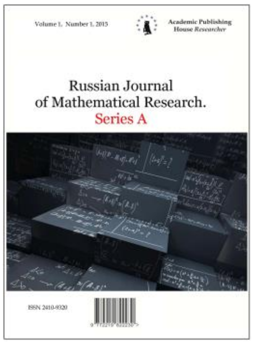
Published in the Slovak Republic
Russian Journal of Mathematical Research. Series A
Has been issued since 2015.
E-ISSN: 2413-7529
2018, 4(1): 31-37

DOI: 10.13187/rjmr.a.2018.1.31
www.ejournal30.com



On the Possibility of Sequestration of Basic Variables In Solving Some Problems of Linear Programming

Irina L. Makarova [a, *], Viktor I. Samarin [a]

[a] Sochi State University, Russian Federation

Abstract

Examples of solving by the simplex method some linear programming problems in which it is possible to improve the algorithm for reducing computations are considered.

Keywords: linear programming problem, basic variables of a linear equations system, introduction of new restrictions on the admissible solutions domain.

1. Введение

Суть задачи линейного программирования (ЗЛП) – нахождение экстремального/оптимального значения линейной целевой функции в условиях линейных ограничений на область допустимых решений задачи. Соответствующие ограничения задаются определенной системой неравенств и уравнений, формирующих выпуклое множество многомерного пространства возможных значений управляемых переменных. Алгоритм симплекс-метода предполагает сведение математической модели задачи к системе уравнений с помощью введения вспомогательных (балансных/уравновешивающих или искусственных) неизвестных.

В ряде задач линейного программирования возникает необходимость последовательного введения в исходную модель новых ограничений (например, в задачах, анализирующих устойчивость решений ЗЛП, а также в задачах целочисленного линейного программирования). При этом увеличивается число базисных неизвестных. Для учета влияния на оптимальное значение целевой функции нового ограничения можно, не решая задачу заново, использовать уже решенную задачу, добавив это ограничение к полученной ранее оптимальной симплекс-таблице, записав его в базисе этой таблицы и продолжить решение, используя двойственный симплекс-метод. При этом можно воспользоваться и модифицированным симплекс-методом.

2. Результаты

Рассмотрим для примера решение задачи целочисленного линейного программирования (ЗЦЛП).

Традиционно при решении ЗЦЛП используется два основных метода решения: метод ветвей и границ (МВГ) и метод сечений Гомори (МС) (Конюховский, 2001; Вагнер, 1973; Косоруков, Мищенко, 2003; Красс, Чупрынов, 2001; Соколов, 2017). В обоих методах сначала решается, так называемая, непрерывная или ослабленная задача, в которой переменные не обязательно целочисленны. Затем, в МВГ вся допустимая область делится на две части,

* Corresponding author
E-mail addresses: ratton@mail.ru (I.L. Makarova), visamarin@mail.ru (V.I. Samarin)

в каждой из которых опять решается непрерывная задача, и т.д. такое деление будет продолжаться для той части допустимой области, в которой решение задачи будет «лучше», всякий раз оглядываясь на оставленные ветви. Процесс заканчивается либо определением целочисленного решения, либо установлением его отсутствия. При решении ЗЦЛП методом сечений на каждом шаге от допустимой области «отрезается» некоторая её часть, не содержащая целочисленных решений. Таким образом, проводимое сечение в МС (по своей сути – гиперплоскость), и проводимые два сечения (две гиперплоскости) в МВГ отсекают от многомерного выпуклого пространства допустимых решений такие подпространства, в которых сохранены все целочисленные значения управляемых переменных задачи.

На Рисунке 1 иллюстрируются оба метода решений. Исходные ограничения здесь отмечены номерами в кружках, а дополнительные – в квадратах. Заштрихованные области исключаются из дальнейшего рассмотрения.

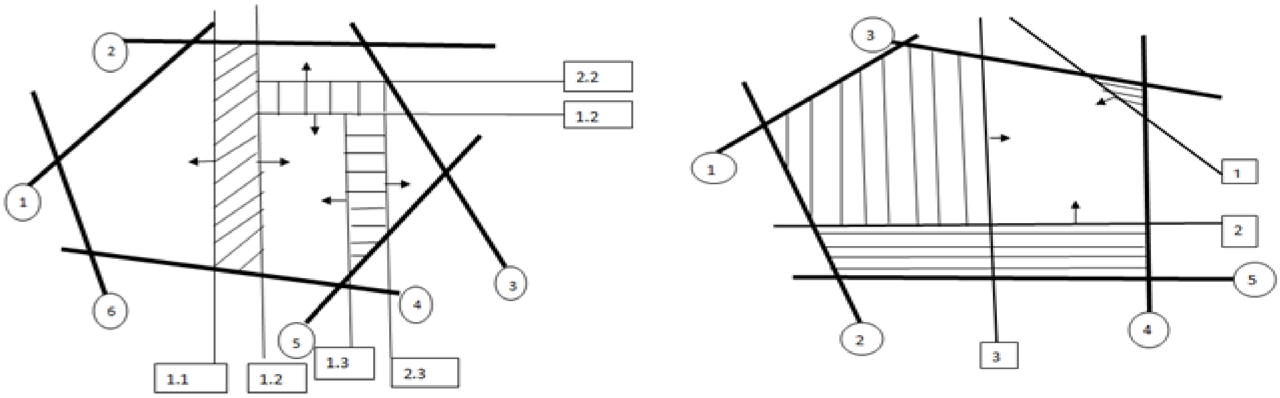


Рис. 1. Иллюстрация методов решения ЗЦЛП: слева – МВГ; справа – МС

Деление допустимой области на части или её усечение осуществляется с помощью включения дополнительных ограничений. Практически к уже решенной симплекс-методом непрерывной задаче добавляют дополнительное ограничение, т.е. строку в симплекс-таблице, и продолжают решение двойственным симплекс-методом. Можно предположить, что выполняя эти действия неоднократно, в исходной задаче появится множество ограничений, а симплекс-таблица станет огромной. В МС предусматривается исключение «отработавших своё» ограничений (Конюховский, 2001). Другими словами, строка симплекс-таблицы, в которой вспомогательная переменная приняла неотрицательное значение, может быть вычеркнута из таблицы, поскольку найденное решение получено уже в подпространстве, которое находится внутри по отношению к предыдущему. Ни одно описание МВГ (Вагнер, 1973; Косоруков, Мищенко, 2003; Красс, Чупрынов, 2001; Соколов, 2017) такой процедуры не предполагает. Поэтому, естественно, возникло желание применить аналогичный способ сокращения симплекс-таблицы в МВГ. Начнем с примера.

Пример 1. Решить ЗЦЛП методом ветвей и границ.

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 \le 24, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 13, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0, \end{cases} \qquad \{x_1, x_2\} \in Z \text{ – целые числа,}$$

$$F(x) = x_1 + x_2 \to max$$

Решение

1) Опустим понятные вспомогательные преобразования и приведем сразу симплекс-таблицу решения непрерывной задачи. Переменные $x_3 \ge 0$ и $x_4 \ge 0$ – это вспомогательные переменные.

№	б.п.	x_1	x_2	x_3	x_4	b
0	x_3	8	-3	1	0	24
	$x_4{}^*$	3	**2**	0	1	13
	F	-1	-1*	0	0	0
1	x_3	17/2	0	1	3/2	87/2
	x_2	3/2	1	0	1/2	13/2
	F	1/2	0	0	1/2	-13/2

$$x^*(0;13/2),\ F_{max}=13/2.$$

2) Разбиение допустимой области на две части приводит к решению двух задач, дополнительные ограничения для которых имеют вид:

Задача 1.1: $x_2 \leq 6$ и Задача 2.1: $x_2 \geq 7$. Здесь и далее первая цифра будет всегда обозначать 1-ю или 2-ю задачи, а вторая цифра – номер шага деления. Задача 2.1 оказывается неразрешимой (ложная ветвь).

3) Решение задачи 1.1. $x_5 \geq 0$ – вспомогательная переменная.

№	б.п.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	x_3	17/2	0	1	3/2	0	87/2
	x_2	3/2	1	0	1/2	0	13/2
	$x_5{}^*$	**-3/2**	0	0	-1/2	1	-1/2
	F	½ *	0	0	1/2	0	-13/2
2	x_3	0	0	1	-4/3	17/3	122/3
	x_2	0	1	0	0	1	6
	x_1	1	0	0	1/3	-2/3	1/3
	F	0	0	0	1/3	1/3	-19/3

$$x^*(1/3;6),\ F_{max}=19/3.$$

Уже здесь строка с базисной переменной x_3 может быть удалена из дальнейшего рассмотрения, но мы пока оставим её в покое и только проследим за ней.

4) Продолжим разбиение и получим:

Задача 1.2: $x_1 \leq 0$ и Задача 2.2: $x_1 \geq 1$.

№	б.п.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
2	x_3	0	0	1	-4/3	17/3	0	122/3
	x_2	0	1	0	0	1	0	6
	x_1	1	0	0	1/3	-2/3	0	1/3
	x_6 *	0	0	0	**-1/3**	2/3	1	-1/3
	F	0	0	0	1/3*	1/3	0	-19/3
3	x_3	0	0	1	0	3	-4	42
	x_2	0	1	0	0	1	0	6
	x_1	1	0	0	0	0	1	0
	x_4	0	0	0	1	-2	-3	1
	F	0	0	0	0	1	1	-6

$$x^*(0;6),\ F_{max}=6$$

№	б.п.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
2	x_3	0	0	1	-4/3	17/3	0	122/3
	x_2	0	1	0	0	1	0	6
	x_1	1	0	0	1/3	-2/3	0	1/3
	$x_6{}^*$	0	0	0	1/3	**-2/3**	1	-2/3
	F	0	0	0	1/3	1/3*	0	-19/3
3	x_3	0	0	1	3/2	0	17/2	35
	x_2	0	1	0	1/2	0	3/3	5
	x_1	1	0	0	0	0	1	1
	x_5	0	0	0	-1/2	1	-3/2	1
	F	0	0	0	1/2	0	1/2	-6

$$x^*(1;5),\ F_{max}=6$$

Что можно сказать про «оставленную в покое» строку? Она доставила нам лишние расчеты, никак не влияя на дальнейшее решение, поскольку эта строка не могла оказаться разрешающей. На Рисунке 2, иллюстрирующем решение примера 1, это ограничение соответствует исходному ограничению, помеченному 1 в кружке. Таким образом, данная строка могла быть исключена из рассмотрения уже после первого шага.

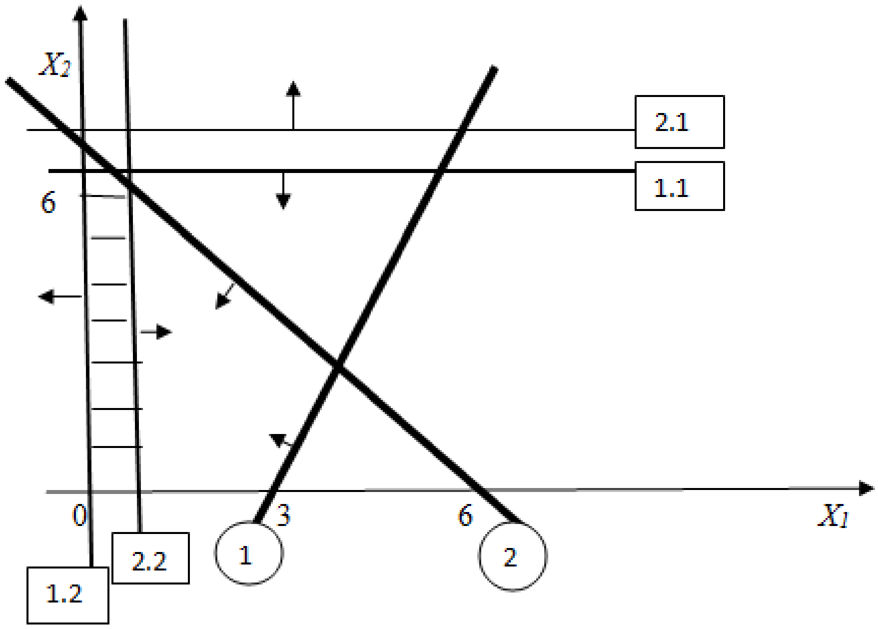


Рис. 2. Иллюстрация примера 1

Рассмотрим другой пример, пример 2:

$$\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 + x_3 = 110, \\ 11x_1 - 3x_2 - x_4 = 24, x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, \\ 2x_1 - 7x_2 - x_5 = 15, \end{cases}$$

Переменные x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 должны быть целыми.

$F(x) = x_1 + x_2 \rightarrow max$

Решение

1) Опустим вспомогательные действия и покажем только исходную и итоговую симплекс-таблицы решения непрерывной задачи.

№	б.п.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
0	x_3	9	4	1	0	0	0	0	110
	x_6*	**11**	-3	0	-1	0	1	0	24
	x_7	2	-7	0	0	1	0	1	15
	F	-7	-1	0	0	0	0	0	0
	G	-13*	10	0	1	1	0	0	39
....									
4	x_5	0	71/9	2/9	0	1	0	-1	85/9
	x_1	1	4/9	1/9	0	0	0	0	110/9
	x_4	0	71/9	11/9	1	0	-1	0	994/9
	F	0	19/9	7/9	0	0	0	0	-770/9

$$x^* \left(\frac{110}{9}; 0; 0; \frac{994}{9}; \frac{85}{9}\right),\ F_{max} = 770/9$$

Переменные x_6 и x_7 (искусственные переменные) и функция G- вспомогательная целевая функция вводились в решение для получения начального допустимого базисного решения исходной задачи и после его определения могут быть исключены из дальнейшего рассмотрения, а индексы 6 и 7 могут быть использованы для других вспомогательных переменных.

2) Разобьем допустимую область: Задача 1.1: $x_5 \le 9$ и Задача 2.1: $x_5 \ge 10$.

Задача 2.1 оказывается не разрешимой, решение задачи 1.1 приведено ниже.

№	б.п.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
4	x_5	0	71/9	2/9	0	1	0	85/9
	x_1	1	4/9	1/9	0	0	0	110/9
	x_4	0	71/9	11/9	1	0	0	994/9
	x_6*	0	**-71/9**	-2/9	0	0	1	-4/9
	F	0	19/9*	7/9	0	0	0	-770/9
5	x_5	0	0	0	0	1	1	9
	x_1	1	0	7/71	0	0	4/71	866/71
	x_4	0	0	1	1	0	1	110
	x_2	0	1	2/71	0	0	-9/71	4/71
	F	0	19/9	51/71	0	0	19/71	-6066/71

$$x^*\left(12\frac{14}{71};\frac{4}{71};0;110;9\right),\ F_{max}=6066/71$$

Была добавлена одна строка, но ни одна не может быть исключена, так как все базисные переменные являются основными и должны быть целыми.

3) Разбиваем допустимую область дальше: Задача 1.2: $x_1 \le 12$ и
Задача 2.2: $x_1 \ge 13$. Задача 2.2. не разрешима, а решение задачи 1.2 имеет вид.

№	б.п.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
5	x_5	0	0	0	0	1	1	0	9
	x_1	1	0	7/71	0	0	4/71	0	866/71
	x_4	0	0	1	1	0	1	0	110
	x_2	0	1	2/71	0	0	-9/71	0	4/71
	x_7*	0	0	-7/71	0	0	**-4/71**	1	-14/71
	F	0	19/9	51/71	0	0	19/71*	0	-6066/71
6	x_5	0	0	-7/4	0	1	0	71/4	11/2
	x_1	1	0	0	0	0	0	1	12
	x_4	0	0	-3/4	1	0	0	71/4	213/2
	x_2	0	1	1/4	0	0	0	9/4	1/2
	x_6	0	0	7/4	0	0	1	-71/4	7/2
	F	0	0	1/4	0	0	0	19/4	-169/2

Здесь опять оставим строку с базисной переменной x_6, чтобы показать её ненадобность.

4) Разбиваем допустимую область дальше: Задача 1.3: $x_2 \le 0$ и
Задача 2.3: $x_2 \ge 1$. Задача 2.3. не разрешима, а решение задачи 1.3 имеет вид.

№	б.п.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b
6	x_5	0	0	-7/4	0	1	0	71/4	0	11/2
	x_1	1	0	0	0	0	0	1	0	12
	x_4	0	0	-3/4	1	0	0	71/4	0	213/2
	x_2	0	1	1/4	0	0	0	9/4	0	1/2
	x_6	0	0	7/4	0	0	1	-71/4	0	7/2

	x_8*	0	0	-1/4	0	0	0	-9/4	1	-1/2
	F	0	0	¼*	0	0	0	19/4	0	-169/2
7	x_5	0	0	0	0	1	0	71/4	-7	9
	x_1	1	0	0	0	0	0	1	0	12
	x_4	0	0	0	1	0	0	71/4	-3	108
	x_2	0	1	0	0	0	0	9/4	1	0
	x_6	0	0	0	0	0	1	-71/4	7	0
	x_3	0	0	1	0	0	0	9	-4	2
	F	0	0	0	0	0	0	5/2	1	-84

$$x^*(12; 0; 2; 108; 9),\ F_{max} = 84$$

Из решения видно, что оставленная строка могла быть удалена из рассмотрения на предыдущем шаге. Заметим при этом, что максимальное количество строк в симплекс-таблице не превышает количества переменных, которые должны быть целочисленны.

3. Заключение

Приведенные примеры позволяют сделать вывод о том, что, решая ЗЦЛП методом ветвей и границ, симплекс-таблицы могут быть сокращены за счет удаления «отработавших» своё строк. Таким образом, в описании МВГ можно добавить замечание: *строка, в которой вспомогательная переменная приняла неотрицательное значение, может быть вычеркнута из таблицы.*

Литература

Вагнер, 1973 – *Вагнер Г.* Основы исследования операций. М.: Изд-во «МИР», Т.2, 1973. 488 с.

Конюховский, 2001 – *Конюховский П.В.* Математические методы исследования операций: Учебное пособие. Спб: Питер, 2001. 192 с.

Косоруков, Мищенко, 2003 – *Косоруков О.А., Мищенко А.В.* Исследование операций: Учебник // Под общ. ред. Н.П.Тихомирова. М: Изд-во «Экзамен», 2003. 448 с.

Красс, Чупрынов, 2001 – *Красс М.С., Чупрынов Б.П.* Основы математики и её приложения в экономическом образовании: Учебник. М.: Дело, 2001. 688 с.

Соколов, 2017 – *Соколов Г.А.* Линейные целочисленные задачи оптимизации: учебное пособие. М.: ИНФРА-М, 2017. 132 с.

References

Konyukhovskii, 2001 – *Konyukhovskii, P.V.* (2001). Matematicheskie metody issledovaniya operatsii [Mathematical methods of operations research]: Uchebnoe posobie. Spb: Piter, 192 p. [in Russian]

Kosorukov, Mishchenko, 2003 – *Kosorukov, O.A., Mishchenko, A.V.* (2003). Issledovanie operatsii [Investigation of operations]: uchebnik. Pod obshch. red. N.P. Tikhomirova. M: Izd-vo «Ekzamen», 448 p. [in Russian]

Krass, Chuprynov, 2001 – *Krass, M.S., Chuprynov, B.P.* (2001). Osnovy matematiki i ee prilozheniya v ekonomicheskom obrazovanii [Fundamentals of mathematics and its applications in economic education]: uchebnik. M.: Delo, 688 p. [in Russian]

Sokolov, 2017 – *Sokolov, G.A.* (2017). Lineinye tselochislennye zadachi optimizatsii [Linear integer optimization problems]: uchebnoe posobie. M.: INFRA-M, 132 p. [in Russian]

Vagner, 1973 – *Vagner, G.* (1973). Osnovy issledovaniya operatsii [Fundamentals of operations research]. M.: Izd-vo «MIR», T.2, 488 p. [in Russian]

О возможности секвестирования базисных переменных при решении некоторых задач линейного программирования

Ирина Леонидовна Макарова [a, *], Виктор Иванович Самарин [a]

[a] Сочинский государственный университет, Российская Федерация

Аннотация. Рассмотрены примеры решения симплекс-методом некоторых задач линейного программирования, в которых возможно усовершенствование алгоритма, позволяющее сократить расчеты.

Ключевые слова: задача линейного программирования, базисные переменные системы линейных уравнений, введение новых ограничений на область допустимых решений.

[*] Корреспондирующий автор
Адреса электронной почты: ratton@mail.ru (И.Л. Макарова), visamarin@mail.ru (В.И. Самарин)