (1994, p. 138-139).

Feito essas considerações, parece que rejeitar veementemente as provas não construtivas afasta o intuicionismo da verdadeira prática matemática, aquela que aceita estas provas enquanto não são encontrados métodos construtivos para solucionar questões de interesse da própria disciplina.

Referências bibliográficas:

BROUWER, L. On the foundations of mathematics. In: HEYTING, A. (Ed.). *Collected Works 1: Philosophy and foundations of mathematics*. New York: American Elsevier Publishing Company, 1975.

DA COSTA, N. *Ensaio sobre os fundamentos da lógica*. 2. ed. São Paulo: Editora Hucitec, 1994.

DA COSTA, N. *Introdução aos fundamentos da matemática*. 3. ed. São Paulo: Editora Hucitec, 1992.

GEORGE, A; VELLEMAN, D. *Philosophies of mathematics*. Oxford: Blackwell Publishers, 2002.

IEMHOFF, R. Intuitionism in the philosophy of mathematics. *The Stanford Encyclopedia of philosophy*. Spring 2015 Edition. Disponível em: <http://plato.stanford.edu/archives/spr2015/entries/intuitionism/>. Acesso em: 19 mai. 2015.

MOSCHOVAKIS, J. Intuitionistic Logic. *The Stanford Encyclopedia of philosophy*. Spring 2015 Edition. Disponível em: <http://plato.stanford.edu/archives/spr2015/entries/logic-intuitionistic/>. Acesso em: 20 mai. 2015.

PALMGREN, E; BRIDGES, D. Constructive Mathematics. *The Stanford Encyclopedia of philosophy*. Winter 2013 Edition. Disponível em: <http://plato.stanford.edu/archives/win2013/entries/mathematics-constructive/>. Acesso em: 20 mai. 2015.

RODRIGUES FILHO, A. *Lógica*. São Paulo: Martins Fontes, 2011.

VAN ATTEN, M. Luitzen Egbertus Jan Brouwer. *The Stanford Encyclopedia of philosophy*. Summer 2011 Edition. Disponível em: <http://plato.stanford.edu/archives/sum2011/entries/brouwer/>. Acesso em: 20 mai. 2015.

VAN ATTEN, M. The development of intuitionistic logic. *The Stanford Encyclopedia of philosophy*. Spring 2014 Edition. Disponível em: <http://plato.stanford.edu/archives/spr2014/entries/intuitionistic-logic-development/>. Acesso em: 20 mai. 2015.

VAN DALEN, D. *Logic and structure*. 4. ed. Heidelberg: Springer, 2008.