

PELABELAN SELIMUT TOTAL SUPER (a,d) -H ANTIMAGIC PADA GRAPH LOBSTER BERATURAN $L_n(q,r)$

Tira Catur Rosalia^{1§}, Luh Putu Ida Harini², Kartika Sari³

¹Jurusan Matematika, Fakultas MIPA – Universitas Udayana [Email: mathematira@gmail.com]

²Jurusan Matematika, Fakultas MIPA – Universitas Udayana [Email: ballidah@unud.ac.id]

³Jurusan Matematika, Fakultas MIPA – Universitas Udayana [Email: sarikaartika@unud.ac.id]

[§]Corresponding Author

ABSTRACT

Graph labelling is a function that maps graph elements to positive integers. A covering of graph G is H_i family subgraph from G , for $1 \leq i \leq k$ with integer k . Graph G admits H covering if for every subgraph H_i is isomorphic to a graph H . A connected graph $G(V, E)$ is an (a, d) - antimagic if there are positive integers a, d and bijective function $f: E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |E(G)|\}$ such that there are injective function $g_f: V \rightarrow N$, defined by $g_f(v) = \sum\{f(uv) | uv \in E(G)\}$ with $g_f(V) = \{a, a + d, \dots, (|V| - 1)d\}$. The purpose of this research is to determine a total super $(a, d) - H$ antimagic covering on lobster graph $L_n(q, r)$. The method of this research is literature study method. It is obtained that there are a total super $(2nq^2r^2 + 3nq^2 + 4nqr^2 + 7nqr - 12nq + 6nrq^2 - 16nr - 22n + d + 1, d) - L_2(q, r)$ antimagic covering for $d \in \{1, 3\}$ on lobster graph $L_n(q, r)$ with integer $n \geq 3, r \geq 1$, and even number $q \geq 2$.

Keywords: total super $(a, d) - H$ antimagic covering, lobster graph, bat graph.

1. PENDAHULUAN

Teori *graph* merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang dapat diaplikasikan ke dalam berbagai bidang ilmu, di antaranya pada bidang teknologi informasi dan komunikasi, kimia, dan biologi. Salah satu materi dalam teori *graph* yang sering dibahas adalah pelabelan *graph*. Pelabelan *graph* diterapkan antara lain pada *Mobile Adhoc Networks* (MANETS), pengamanan dan *routing* otomatis pada jaringan, *X-Ray Crystallographic analysis*, *Design Communication Network addressing Systems*, menentukan *Optimal Circuit Layouts* dan *Radio-Astronomy* (Prasanna, 2014), *coding theory*, radar (Hegde, 2012), penyusunan *chipertext* (kode) dalam kriptografi (Azizah dan Dafik, 2015), serta beberapa bidang lainnya.

Pelabelan *graph* merupakan suatu pemetaan dari elemen *graph* ke bilangan bulat positif. Pada umumnya *domain* (daerah asal) dari pelabelan adalah himpunan sisi dan titik (disebut pelabelan *total*), himpunan titik saja (pelabelan titik), atau himpunan sisi (pelabelan sisi) (Wailis, 2001). Terdapat dua jenis pelabelan *graph*, yaitu pelabelan *magic* dan *antimagic*.

Sebuah *graph* dengan q sisi disebut *graph antimagic* apabila semua sisi dilabeli dengan bilangan positif $1, 2, \dots, q$ tanpa pengulangan, sedemikian sehingga bobot setiap titiknya berbeda (Hartsfield dan Ringel, 1990). Salah satu jenis pelabelan *graph* yang banyak diteliti adalah pelabelan selimut.

Pelabelan selimut pertama kali diperkenalkan oleh Gutiérrez dan Llad  (2005). Diberikan *graph* sederhana H , *graph* $G(V, E)$ dikatakan mengandung *H-covering* apabila setiap sisi pada $E(G)$ yang merupakan *subgraph* dari G , isomorfik terhadap H . Selain itu, dalam bukunya Gallian (2015) telah menuliskan definisi pelabelan (a, d) - *antimagic*. *Graph* terhubung $G : (V: E)$ dikatakan *graph* (a, d) - *antimagic* apabila terdapat bilangan bulat positif a, d dan fungsi bijektif $f: E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |E(G)|\}$ sedemikian sehingga terdapat pemetaan injektif $g_f: V \rightarrow N$ yang didefinisikan sebagai $g_f(v) = \sum\{f(uv) | uv \in E(G)\}$ dengan $g_f(V) = \{a, a + d, \dots, (|V| - 1)d\}$ (Gutiérrez dan Llad ,

2005).

Inayah *et al* (2009) mendefinisikan pelabelan selimut total $(a, d) - H$ antimagic dari graph G merupakan fungsi bijektif ξ dari $V \cup E$ ke $\{1, 2, \dots, |V| + |E|\}$ untuk semua subgraph H' yang isomorfik terhadap H , dengan bobot- H yang dirumuskan sebagai

$$w(H') = \sum_{v \in V(H')} \xi(v) + \sum_{e \in E(H')} \xi(e)$$

Pelabelan ini membentuk barisan aritmetika $a, a + d, a + 2d, \dots, a + (t - 1)d$ dengan a dan d merupakan bilangan bulat positif dan t adalah banyak subgraph G yang isomorfik dengan H . Pelabelan ξ disebut sebagai pelabelan total super $(a, d) - H$ antimagic apabila $\xi(V) = \{1, 2, \dots, |V|\}$ (Gallian, 2015).

Penelitian mengenai pelabelan selimut total super $(a, d) - H$ antimagic telah cukup banyak dibahas dengan berbagai macam graph. Sari (2014) melakukan pelabelan pada graph pohon pisang, kembang api, dan buku. Pada tahun yang sama, Kathiresan *et al* (2015) juga melakukan pelabelan yang sama pada *Star Related Graphs*, dengan ini graph yang digunakan adalah graph Bintang S_n dan graph *Caterpillar*.

Dari beberapa penelitian yang telah dilakukan mengenai pelabelan selimut total super $(a, d) - H$ antimagic, sejauh ini belum ditemukan penelitian yang membahas tentang graph lobster. Graph lobster merupakan salah satu jenis dari graph pohon yang memiliki pola simetris. Mengacu pada penelitian serupa dengan beberapa graph yang relevan serta untuk lebih mengembangkan penelitian mengenai pelabelan selimut total super $(a, d) - H$ antimagic, tujuan dari penelitian adalah menentukan pelabelan selimut total super $(a, d) - H$ antimagic pada graph lobster beraturan $L_n(q, r)$.

Guna membatasi masalah agar tidak terlalu luas, dalam penelitian ini penulis memberikan batasan masalah sebagai berikut :

1. Graph $L_2(q, r)$ digunakan sebagai selimut untuk pelabelan graph lobster beraturan $L_n(q, r)$.
2. Graph lobster $L_n(q, r)$ yang akan dilabeli memiliki jarak maksimum $t = 2$.

2. TINJAUAN PUSTAKA

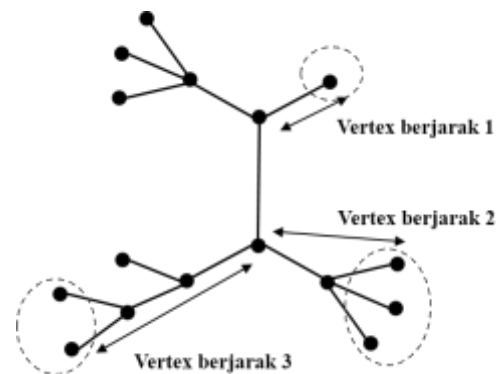
Selanjutnya, diberikan beberapa teori yang mendasari penelitian ini.

2.1 Graph Lobster

Graph lobster merupakan salah satu jenis dari graph pohon (tree). Berikut diberikan definisi graph lobster.

Definisi 2.1 (Khan, Pal, dan Pal, 2009) Graph lobster adalah suatu graph pohon yang mengandung lintasan (dengan panjang maksimum) di mana setiap simpul lain dari graph tersebut memiliki jarak maksimum t terhadap lintasan, dengan t adalah bilangan bulat.

Gambar 1 merupakan contoh graph lobster yang memiliki jarak maksimum $t = 3$.



Gambar 1. Graph lobster dengan jarak maksimum $t = 3$

Graph lobster $L_n(q, r)$ merupakan graph lobster teratur yang memiliki n vertex backbone sebagai lintasan utama, setiap vertex backbone berhubungan dengan q vertex hand dan setiap vertex hand berhubungan dengan r vertex finger, ($n, r \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, dan q genap) (Gumilar *et al*, 2013).

2.2 Multi himpunan k -seimbang

Didefinisikan bahwa multi himpunan adalah himpunan yang memperbolehkan adanya elemen-elemen yang sama dalam satu himpunan. Pada penelitian ini, notasi $[a, b] = \{x \in \mathbb{N} | a \leq x \leq b\}$. Selain itu, didefinisikan pula gabungan dari multihimpunan, yang disimbolkan dengan \sqcup , yaitu $\{a\} \sqcup \{a, b\} = \{a, a, b\}$. Berikut diberikan definisi dan lemma terkait dengan multihimpunan k -seimbang.

Definisi 2.2 (Roswitha *et al*, 2013) Diberikan $k \in \mathbb{N}$ dan X adalah multi himpunan yang berisi bilangan bulat positif. Multi himpunan X dinamakan k -seimbang apabila terdapat k himpunan bagian dari X dinamakan $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$, sedemikian sehingga setiap $i \in [1, k]$, berlaku $|X_i| = \frac{|X|}{k}$, $\sum X_i = \frac{\sum X}{k} \in \mathbb{N}$, $\bigsqcup_{i=1}^k X_i = X$. Untuk setiap $i \in [1, k]$, X_i disebut himpunan bagian seimbang dari X .

3. METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah kajian pustaka yaitu dengan mengumpulkan dan mengkaji referensi berupa buku, skripsi, jurnal maupun tulisan dari perpustakaan dan situs web.

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini diuraikan sebagai berikut:

1. Mempelajari penelitian sebelumnya mengenai pelabelan selimut total super $(a, d) - H$ antimagic. Pada tahap ini akan diulas kembali tentang definisi dasar, contoh-contoh dan beberapa sifat yang menjadi landasan penelitian selanjutnya.
2. Mengkonstruksikan *graph* yang dilabelkan, yaitu *graph* lobster beraturan $L_n(q, r)$.
3. Menentukan bobot selimut H -terbesar dan bobot selimut H -terkecil.
4. Menentukan batas atas d untuk tiap kelas *graph* yang akan dicari pelabelannya.
5. Membuat lemma-lemma yang diperoleh dari penurunan lemma teknik multihimpunan k -seimbang.
6. Menentukan pelabelan sisi dan pelabelan titik. yang dipartisi dengan menggunakan teknik multihimpunan k -seimbang. Penggunaan teknik ini dapat menghasilkan bobot H_i dengan $1 \leq i \leq n$ yang membentuk suatu barisan aritmatika.
7. Menentukan bentuk pola umum pelabelan selimut total super $(a, d) - H$ antimagic pada *graph* lobster beraturan $L_n(q, r)$.
8. Menentukan bobot selimut serta nilai a dan d pada pola pelabelan selimut total super $(a, d) - H$ antimagic yang diperoleh.

9. Membangun beberapa teorema untuk membuktikan kebenaran dari pola umum pelabelan.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Sebelum melakukan pelabelan selimut total super $(a, d) - L_2(q, r)$ antimagic pada *graph* lobster $L_n(q, r)$, diberikan lemma multi himpunan k -seimbang yang digunakan dalam mendukung pola pelabelan,

4.1 Multi himpunan k -seimbang

Definisi dari multi himpunan k -seimbang telah disajikan pada Definisi 2.2. Selanjutnya, definisi tersebut digunakan sebagai dasar untuk mendapatkan Lemma 4.1.

Lemma 4.1 Jika $k, x, y \geq 2$ bilangan bulat non negatif maka multi himpunan $X = [x, x + 2ky - 1]$ merupakan multi himpunan k -seimbang.

Bukti. Ambil sebarang $k, x, y \geq 2$ bilangan bulat positif. Dibentuk subhimpunan $X_i = \{a_{ij}, b_{ij}, 0 \leq j \leq y - 1\}$ untuk $i \in [1, k]$, dengan

$$a_{ij} = x + y(i - 1) + j;$$

$$b_{ij} = x + 2ky - y(i - 1) - j - 1;$$

untuk $0 \leq j \leq y - 1$.

Selanjutnya dibentuk dua multi himpunan A dan B untuk $i \in [1, k]$ yaitu

$$A = \{a_{ij} \mid a_{ij} = x + y(i - 1) + j, 0 \leq j \leq y - 1\} \\ = [x, x + yk - 1];$$

$$B = \left\{ b_{ij} \mid \begin{array}{l} b_{ij} = x + 2ky - y(i - 1) - j - 1, \\ 0 \leq j \leq y - 1 \end{array} \right\} \\ = [x + ky, x + 2ky - 1].$$

Dengan memperhatikan multi himpunan X dan X_i , diperoleh bahwa untuk setiap $i \in [1, k]$, $|X| = 2ky$ dan $|X_i| = 2y$ sehingga dapat dituliskan sebagai persamaan $|X_i| = \frac{|X|}{k}$. Diperhatikan bahwa jumlah elemen pada X_i adalah sebagai berikut

$$\sum X_i = \sum_{j=0}^{y-1} a_{ij} + \sum_{j=0}^{y-1} b_{ij} \\ = 2xy + 2ky^2 - y. \quad (1)$$

Selain itu, jumlah setiap elemen pada X_{i+1} adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \sum X_{i+1} &= \sum_{j=1}^{y-1} a_j^{i+1} + \sum_{j=1}^{y-1} b_j^{i+1} \\ &= 2xy + 2ky^2 - y. \end{aligned} \tag{2}$$

Dengan memperhatikan persamaan (1) dan (2), diperoleh $\sum X_{i+1} = \sum X_i$. Diperhatikan pula bahwa jumlah elemen pada himpunan X adalah

$$\begin{aligned} \sum X &= \sum_{n=x}^{x+2ky-1} n \\ &= 2kxy + 2k^2y^2 - ky \end{aligned}$$

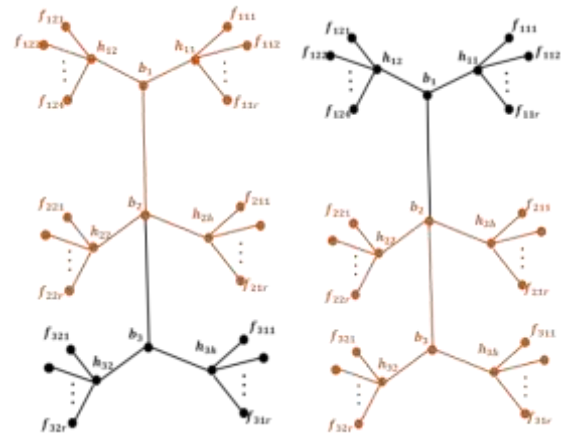
Hal ini berarti untuk setiap $i \in [1, k]$, $\sum X_i = \frac{\sum X}{k}$. Selain itu, dapat dilihat bahwa $A \cup B = X$ dan dengan memperhatikan elemen-elemen dari X_i dan X diperoleh $\bigsqcup_{i=1}^3 X_i = X$. Berdasarkan definisi multi himpunan k -seimbang, dapat disimpulkan bahwa multi himpunan $X = [x, x + 2ky - 1]$ merupakan multi himpunan k -seimbang. \square

Sebagai ilustrasi penggunaan Lemma 4.1 berikut diberikan Contoh 4.2.

Contoh 4.2 Diberikan $X = [10,33]$ dan diambil bilangan bulat positif $k, x, y \geq 2$. Untuk $x = 10$, diperoleh $ky = 24$. Nilai k yang mungkin adalah 2, 3, 4, 6, 12, sehingga $X = [10,33]$ dapat dibentuk menjadi multi himpunan k -seimbang dengan $k = 2, 3, 4, 6, 12$.

4.2 Pelabelan Selimut Total Super $(a, d) - L_2(q, r)$ antimagic pada Graph Lobster $L_n(q, r)$

Sebelum membahas pola pelabelan, akan dicari banyak $subgraph L_n(q, r)$ yang isomorfik terhadap selimut $L_2(q, r)$ yang disimbolkan dengan s . Diperhatikan bahwa pada graf $L_3(q, r)$, memiliki dua $subgraph$ yang isomorfik terhadap selimut $L_2(q, r)$ yang disajikan pada Gambar 2. Bagian yang diberi warna coklat merupakan $subgraph$ dari $L_3(q, r)$ yang isomorfik terhadap $L_2(q, r)$.



Gambar 2. Graf lobster $L_3(q, r)$, dengan dua $subgraph$ yang isomorfik terhadap selimut $L_2(q, r)$

Dengan memperhatikan pola graf selanjutnya dengan n yang lebih besar diperoleh bahwa banyak $subgraph L_n(q, r)$ yang isomorfik terhadap selimut $L_2(q, r)$ adalah $n - 1$, dengan $n \geq 3$.

Pada pelabelan selimut total super $(a, d) - H$ antimagic, nilai d merupakan selisih dari jumlah label selimut H . Diberikan batas maksimum nilai d pada Lemma 4.3.

Lemma 4.3. Jika graph lobster $L_n(q, r)$ adalah $(a, d) - L_2(q, r)$ antimagic total super, maka untuk $n \geq 3$ diperoleh nilai

$$d \leq \frac{4nq^2 + 16nqr + 7nq + 16nr^2 + 14nr + 3n - 8q^2}{n-2} - \frac{32qr + 14q + 32r^2 + 28r + 6}{n-2}$$

Bukti. Diberikan G adalah graph lobster $L_n(q, r)$ dan H adalah graph lobster $L_2(q, r)$ dengan

$$\begin{aligned} |V(G)| &= v_G = n(1+q+qr); \\ |E(G)| &= e_G = n(1+q+qr) - 1; \\ |V(H)| &= v_H = 2(1+q+qr); \\ |E(H)| &= e_H = 2q + 2qr + 1. \end{aligned}$$

Misalkan ξ adalah fungsi bijektif dari $E(G) \cup V(G)$ pada $\{1, 2, 3, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$ dengan $\xi(V(G)) = \{1, 2, 3, \dots, V(G)\}$ dan $\xi(E(G)) = \{V(G) + 1, V(G) + 2, \dots, V(G) + E(G)\}$. Dimisalkan $\omega(H_h)$ adalah bobot selimut H untuk $1 \leq h \leq s$. Diperoleh bobot selimut H terbesar adalah

$$\omega(H_s) = \sum_{v \in V(H_s)} \xi(v) + \sum_{e \in E(H_s)} \xi(e). \tag{3}$$

Diperhatikan bahwa jumlah label *vertex*

$$\sum_{v \in V(H_s)} \xi(v) \leq \sum_{i=0}^{v_H-1} v_G - i$$

dan jumlah label *edge*

$$\sum_{e \in E(H_s)} \xi(e) \leq \sum_{i=0}^{e_H-1} (v_G + e_G - i).$$

Selanjutnya, persamaan (3) dapat dituliskan sebagai suatu pertidaksamaan yaitu

$$\omega(H_s) \leq \sum_{i=0}^{v_H-1} v_G - i + \sum_{i=0}^{e_H-1} (v_G + e_G - i) \quad (4)$$

Karena *graph G* adalah total super $(a, d) - H$ antimagic maka bobot selimut *H* terbesar adalah $a + (s - 1)d$. Meninjau dari pertidaksamaan (3) diperoleh

$$\begin{aligned} a + (s - 1)d &\leq \sum_{i=0}^{v_H-1} v_G - i \\ &\quad + \sum_{i=0}^{e_H-1} (v_G + e_G - i) \\ &= 6nq^2r^2 + 6nq^2 + 10nqr + 10nq \\ &\quad + 12nrq^2 + 4n - 4q^2r^2 - 4q^2 \\ &\quad - 6qr - 6q - 8rq^2 - 2. \end{aligned} \quad (5)$$

Selain itu, diperoleh bobot selimut *H* terkecil adalah

$$\omega(H_1) = \sum_{v \in V(H_1)} \xi(v) + \sum_{e \in E(H_1)} \xi(e). \quad (6)$$

Diperhatikan bahwa jumlah label *vertex* adalah

$$\sum_{v \in V(H_1)} \xi(v) \geq \sum_{i=1}^{v_H} i$$

dan jumlah label *edge*

$$\sum_{e \in E(H_1)} \xi(e) \geq \sum_{i=1}^{e_H} (v_G + i).$$

Selanjutnya, persamaan (6) dapat dituliskan sebagai suatu pertidaksamaan yaitu

$$\omega(H_1) \geq \sum_{i=1}^{v_H} i + \sum_{i=1}^{e_H} (v_G + i). \quad (7)$$

Karena *graph G* adalah total super $(a, d) - H$ antimagic maka bobot selimut *H* terkecil adalah a . Meninjau dari pertidaksamaan (7) diperoleh

$$a \geq \sum_{i=1}^{v_H} i + \sum_{i=1}^{e_H} (v_G + i)$$

$$\begin{aligned} &= 2nq^2r^2 + 2nq^2 + 3nqr + 3nq + 4nrq^2 \\ &\quad + n + 4q^2r^2 + 4q^2 + 8qr + 8q + 8rq^2 \\ &\quad + 4. \end{aligned} \quad (8)$$

Dengan mengurangi pertidaksamaan (5) dan (8) diperoleh

$$\begin{aligned} (s - 1)d &\leq (6nq^2r^2 + 6nq^2 + 10nqr + 10nq \\ &\quad + 12nrq^2 + 4n - 4q^2r^2 - 4q^2 \\ &\quad - 6qr - 6q - 8rq^2 - 2) \\ &\quad - (2nq^2r^2 + 2nq^2 + 3nqr + 3nq \\ &\quad + 4nrq^2 + n + 4q^2r^2 + 4q^2 + 8qr \\ &\quad + 8q + 8rq^2 + 4) \\ \Leftrightarrow d &\leq \frac{4nq^2+16nqr+7nq+16nr^2+14nr+3n-8q^2}{n-2} \\ &\quad - \frac{32qr+14q+32r^2+28r+6}{n-2}. \quad \square \end{aligned}$$

Pada *graph lobster* $L_n(q, r)$, diperoleh nilai maksimum

$$d = \left\lceil \frac{4nq^2+16nqr+7nq+16nr^2+14nr+3n-8q^2}{n-2} - \frac{32qr+14q+32r^2+28r+6}{n-2} \right\rceil,$$

dengan $n \geq 3$.

Sebagai contoh, dilakukan pelabelan total super $(a, d) - L_2(2,4)$ antimagic pada *graph lobster* $L_3(2,4)$ dengan $d = 473$ yang diilustrasikan berikut.

Contoh 4.4 Dimisalkan himpunan label untuk *graph lobster* $L_3(2,4)$ adalah $X = [1,33]$ dan $Y = [34,65]$. Elemen X digunakan untuk melabeli *vertex-vertex* pada *graph lobster* $L_3(2,4)$. Himpunan X dipartisi menjadi tiga subhimpunan, dengan untuk setiap $i \in [1,3]$ diperoleh subhimpunan X_i adalah

$$X_1 = [1,11]; X_2 = [12,22]; X_3 = [23,33].$$

Elemen subhimpunan X_i digunakan untuk melabeli *vertex* b_i, h_{ij} , dan f_{ijk} untuk $1 \leq j \leq 2$ dan $1 \leq k \leq 8$. Jumlah elemen subhimpunan X_i untuk setiap $i \in [1,3]$ adalah $\sum X_i = 121i - 55$.

Elemen Y digunakan untuk melabeli *edge-edge* pada *graph lobster* $L_3(2,4)$. Himpunan Y dipartisi menjadi 2 himpunan, $B = \{44,55\}$ dan $F = [34,43] \cup [45,54] \cup [56,65]$. Himpunan F dipartisi menjadi tiga subhimpunan, dengan untuk setiap $i \in [1,3]$ diperoleh subhimpunan F_i adalah

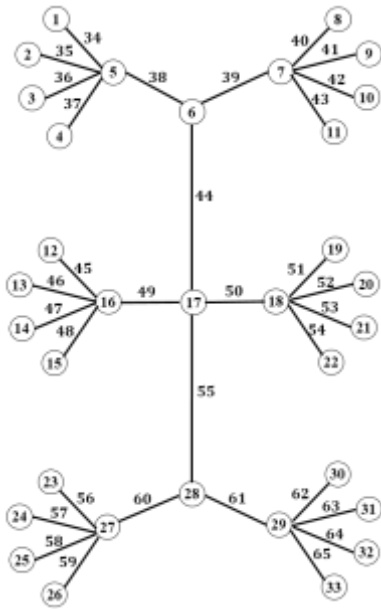
$$F_1 = [34,43]; F_2 = [45,54]; F_3 = [56,65].$$

Elemen subhimpunan F_i digunakan untuk melabeli *edge* yang menghubungkan *vertex* b_i

dengan h_{ij} , dan *vertex* h_{ij} dengan f_{ijk} untuk $1 \leq j \leq 2$ dan $1 \leq k \leq 8$. Elemen subhimpunan B_h digunakan untuk melabeli *edge* yang menghubungkan *vertex* b_h dengan b_{h+1} untuk $1 \leq h \leq 2$. Jumlah elemen subhimpunan F_i untuk setiap $i \in [1,3]$ adalah $\sum F_i = 110i + 275$, dan jumlah subhimpunan B_i adalah $B_i = 11i + 33$.

Pada *graph* lobster $L_3(2,4)$ terdapat 2 sub*graph* yang isomorfik dengan $L_2(2,4)$. Dimisalkan $\omega(H_h)$ untuk $1 \leq h \leq 2$ adalah bobot setiap sub*graph* lobster $L_n(q,r)$ yang isomorfik dengan $L_2(q,r)$. Kemudian untuk setiap $1 \leq h \leq 2$ diperoleh

$$\begin{aligned} \omega(H_h) &= \sum_{i=0}^1 X_{i+h} + \sum_{i=0}^1 F_{i+h} + B_h \\ &= 473h + 704. \end{aligned}$$



Gambar 3. Pelabelan selimut total super $(1221, 473) - L_2(2, 4)$ antimagic pada *graph* lobster $L_3(2, 4)$

Sehingga diperoleh nilai $d = \omega(H_{h+1}) - \omega(H_h) = 473$ dan $a = 1221$. Hasil pelabelan selimut total super $(1221, 473) - L_2(2, 4)$ antimagic pada *graph* lobster $L_3(2, 4)$ disajikan pada Gambar 3.3.

Pola pelabelan selimut total super $(a, 1) - L_2(q, r)$ antimagic pada *graph* lobster $L_n(q, r)$ disajikan dengan Teorema 4.5.

Teorema 4.5 Diberikan bilangan bulat $n \geq 3, r \geq 1$ dan bilangan genap $q \geq 2$, *graph* lobster $L_n(q, r)$ memiliki pelabelan selimut total super $(2nq^2r^2 + 3nq^2 + 4nqr^2 + 7nqr - 12nq + 6nrq^2 - 16nr - 22n + 2, 1) - L_2(q, r)$ antimagic.

Bukti. Diberikan suatu *graph* lobster $L_n(q, r)$ dengan bilangan bulat $n \geq 3, r \geq 1$ dan bilangan genap $q \geq 2$. Misalkan ξ_1 adalah fungsi bijektif dari $E(L_n(q, r)) \cup V(L_n(q, r))$ pada $\{1, 2, 3, \dots, 2n(1 + q + qr)\}$ dengan $\xi_1(V(L_n(q, r))) = \{1, 2, 3, \dots, n(1 + q + qr)\}$.

Himpunan semua label *vertex* pada *graph* lobster $L_n(q, r)$ adalah $X = [1, n(1 + q + qr)]$, dan label *edge* adalah $Y = [n(1 + q + qr) + 1, 2n(1 + q + qr) - 1]$.

Selanjutnya himpunan X dipartisi menjadi tiga subhimpunan yaitu $X = B \cup D \cup F$, dengan $B = [1, n]$, $D = [n + 1, n(q + 1)]$; $F = [n(q + 1) + 1, n(q + 1 + qr)]$.

Himpunan Y dipartisi menjadi tiga subhimpunan yaitu $Y = P \cup Q \cup R$, dengan $P = [n(q + 1 + qr) + 1, n(q + 2 + qr) - 1]$, $Q = [n(q + 2 + qr), n(2q + 2 + qr) - 1]$, $R = [n(2q + 2 + qr), 2n(q + qr + 1)]$.

Didefinisikan pelabelan ξ_1 pada $L_n(q, r)$. Pertama akan dilakukan pelabelan *vertex* - *vertex* pada $L_n(q, r)$. Labeli *vertex backbone* dengan elemen dari B dilakukan dari *vertex* paling atas ke *vertex* paling bawah, sehingga diperoleh $\sum B_i = i$ untuk $1 \leq i \leq n$. Kemudian labeli *vertex hand* dengan elemen dari D . Berdasarkan Lemma 4.1 dengan $x = n + 1; k = n; 2y = q$ diperoleh D merupakan n -seimbang. Dengan menggunakan persamaan (1) diperoleh $\sum D_i = \frac{nq^2}{2} + \frac{q}{2} - 2n - 1$. Selanjutnya labeli *vertex finger* dengan elemen dari F . Berdasarkan Lemma 4.1 dengan $x = n(q + 1) + 1; k = n; 2y = qr$, diperoleh F merupakan n -seimbang. Dengan menggunakan persamaan (1) diperoleh $\sum F_i =$

$$\frac{nq^2r^2}{2} + nrq^2 + \frac{qr}{2} - 2nq - 2n - 1.$$

Selanjutnya akan dilakukan pelabelan *edge*-*edge* pada $L_n(q, r)$. Gunakan elemen dari P

untuk melabeli *edge* yang menghubungkan *vertex-vertex backbone* dilakukan dari *vertex* paling bawah ke *vertex* paling atas, sehingga diperoleh $\sum P_h = n(2 + q + qr) - h$ untuk $1 \leq h \leq n - 1$. Labeli *edge* yang menghubungkan *vertex backbone* dan *vertex hand* dengan elemen dari Q . Berdasarkan Lemma 4.1 dengan $x = n(q + 2 + qr)$; $k = n, 2y = q$ diperoleh Q merupakan n -seimbang. Dengan menggunakan persamaan (1) diperoleh $\sum Q_i = nq^2 + 2nqr - \frac{nq}{2} - 4nr - \frac{q}{2} - 4n + 1$. Selanjutnya labeli *edge* yang menghubungkan *vertex hand* dan *vertex* dengan elemen dari R . Berdasarkan Lemma 4.1 dengan $x = 2n(q + 1 + r)$; $k = n, 2y = qr$ diperoleh R merupakan n -seimbang. Dengan menggunakan persamaan (1) diperoleh $\sum R_i = \frac{nq^2r^2}{2} + 2nqr^2 + 2nrq^2 + nqr - \frac{qr}{2} - 4nq - 4nr - 4n + 1$.

Dimisalkan $\omega(H_h)$ untuk $1 \leq h \leq n - 1$ adalah bobot setiap *graph lobster* $L_n(q, r)$ yang isomorfik dengan $L_2(q, r)$. Kemudian untuk setiap $1 \leq h \leq n - 1$ diperoleh

$$\begin{aligned} \omega(H_h) &= \sum_{i=0}^1 B_{i+h} + 2 \sum D_i + 2 \sum F_i + P_h \\ &\quad + 2 \sum Q_i + 2 \sum R_i \\ &= 2nq^2r^2 + 3nq^2 + 4nqr^2 + 7nqr \\ &\quad - 12nq + 6nrq^2 - 16nr - 22n + h + 1 \end{aligned}$$

Dengan mengurangkan $\omega(H_{h+1})$ dengan $\omega(H_h)$ diperoleh nilai $d = 1$ dan nilai a adalah $2nq^2r^2 + 3nq^2 + 4nqr^2 + 7nqr - 12nq + 6nrq^2 - 16nr - 22n + 2$. □

Pola pelabelan yang telah diberikan pada Teorema 4.5, menjadi dasar munculnya Akibat 4.6 yang menjelaskan pola pelabelan selimut total super $(a, 3) - L_2(q, r)$ antimagic pada *graph lobster* $L_n(q, r)$.

Akibat 4.6 Diberikan bilangan bulat $n \geq 3$, $r \geq 1$ dan bilangan genap $q \geq 2$, *graph lobster* $L_n(q, r)$ memiliki pelabelan selimut total super $(2nq^2r^2 + 3nq^2 + 4nqr^2 + 7nqr - 12nq + 6nrq^2 - 16nr - 22n + 4, 3) - L_2(q, r)$ antimagic.

Bukti. *Graph* $L_n(q, r)$ dilabeli dengan

menggunakan pola pelabelan sesuai dengan Teorema 4.5 untuk *vertex backbone*, *vertex hand*, *vertex finger*, *edge* yang menghubungkan *vertex backbone* dengan *vertex hand*, dan *edge* yang menghubungkan *vertex hand* dengan *vertex finger*. *Edge* yang saling menghubungkan *vertex backbone* dilabeli dengan elemen dari P dilakukan dari *vertex* paling atas ke *vertex* paling bawah sehingga diperoleh $\sum P_h = (n(1 + q + qr) + h)$ untuk $1 \leq h \leq n - 1$. Kemudian untuk setiap $1 \leq h \leq n - 1$ diperoleh

$$\begin{aligned} \omega(H_h) &= \sum_{i=0}^1 B_{i+h} + 2 \sum D_i + 2 \sum F_i + P_h \\ &\quad + 2 \sum Q_i + 2 \sum R_i \\ &= 2nq^2r^2 + 3nq^2 + 4nqr^2 + 7nqr \\ &\quad - 12nq + 6nrq^2 - 16nr - 22n \\ &\quad + 3h + 1. \end{aligned}$$

Dengan mengurangkan $\omega(H_{h+1})$ dengan $\omega(H_h)$ diperoleh nilai $d = 3$. Diperoleh nilai a adalah $2nq^2r^2 + 3nq^2 + 4nqr^2 + 7nqr - 12nq + 6nrq^2 - 16nr - 22n + 4$. □

Ilustrasi pelabelan selimut total super $(a, 1) - L_2(4, 5)$ antimagic pada *graph lobster* $L_4(4, 5)$ disajikan pada Contoh 4.7. Selain itu, contoh pelabelan selimut total super $(a, 3) - L_2(4, 5)$ antimagic pada *graph lobster* $L_4(4, 5)$ disajikan pada Gambar 5.

Contoh 4.7 Diberikan *graph lobster* $L_4(4, 5)$ yang memiliki tiga sub*graph* yang isomorfik dengan $L_2(4, 5)$. Gambar 4 merupakan *graph lobster* $L_4(4, 5)$ yang dilabeli berdasarkan Teorema 4.6. Himpunan semua label *vertex* pada *graph lobster* $L_4(4, 5)$ menggunakan himpunan $X = [1, 100]$, dan label *edge* menggunakan himpunan $Y = [101, 199]$. Elemen dari himpunan $X = [1, 100]$ dipartisi menjadi tiga subhimpunan $X = B \cup D \cup F$, dengan $B = [1, 4]$, $D = [5, 20]$ dan $F = [21, 100]$. Himpunan Y dipartisi menjadi tiga subhimpunan, $P = [101, 103]$, $Q = [104, 119]$, dan $R = [120, 199]$.

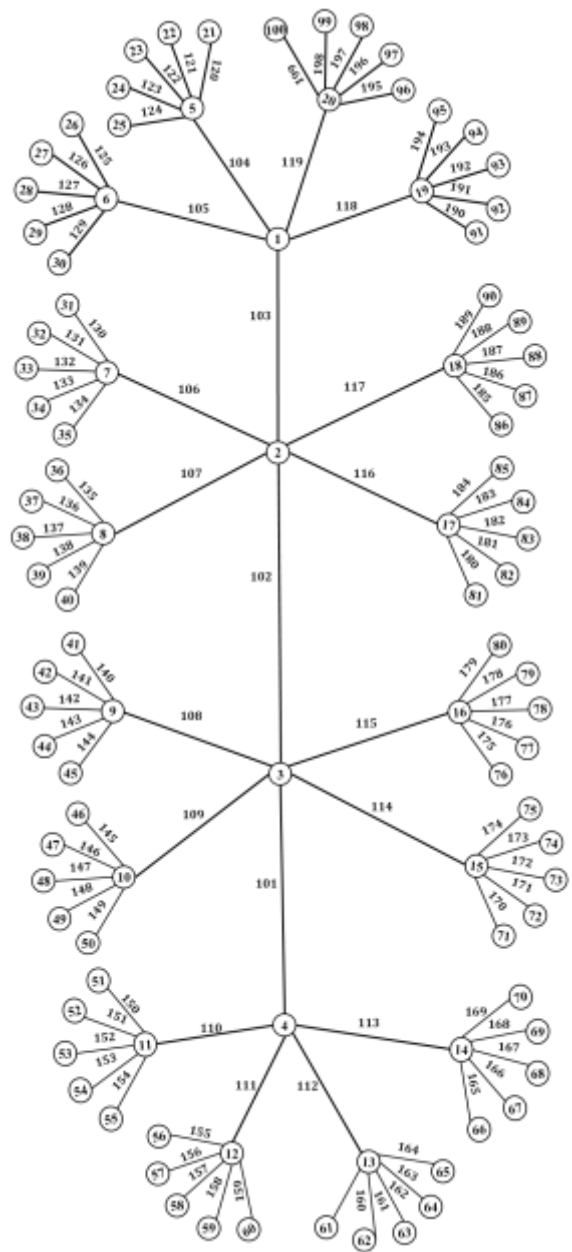
Pertama akan dilakukan pelabelan *vertex - vertex* pada $L_n(q, r)$. Labeli *vertex backbone* dengan elemen dari B dilakukan dari *vertex* paling atas ke *vertex* paling bawah, sehingga diperoleh elemen dari B_h adalah $\{h\}$ untuk $1 \leq h \leq 4$. Kemudian labeli *vertex hand* dengan

elemen dari D . Selanjutnya labeli *vertex finger* dengan dengan elemen dari F . Berdasarkan Lemma 4.1 dengan $x = 21, k = 4, y = 10$, F merupakan 4-seimbang.

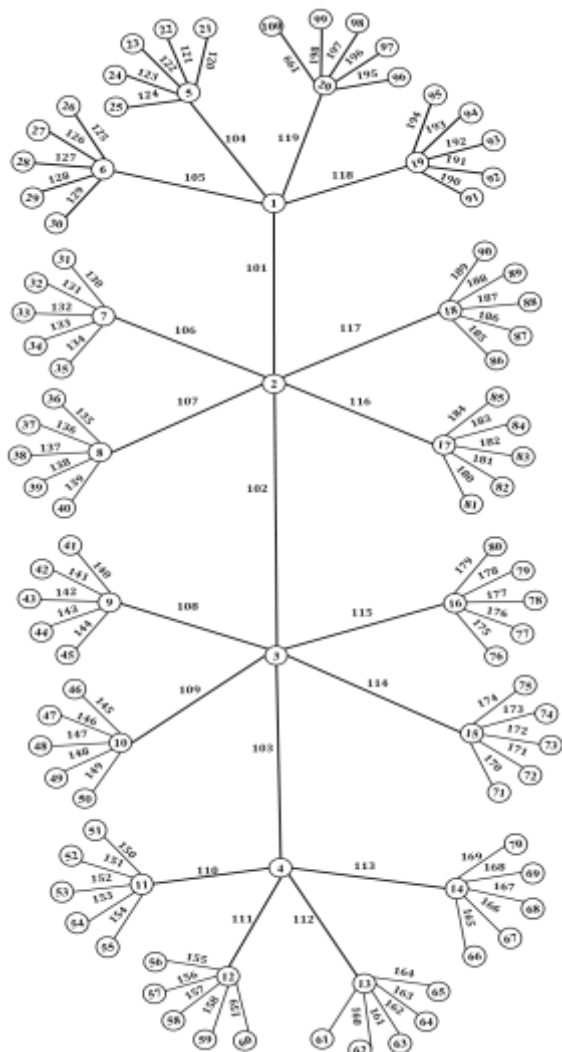
Selanjutnya akan dilakukan pelabelan *edge-edge* pada $L_4(4,5)$. Gunakan elemen dari P untuk melabeli *edge* yang menghubungkan *vertex-vertex backbone* dilakukan dari *vertex* paling bawah ke *vertex* paling atas. Labeli *edge* yang menghubungkan *vertex backbone* dan *vertex hand* dengan elemen dari Q . Berdasarkan Lemma 4.1 dengan $x = 104, k = 4, y = 2$, Q merupakan 4-seimbang.

Selanjutnya labeli *edge* yang menghubungkan *vertex hand* dan *vertex* dengan elemen dari R . Berdasarkan Lemma 4.1 dengan $x = 120, k = 4, y = 10$, R merupakan 4-seimbang.

Berdasarkan persamaan (9) pada Teorema 4.6, dapat dicari nilai a adalah $a = \omega(H_1) = 6874$ dengan $d = 1$. Ilustrasi pelabelan selimut total super $(6874,1) - L_2(4,5)$ antimagic pada *graph lobster* $L_4(4,5)$ disajikan pada Gambar 4.



Gambar 4. Pelabelan selimut total super $(6874, 1) - L_2(4, 5)$ antimagic pada *graph lobster* $L_4(4, 5)$



Gambar 5. Pelabelan selimut total super (6876,3) – $L_2(4,5)$ antimagic pada graf lobster $L_4(4,5)$

5. KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Penelitian ini menghasilkan kesimpulan bahwa *graph* lobster $L_n(q,r)$ untuk n,r,q bilangan bulat dengan $n \geq 2, r \geq 1, q \geq 2$ genap memiliki pelabelan selimut total super $(2nq^2r^2 + 3nq^2 + 4nqr^2 + 7nqr - 12nq + 6nrq^2 - 16nr - 22n + d + 1, d) - L_2(q,r)$ antimagic untuk $d \in \{1,3\}$.

Saran

Bagi pembaca yang tertarik dengan pelabelan selimut total super $(a,d) - H$ antimagic dapat memperluas kajian penelitian selanjutnya dengan menggunakan selimut lain atau mencari nilai d yang belum dicari dalam penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

- Azizah, I. dan Dafik. 2015. Super $(a; d)$ -H-Antimagic Total Selimut pada Graph Triangular Cycle Ladder untuk Pengembangan Ciphertext. *Seminar Nasional Matematika dan Pembelajarannya*. Universitas Negeri Jember.
- Gallian, Joseph A. 2015. “A Dynamic Survey of Graph Labelling”. *The Electronic Journal of Combinatorics*. 6, p.1-389.
- Gumilar, P. G. D., Harini, L. P. I. dan Sari, Kartika. 2013. “Dimensi Metrik Graph Lobster $L_n(q; r)$ ”. *E-Jurnal Matematika Universitas Udayana*, 2(2), p.42-46.
- Gutiérrez, A. dan Lladó, A. 2005. “Magic Coverings”. *JCMCC*, 55, p.43-56.
- Hartsfield, N. dan Ringel, G.. 1990. *Pearls in Graph Theory*. San Diego : Academic Press.
- Hegde, S.M. 2012. *Labeled Graphs and Digraphs : Theory and Applications*. India : National Institute of Technology Karnataka.
- Inayah N., Simanjuntak R., Salman, A. N. M. dan Syuhada, K.I.A. 2013. “Super $(a, d) - H$ -antimagic total labelings for shackles of a connected graph H ”. *Australasian Journal Of Combinatorics*, 57, p.127-138.
- Kathiresan, K.M and Laurence, S. D. 2015. “On Super $(a, d) - H$ Antimagic Total Covering of Star Related Graphs”. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 35, p.755-764.
- Khan, N., Pal, A. dan Pal, M. 2009. “Edge colouring of Cactus Graphs”. *AMO – Advanced Modelling and Optimization*. 11(4).
- Prasanna, L. N. 2014. “Application of Graph Labelling in Communication Networks”. *Orient. J.Comp. Sci. and Technol*, 7(1)
- Roswitha, M. , Baskoro, E.T, Maryati, T.K., Kurdhi, N.A., dan Susanti, I. 2013. “Further Results On Cycle-Supermagic Labeling”. *AKCE International Journal Of Graphs And Combinatorics*, 10 (2), p.211-220.
- Sari, F.K.. 2014. Pelabelan Selimut $(a, d) - H$ Anti Ajaib Super Pada Graph Pohon Pisang, Kembang Api, dan Buku. *Skripsi*. Universitas Sebelas Maret.
- Wailis, W. D.. 2001. *Magic Graph*. Berlin : Birkhauser Boston.