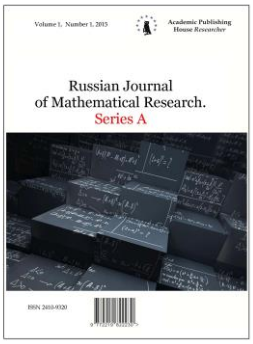
Published in the Slovak Republic
Russian Journal of Mathematical Research. Series A
Has been issued since 2015.
E-ISSN: 2413-7529
2018, 4(1): 38-47

DOI: 10.13187/rjmr.a.2018.1.38
www.ejournal30.com




**Specification Scheme of the Stochastic Production Function for Assessment of Technical Efficiency of the Regions in the Russian Federation**

Victoria A. Rudenko [a, *]

The Central Economic Mathematical Institute (CEMI RAS), Russian Federation

**Abstract**

We propose a method of specification of stochastic production function models for solving problems related to the ranking of objects by the level of technical efficiency at production-regional level. The described method takes into account potential dependence between the random components of the error.

Based on actual data on 80 sub-federal units of the Russian Federation grouped according to the basic characteristics of the GRP structure, an empirical analysis of the influence of possible dependence of the error components on the values of regions' technical efficiency was carried out in accordance with the developed specification scheme. The main types of problems where it is possible to use the premise of the independence of the random error components were described.

**Keywords**: technical efficiency of regions, stochastic frontier models, model's specification, dependence of random values, copulas.

## 1. Введение

В работе была доказана необходимость учета возможной зависимости компонент ошибки для получения корректных оценок технической эффективности в случае высокой степени истинной корреляции компонент в модели стохастической производственной функции. Однако результаты, полученные в процессе анализа реальных данных, свидетельствуют о том, что величина зависимости случайных составляющих ошибки не достигает высоких показателей. В связи с этим была разработана методика спецификации производственной функции, позволяющая ответить на вопрос о возможности или невозможности применения классической предпосылки о независимости компонент ошибки в задачах различного типа (Айвазян и др., 2014).

В нашем исследовании данная методика применяется с целью получения корректных оценок эффективности регионов РФ. Рассматривается расширенный класс моделей стохастической производственной функции, детерминированная часть которой выражается степенной функцией, а случайные компоненты ошибки могут быть статистически зависимы. В общем виде модель может быть представлена как

$M_r:\ R_i = \beta_0 \cdot \left(x_i^1\right)^{\beta_1} \cdot \left(x_i^2\right)^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot \left(x_i^p\right)^{\beta_p} \cdot e^{V_i - U_i}$, где $R_i$ – объясняемая компонента $i$-ого объекта (мы рассмотрим ВРП), $x_i$ — объясняющие компоненты (напр., факторы производства), случайные составляющие ошибки $V_i \sim N\left(0;\sigma_V^2\right)$ и $U_i \sim N^+\left(\mu;\sigma_U^2\right)$ могут быть зависимы.

* Corresponding author
E-mail addresses: vika57vika@yandex.ru (V.A. Rudenko)

В соответствии с (Айвазян и др., 2014; Rudenko et al., 2017) возможная зависимость компонент описана с помощью аппарата копула-функций. Апробация полученной методики проведена на основе двух видов копул: нормальной и копулы Франка (Айвазян, Фантаццини, 2014; Благовещенский, 2012).

Ниже представлены основные формулы и обозначения для каждой из рассматриваемых копул.

1) Плотность двумерной нормальной копула-функции имеет вид:

$$c^{Norm}(u_1,u_2)=\frac{1}{|\Sigma|^{1/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\zeta^T(\Sigma^{-1}-\mathrm{I})\zeta\right),$$

где $\zeta=\left(\Phi^{-1}(u_1),\Phi^{-1}(u_2)\right)^T$ — вектор, компонентами которого являются обратные функции одномерного стандартного нормального распределения,

$\Sigma=\begin{pmatrix}1 & r\\ r & 1\end{pmatrix}$ — корреляционная матрица, $\mathrm{I}$ — единичная матрица.

2) Плотность копулы Франка задается выражением:

$$c^{Frank}(u_1,u_2,\alpha)=\frac{-\alpha(e^{-\alpha}-1)e^{-\alpha(u_1+u_2)}}{\left((e^{-\alpha u_1}-1)(e^{-\alpha u_2}-1)+e^{-\alpha}-1\right)^2},\quad \alpha\neq 0.$$

Пусть $f_V(x)$ и $f_U(y)$ — одномерные плотности распределения случайных составляющих ошибки $V_i$ и $U_i$ соответственно в модели стохастической производственной функции. Совместная плотность распределения $V_i$ и $U_i$ выражается как:

$f^N(x,y)=c^{Norm}(F_V(x),F_U(y))\cdot f_V(x)\cdot f_U(y)$ или

$f^F(x,y)=c^{Frank}(F_V(x),F_U(y))\cdot f_V(x)\cdot f_U(y)$ в зависимости от выбранной копула-функции.

Для анализа необходимости учета возможной зависимости компонент ошибки проверяется статистическая гипотеза о равенстве (близости) нулю коэффициента копулы $r$ ($\alpha$)*:

| |
|---|
| $H_r$: $r=0$ (или $\alpha\to 0$) (величины $V_i$ и $U_i$ являются независимыми)<br>при альтернативе<br>$H_r^A$: $r\neq 0$ (или $\alpha\neq 0$) (между величинами $V_i$ и $U_i$ существует значимая зависимость) |

Для ее проверки используем классическую статистику разности логарифмов функций правдоподобия $Lr=2(\ln L(H_r^A)-\ln L(H_r))$, где $\ln L(H_r^A)$ – логарифм значения функции правдоподобия при альтернативной гипотезе, $\ln L(H_r)$ – логарифм значения функции правдоподобия при нулевой гипотезе †.

В Приложении 1 приведена схема спецификации модели внутри расширенного класса моделей стохастической производственной функции. Основой для разработанной схемы спецификации служит методика, представленная в исследовании (Айвазян и др., 2012). Кроме того, в работе (Rudenko, 2017) приведены результаты, которые позволяют сформулировать предположение о том, что в случае наличия *значимых* факторов эффективности компоненты $V_i$ и $U_i$ являются слабо коррелированными. Вычисления,

* Случаю независимости соответствует $r=0$ в нормальной копуле и $\alpha\to 0$ в копуле Франка.

† Более подробное объяснение можно найти в (Self, Liang, 1987; Coelli, 1995).

проведенные в процессе анализа различных данных, показывают, что случайные компоненты ошибки можно считать независимыми при соблюдении ряда условий (помимо значимости), наложенных на выбор факторов эффективности с целью избавления от эффекта мультиколлинеарности. В связи с этим следует отметить, что модель $M_r$ входит только в ту часть схемы спецификации, которая соответствует случаю отсутствия информации о факторах эффективности.

## 2. Результаты и обсуждение

Эмпирическая часть исследования посвящена анализу реальных экономических показателей 80 субъектов РФ.

В работе рассмотрена двухфакторная модель производственного потенциала регионов вида: $R_i = \beta_0 \cdot K_i^{\beta_1} \cdot L_i^{\beta_2} \cdot e^{V_i - U_i}$, $i = 1,\ldots,n$,

где $R_i$ – объем ВРП $i$-ого региона (в млн. руб.), $K_i$ – стоимость основных фондов $i$-ого региона (на конец года, в млн. руб.), $L_i$ – численность его экономически активного населения (в тыс. человек), $n$ – число анализируемых субъектов РФ.

Случайная величина $V_i$ подчиняется $(0;\sigma_V^2)$-нормальному распределению, а случайная величина $U_i$ распределена в общем случае в соответствии с усеченным в нуле нормальным законом, имеющим среднее значение $\mu$ и дисперсию $\sigma_U^2$ (т.е. $U_i \sim N^+(\mu;\sigma_U^2)$), причем, случайные величины $V_i$ и $U_i$ *могут быть статистически зависимыми.*

В работах (Айвазян и др., 2016a; Айвазян и др., 2016b) предложен способ формирования однородных групп регионов на основе базовых характеристик структуры ВРП, описание которых представлено в Таблице 1.

**Таблица 1.** Характеристики однородных групп регионов по структуре ВРП

| Группа | Название группы | Число регионов в группе | Характеристика группы |
|---|---|---|---|
| G1 | Базовая | 38 | Равномерно развитая промышленность |
| G2 | «Добывающие» | 11 | Развитая добывающая промышленность |
| G3 | «Обрабатывающие» | 12 | Развитые обрабатывающие производства |
| G4 | «Сельскохозяйственные » | 11 | Развитое сельское хозяйство |
| G5 | «Развивающиеся» | 8 | Развивающиеся сельскохозяйственные регионы |

Список регионов, вошедших в каждую из групп, приведен в Приложении 2.

На основе имеющихся показателей за 2013-2015 гг., которые также можно найти в (Айвазян и др., 2016a; Айвазян и др., 2016b), для каждой группы был проведен эмпирический анализ в соответствии со схемой спецификации, предложенной в первой части.

В качестве примера приведем результаты, полученные в группе G3 («обрабатывающие регионы») за 2014 год. Данная группа состоит из следующих областей: Владимирской, Вологодской, Калужской, Липецкой, Нижегородской, Новгородской, Омской, Свердловской, Тульской, Челябинской, Ярославской и республики Башкортостан. В Таблице 2 представлены результаты расчетов, проведенных двумя способами:

- в статистическом пакете Stata 10.0 в предположении независимости случайных составляющих ошибки (модель $M_1$),

- с помощью написанного в программе Excel макроса, в предположении возможной зависимости компонент с использованием нормальной копулы и копулы Франка (модели $M_r$ и $M_\alpha$ соответственно).

**Таблица 2.** Оценки параметров моделей

| | $M_1$ | $M_r$ | $M_\alpha$ |
|---|---|---|---|
| *Оценки коэффициентов при факторах производства* * | | | |
| $\ln K$ | 0.443 | 0.444 | 0.445 |
| $\ln L$ | 0.562 | 0.560 | 0.559 |
| *const* | 3.15 | 3.15 | 3.14 |
| *Оценки параметров компонент ошибки* † | | | |
| $\mu$ | 0 | 0.004 | 0.01 |
| $\sigma_V$ | 0.08 | 0.078 | 0.078 |
| $\sigma_U$ | 0.0015 | 0.0012 | 0.002 |
| $r$ ($\alpha$) | 0 | -0.198 | -3.5 |
| $\rho$ Спирмена | 0 | -0.189 | -0.507 |
| $p$ -значение, полученное при проверки гип. об отсутствии неэфф-ти | 1.000 | — | — |
| Кол-во наблюдений | 12 | 12 | 12 |
| Логарифм функции правдоподобия | 13.273 | 13.389 | 13.387 |

Как видно из Таблицы 2, значения логарифмов функций правдоподобия, оценки параметров факторов производства и компонент ошибки во всех трех моделях отличаются незначительно. Кроме того, представленные данные свидетельствуют об отсутствии неэффективности в рассматриваемых моделях. В соответствии со схемой, приведенной в первой части, цепочка рассуждений в данной выборке выглядит следующим образом:

$$\left\{\begin{matrix} M_2;\, M_2^-;\, M_1;\, M_1^+;\, H_0;\, H_0^-;\, H_1;\, H_1^+;\, M_0;\, H_0;\, H_0^-;\, M_{r(\alpha)};\, M_{r(\alpha)}^+;\, H_r;\, H_r^+ \\ \hat{M}_0 \end{matrix}\right\}$$

Краткое описание моделей и гипотез, участвующих в цепочке, но не представленных в первой части, можно найти в Приложении 3. Итоговой моделью является модель линейной регрессии $M_0$ без компоненты неэффективности. Однако в связи с тем, что оценки основных факторов производства в моделях $M_1$ и $M_0$ в случае подтверждения гипотезы об отсутствии неэффективности совпадают, для текущего анализа удобней рассматривать модель $M_1$, так как при ее использовании можно вычислить ранги значений технических эффективностей.

* Все полученные оценки значимы (p-value близки к 0).

† Значимость параметров компонентов ошибки не оценивалась.

Отметим, что для рассматриваемой выборки введение дополнительного параметра ($r$ или $\alpha$), характеризующего зависимость компонент ошибки, позволяет лишь немного расширить диапазон значений технических эффективностей ($TE$). Кроме того, ранги технических эффективностей ($rk(TE)$) являются согласованными во всех трех моделях ($M_1, M_r$ и $M_\alpha$), что видно из Таблиц 3 и 4.

**Таблица 3.** Значения технических эффективностей и их рангов

| Область | $TE_1$ | $rk(TE_1)$ | $TE_r$ | $rk(TE_r)$ | $TE_\alpha$ | $rk(TE_\alpha)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Владимирская | 0,998826 | 12 | 0,99574 | 12 | 0,991606 | 12 |
| Вологодская | 0,998830 | 9 | 0,995833 | 9 | 0,991941 | 9 |
| Калужская | 0,998843 | 4 | 0,996105 | 4 | 0,993549 | 4 |
| Липецкая | 0,998842 | 5 | 0,99609 | 5 | 0,993453 | 5 |
| Нижегородская | 0,998835 | 7 | 0,995951 | 7 | 0,992585 | 7 |
| Новгородская | 0,998846 | 3 | 0,996176 | 3 | 0,993939 | 3 |
| Омская | 0,998855 | 1 | 0,996386 | 1 | 0,994631 | 1 |
| Республика Башкортостан | 0,998854 | 2 | 0,996365 | 2 | 0,994597 | 2 |
| Свердловская | 0,998841 | 6 | 0,996074 | 6 | 0,993368 | 6 |
| Тульская | 0,998833 | 8 | 0,995902 | 8 | 0,992287 | 8 |
| Челябинская | 0,998829 | 10 | 0,995803 | 10 | 0,99182 | 10 |
| Ярославская | 0,998827 | 11 | 0,995773 | 11 | 0,991697 | 11 |

**Таблица 4.** Корреляция Пирсона значений технических эффективностей

| | $TE_1$ | $TE_r$ | $TE_\alpha$ |
|---|---|---|---|
| $TE_1$ | 1.000 | 0.999 | 0.995 |
| $TE_r$ | 0.999 | 1.000 | 0.994 |
| $TE_\alpha$ | 0.995 | 0.994 | 1.000 |

При анализе остальных групп регионов для различных лет с 2013 по 2015 гг. были получены похожие результаты – оценки, рассчитанные по всем трем моделям, хорошо согласованы, при этом величины функций правдоподобия моделей с копулами незначительно больше, чем в классических моделях. Использование аппарата копула-функций во всех региональных группах дает возможность расширить диапазон значений технических эффективностей, но не оказывает существенного влияния на оценки параметров основных факторов производства. Введение дополнительного параметра зависимости при использовании копул позволяет переоценить дисперсии составляющих ошибки, что раскрывает неэффективность иначе, нежели в классической модели, но ранги технических эффективностей, рассчитанных во всех моделях, имеют высокую степень согласованности.

## 3. Выводы

1. В работе представлена схема, основанная на методике спецификации стохастической производственной функции с учетом возможной зависимости компонент. В соответствии с проведенными исследованиями можно утверждать, что данная методика позволяет отследить негативное влияние некорректного применения предпосылки о независимости компонент ошибки и устранить его с помощью использования аппарата копула-функций.

2. В процессе анализа реальных данных было установлено, что во всех моделях для различных групп регионов в рассматриваемый период времени можно принять гипотезу о независимости случайных компонент ошибки в модели стохастической производственной функции. Это наблюдение позволяет утверждать, что оценки, полученные в классических

моделях, являются корректными и могут быть использованы для решения различных задач, связанных с ранжированием регионов по уровню технической эффективности. Кроме того, при решении задач регионального уровня, связанных с оценкой влияния *основных факторов производства* на уровень ВРП, допустимо использование классических моделей стохастической производственной функции, использующих предпосылку о независимости случайных составляющих ошибки.

3. Использование аппарата копула-функций позволяет расширить диапазон значений технических эффективностей в случае, когда в классических моделях не отвергается гипотеза об отсутствии неэффективности. Эти значения в высокой степени согласованы со значениями, полученными при построении классических моделей без учета возможной зависимости компонент.

4. Проведенные в процессе исследования вычисления позволяют предположить, что в ситуациях, когда при проверке гипотезы об отсутствии связи компонент ошибки значение тестовой статистики близко к критическому, при решении задач нахождения корректных оценок технических эффективностей регионов также следует рассмотреть и другие виды копул. Отметим, что этот шаг может быть опущен, если гипотезы об отсутствии связи компонент ошибки отвергаются с высоким уровнем p-value (как, например, в случае с рассматриваемыми региональными группами).

## 4. Благодарности

Исследование выполнено при поддержке гранта РНФ № 17-18-01080.

## Литература

Айвазян и др., 2012 – *Айвазян С.А., Афанасьев М.Ю., Руденко В.А.* Некоторые вопросы спецификации трехфакторных моделей производственного потенциала компании, учитывающих интеллектуальный капитал // *Прикладная эконометрика*. 2012. №3(27), С. 36-69.

Айвазян и др., 2014 – *Айвазян С.А., Афанасьев М.Ю., Руденко В.А.* Исследование зависимости случайных составляющих остатков в модели стохастической границы // *Прикладная эконометрика*. 2014. №2(34), С. 3–18.

Айвазян и др., 2016b – *Айвазян С.А., Афанасьев М.Ю., Кудров А.В.* Метод кластеризации регионов РФ с учетом отраслевой структуры ВРП // *Прикладная эконометрика*. 2016. № 1 (41), С. 24–46.

Айвазян и др., 2016a – *Айвазян С.А., Афанасьев М.Ю., Кудров А.В.* Модели производственного потенциала и оценки технологической эффективности регионов РФ с учетом структуры производства // *Экономика и математические методы*. 2016. № 1 (52), С. 28–44.

Айвазян, Фантаццини, 2014 – *Айвазян С.А., Фантаццини Д.* Методы эконометрики. М.: Магистр, 2014.

Благовещенский, 2012 – *Благовещенский Ю.Н.* Основные элементы теории копул // *Прикладная эконометрика*. 2012. №2(26), С. 113-130.

Coelli, 1995 – *Coelli T.J.* Estimators and hypothesis tests for a stochastic frontier function: A Monte Carlo analysis // *Journal of Productivity Analysis*. 1995. № 6, pp. 247–268.

Rudenko et al., 2017 – *Rudenko V.A., Aivazyan S.A., Afanasyev M.Y.* Specification of a stochastic production function model in the extended class of stochastic frontier models // *Modeling of Artificial Intelligence*. 2017. № 4(1), pp. 21-28.

Rudenko, 2017 – *Rudenko V.A.* An impact of efficiency factors on dependence between error components in the stochastic production function model / *Материалы XIII международной научно-практической конференции «Наука в современном информационном обществе»*, 3-4 октября 2017 г., North Charleston, USA Том 3, с. 101-103.

Self, Liang, 1987 – *Self S. G., Liang K.-Y.* Asymptotic properties of maximum likelihood estimators and likelihood ratio tests under nonstandard conditions // *Journal of the American Statistical Association*. 1987. № 82, pp. 605–610.

## References

Aivazyan i dr., 2012 – *Aivazyan, S.A., Afanas'ev, M.Yu., Rudenko, V.A.* (2012). Nekotorye voprosy spetsifikatsii trekhfaktornykh modelei proizvodstvennogo potentsiala kompanii, uchityvayushchikh intellektual'nyi kapital [Some questions of specification of three-factor models of the company's production potential, taking into account intellectual capital]. *Prikladnaya ekonometrika*. №3(27), pp. 36-69. [in Russian]

Aivazyan i dr., 2014 – *Aivazyan, S.A., Afanas'ev, M.Yu., Rudenko, V.A.* (2014). Issledovanie zavisimosti sluchainykh sostavlyayushchikh ostatkov v modeli stokhasticheskoi granitsy [Investigation of the dependence of the random components of the residues in the stochastic boundary model]. *Prikladnaya ekonometrika*. №2(34), pp. 3–18. [in Russian]

Aivazyan i dr., 2016a – *Aivazyan, S.A., Afanas'ev, M.Yu., Kudrov, A.V.* (2016). Modeli proizvodstvennogo potentsiala i otsenki tekhnologicheskoi effektivnosti regionov RF s uchetom struktury proizvodstva [Models of production potential and assessment of technological efficiency of RF regions taking into account the production structure]. *Ekonomika i matematicheskie metody*. № 1 (52), pp. 28–44. [in Russian]

Aivazyan i dr., 2016b – *Aivazyan, S.A., Afanas'ev, M.Yu., Kudrov, A.V.* (2016). Metod klasterizatsii regionov RF s uchetom otraslevoi struktury VRP [Method of clusterization of Russian regions taking into account the GRP sector structure]. *Prikladnaya ekonometrika*. № 1 (41), pp. 24–46. [in Russian]

Aivazyan, Fantatstsini, 2014 – *Aivazyan, S.A., Fantatstsini, D.* (2014). Metody ekonometriki [Methods of econometrics]. M.: Magistr. [in Russian]

Blagoveshchenskii, 2012 – *Blagoveshchenskii, Yu.N.* (2012). Osnovnye elementy teorii kopul [The basic elements of the theory of copulas]. *Prikladnaya ekonometrika*. №2(26), pp. 113-130. [in Russian]

Coelli, 1995 – *Coelli, T.J.* (1995). Estimators and hypothesis tests for a stochastic frontier function: A Monte Carlo analysis. *Journal of Productivity Analysis*. № 6, pp. 247–268.

Rudenko et al., 2017 – *Rudenko, V.A., Aivazyan, S.A., Afanasyev, M.Y.* (2017). Specification of a stochastic production function model in the extended class of stochastic frontier models. *Modeling of Artificial Intelligence*. № 4(1), pp. 21-28.

Rudenko, 2017 – *Rudenko, V.A.* (2017). An impact of efficiency factors on dependence between error components in the stochastic production function model. *Materials of the XIII International Scientific and Practical Conference "Science in the Modern Information Society", 3-4 October 2017,* North Charleston, USA Vol. 3, pp. 101-103.

Self, Liang, 1987 – *Self, S. G., Liang, K.-Y.* (1987). Asymptotic properties of maximum likelihood estimators and likelihood ratio tests under nonstandard conditions. *Journal of the American Statistical Association*. № 82, pp. 605–610.

## Схема спецификации стохастической производственной функции в задачах оценивания технической эффективности регионов РФ

Виктория Алексеевна Руденко [a, *]

[a] Центральный экономико-математический институт РАН (ЦЭМИ РАН), Российская Федерация

**Аннотация.** В работе предложена методика спецификации моделей стохастической производственной функции с учетом возможной зависимости случайных компонент ошибки для решения задач, связанных с ранжированием объектов по уровню технической эффективности на производственно-региональном уровне. На основе реальных данных по 80 субъектам РФ, сгруппированных по базовым характеристикам структуры ВРП, в соответствии с разработанной схемой спецификации проведен эмпирический анализ влияния возможной зависимости компонент на значения технических эффективностей регионов. Сформулированы основные типы задач, для решения которых возможно использование предпосылки о независимости случайных составляющих ошибки.

**Ключевые слова**: техническая эффективность регионов, модели стохастической границы, спецификация, зависимость случайных величин, копулы.

[*] Корреспондирующий автор
Адреса электронной почты: vika57vika@yandex.ru (В.А. Руденко)

## Приложение 1

Большинство обозначений и описание рассматриваемых в схеме классических моделей, использующих предпосылку о независимости компонент ошибки, можно найти в (Айвазян и др., 2012). Обозначения дополнительных элементов схемы спецификации модели внутри расширенного класса моделей стохастической производственной функции, возникающие при отказе от использования предпосылки о независимости компонент ошибки, можно найти в (Айвазян и др., 2014; Rudenko et al., 2017).

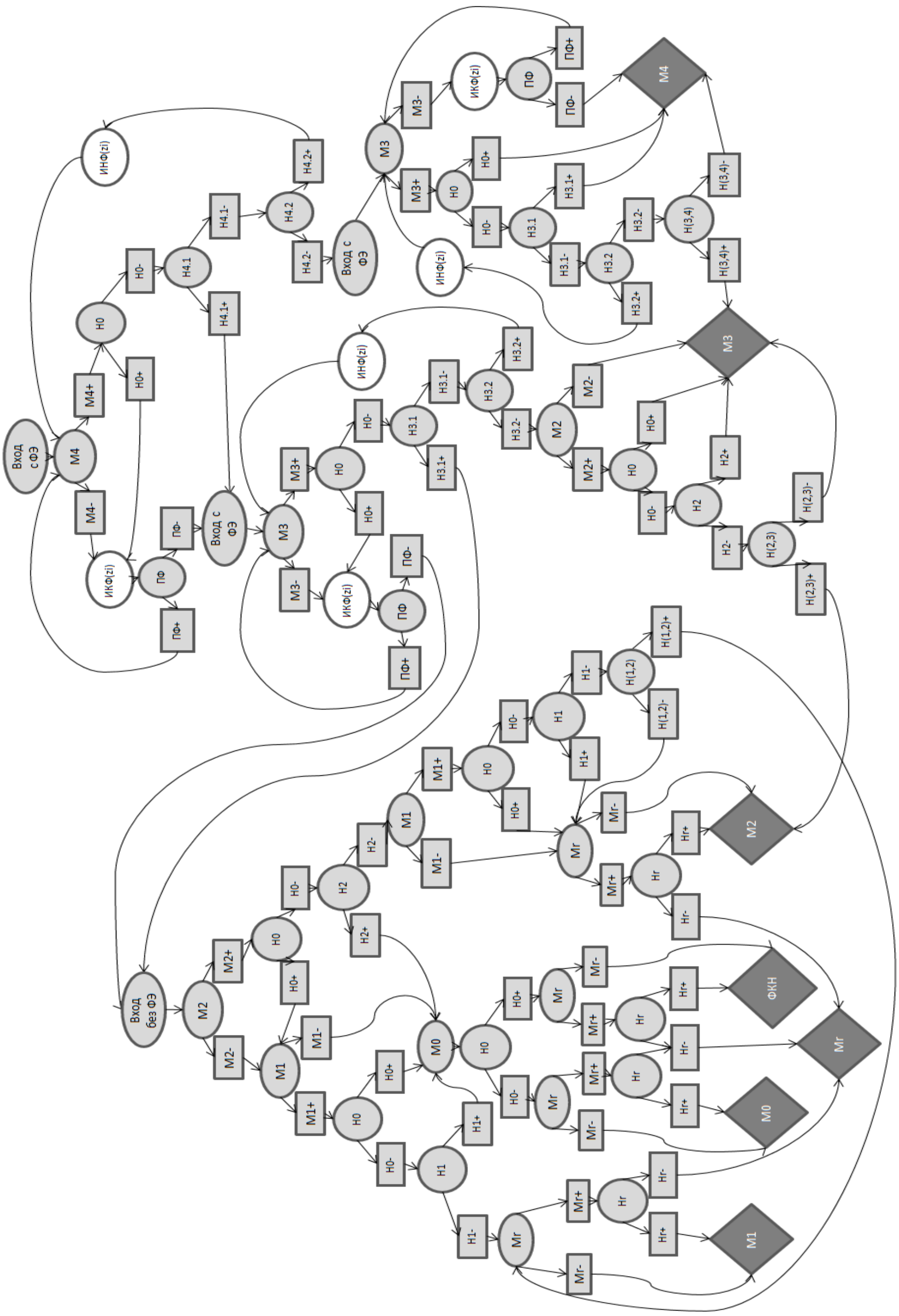


**Рис. 1.** Схема спецификации модели внутри расширенного класса моделей стохастической границы

## Приложение 2

Список регионов, вошедших в группы G1-G5 в соответствии с классификацией, предложенной в (Айвазян и др., 2016a; Айвазян и др., 2016b).

| Гр. | | |
|---|---|---|
| G1 | «Базовая» (Равномерно развитая промышленность) | Амурская область, Астраханская область, Белгородская область, Брянская область, Волгоградская область, Забайкальский край, Ивановская область, Иркутская область, Кабардино-Балкарская Республика, Камчатский край, Калининградская область, Карачаево-Черкесская Республика, Кировская область, Костромская область, Красноярский край, Курская область, Ленинградская область, Магаданская область, Московская область, Мурманская область, Новосибирская область, Орловская область, Пермский край, Приморский край, Республика Карелия, Республика Марий Эл, Республика Мордовия, Республика Хакасия, Рязанская область, Самарская область, Саратовская область, Смоленская область, Тверская область, Ульяновская область, Хабаровский край, Чувашская Республика, г. Москва, г. Санкт-Петербург |
| G2 | «Добывающие» (Развитая добывающая промышленность) | Архангельская область, Кемеровская область, Оренбургская область, Республика Коми, Республика Саха (Якутия), Республика Татарстан, Сахалинская область, Томская область, Тюменская область, Удмуртская Республика, Чукотский автономный округ |
| G3 | «Обрабатывающие» (Развитые обрабатывающие производства) | Владимирская область, Вологодская область, Калужская область, Липецкая область, Нижегородская область, Новгородская область, Омская область, Республика Башкортостан, Свердловская область, Тульская область, Челябинская область, Ярославская область |
| G4 | «Сельскохозяйственные» (Развитое сельское хозяйство) | Алтайский край, Воронежская область, Краснодарский край, Курганская область, Пензенская область, Псковская область, Республика Адыгея, Республика Бурятия, Ростовская область, Ставропольский край, Тамбовская область |
| G5 | «Развивающиеся» (Развивающиеся сельскохозяйственные регионы) | Еврейская автономная область, Республика Алтай, Республика Дагестан, Республика Ингушетия, Республика Калмыкия, Республика Северная Осетия – Алания, Республика Тыва, Чеченская Республика |

## Приложение 3

Классические p-факторные модели, участвующие в схеме спецификации, в которых используется предпосылка о независимости компонент ошибки:

$$M_2: \quad R_i = \beta_0 \cdot \left(x_i^1\right)^{\beta_1} \cdot \left(x_i^2\right)^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot \left(x_i^p\right)^{\beta_p} \cdot e^{V_i - U_i}, \quad \text{где } V_i \sim N(0;\sigma_V^2), \quad U_i \sim N^+(\mu;\sigma_U^2).$$

$$M_1: \quad R_i = \beta_0 \cdot \left(x_i^1\right)^{\beta_1} \cdot \left(x_i^2\right)^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot \left(x_i^p\right)^{\beta_p} \cdot e^{V_i - U_i}, \quad \text{где } V_i \sim N(0;\sigma_V^2), \quad U_i \sim N^+(0;\sigma_U^2)$$

$$M_0: \quad R_i = \beta_0 \cdot \left(x_i^1\right)^{\beta_1} \cdot \left(x_i^2\right)^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot \left(x_i^p\right)^{\beta_p} \cdot e^{V_i}, \quad \text{где } V_i \sim N(0;\sigma_V^2).$$

Модель $M_1$ является частным случаем модели $M_2$ (при $\mu = 0$), а $M_0$ – частный случай модели $M_1$ (при $\sigma_U^2 = 0$), т.е. модель линейной регрессии без компоненты неэффективности.

Для ответа на вопрос о корректности использования того или иного способа измерения фактора производства проверяются гипотезы:

$H_0 : \exists\, i = 1,\ldots, p:\ \beta_i \le 0$ (среди факторов производства существует незначимый фактор или фактор с отрицательным коэффициентом)

$H_0^A : \forall\, i = 1,\ldots p:\ \beta_i > 0$ (все факторы производства значимы и имеют положительные коэффициенты)

С целью подтверждения или опровержения отсутствия неэффективности рамках рассмотрения модели $M_1$ проверяется гипотеза $H_1$:

$H_1 : \sigma_U^2 = 0$ (неэффективности нет)

при альтернативе

$H_1^A : \sigma_U^2 > 0$ (неэффективность присутствует)

Описание способов проверки приведенных гипотез можно найти в (Айвазян и др., 2012).