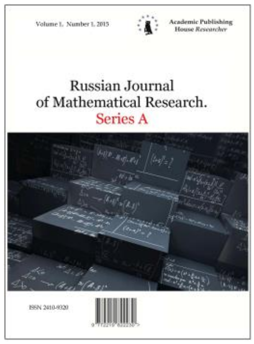
Published in the Slovak Republic
Russian Journal of Mathematical Research. Series A
Has been issued since 2015.
E-ISSN: 2413-7529
2018, 4(1): 23-30

DOI: 10.13187/rjmr.a.2018.1.23
www.ejournal30.com



Mathematical Modeling of Fractal Financial System in Computer Environment Scilab

E.A. Gafurova [a, *], R.I. Parovik [a]

[a] Vitus Bering Kamchatka State University, Russian Federation

Abstract

The mathematical model of a fractal financial system that takes into account the effects of heredity or memory is considered. This mathematical model is a Cauchy problem in which the model equation is a system of differential equations with derivatives of fractional orders. Using a numerical algorithm based on the theory of finite-difference schemes, an approximate solution of the proposed model was obtained. A numerical algorithm was implemented in a computer program in the language of Scilab, with the help of which the phase trajectories of the fractal financial system were constructed. It is shown that if fractal properties are taken into account, chaotic regimes can exist even in dynamical systems of dimension less than three.

Keywords: fractal financial system, mathematical model, Scilab, numerical algorithm, phase trajectories.

1. Введение

Многие исследователи стали акцентировать свое внимание на эредитарных динамических системах в экономике (Makarov, Parovik, 2016; Самута и др., 2012; Шпилько и др., 2012) и, в частности, в финансовой системе (Chen, 2008). Напомним, что свойство эредитарности динамической системы означает зависимость текущего его состояния от конечного числа предшествующих ему состояний. Такие системы описываются интегро-дифференциальными уравнениями с разностными ядрами – функциями памяти. Если функции памяти степенные, то интегро-дифференциальные уравнения можно записать в терминах дифференциальных уравнений дробных порядков. Порядки дробных производных могут быть связаны с фрактальными свойствами системы или среды и их можно оценить с помощью экспериментальных данных.

2. Результаты

Постановка задачи. Фрактальная финансовая система представляет собой модель, представленная в виде системы дифференциальных уравнений с производными дробных порядков и начальными условиями (задача Коши) (Petras, 2011):

$$\begin{aligned}
&D_{0t}^{q_1}x(\eta)=z(t)+\left(y(t)-a\right)x(t),\\
&D_{0t}^{q_2}y(\eta)=1-by(t)-x(t)^2,\\
&D_{0t}^{q_3}z(\eta)=-x(t)-cz(t),\\
&x(0)=x_0,\,y(0)=y_0,\,z(0)=z_0
\end{aligned}\qquad(1)$$

* Corresponding author
E-mail addresses: eiza09@mail.ru (E.A. Gafurova), romanparovik@gmail.com (R.I. Parovik)

где a – сумма сбережений, b – затраты на инвестиции, c – эластичность спроса на коммерческий рынок, x_0, y_0, z_0 – начальные состояния системы (1), заданные константы, дробные производные в (1) понимаются в смысле Римана-Лиувилля (Petras, 2011):, порядки которых изменяются в диапазоне $0 < q_1, q_2, q_3 < 1$. Отметим, что система (1) является обобщением классической финансовой системы (Ma, Chen, 2001), а в случае, когда $q_1 = q_2 = q_3 = 1$ она с ней совпадает.

Модель (1) описывает изменение во времени трех состояний переменных: процентная ставка $x(t)$, инвестиционный спрос $y(t)$, индекс цен $z(t)$. Факторы, влияющие на изменение $x(t)$, в основном происходят из двух аспектов: во-первых, это противоречие инвестиционного рынка, избыток инвестиций и сбережений; во-вторых, это корректировка структуры от цен на товары. Изменение скорости $y(t)$ пропорционально скорости инвестиций и пропорционально инверсии со стоимостью инвестиций, а также интересам ставок. Изменения $z(t)$, с одной стороны, контролируются противоречием между предложением и спрос на коммерческом рынке, а с другой стороны, под влиянием инфляции.

Отметим, что все эти параметры взаимосвязаны с помощью дифференциальных уравнений с операторами дробных производных, что приводит к нелокальности по времени – зависимости значений этих параметров в текущий момент времени от предыдущих значений. Такие уравнения эквивалентны уравнениям с запаздыванием (Куликов, Куликов, 2015).

Отметим, что в классическая динамическая система обладает хаотическими режимами (Ma, Chen, 2001). В нашей работе мы покажем, что с помощью математического и компьютерного моделирования такие режимы могут возникать в эредитарных динамических системах.

Математическая модель (1) является нелинейной, поэтому мы можем найти только ее численное решение. Операторы Римана-Лиувилля можно аппроксимировать дискретными аналогами – производными Грюнвальда-Летникова (Petras, 2011), что дает возможность получить нелокальную численную схему, имеющую вид:

$$x(t_k) = \left(z(t_{k-1}) - \left(y(t_{k-1}) - a\right)x(t_{k-1})\right)h^{q_1} - \sum_{j=1}^{k} c_j^{(q_1)} x(t_{k-j}),$$

$$y(t_k) = \left(1 - by(t_k) - x^2(t_k)\right)h^{q_2} - \sum_{j=1}^{k} c_j^{(q_2)} y(t_{k-j}), \tag{2}$$

$$z(t_k) = \left(-x(t_k) - cz(t_{k-1})\right)h^{q_3} - \sum_{j=1}^{k} c_j^{(q_3)} z(t_{k-j}).$$

где параметр $Tsim$ – время моделирования, k = 1, 2, 3,..., N, для $N = [Tsim / h]$, h – шаг равномерной расчетной сетки и (x(0), y(0), z(0)) является начальной точкой (начальные условия). Биномиальные коэффициенты $c_j^{(q_i)}, i = 1, 2, 3$, которые вычисляются по формуле:

$$c_0^{(q_i)} = 1, c_j^{(q_i)} = \left(1 - \frac{1 + q_i}{j}\right) c_{j-1}^{(q_i)} . \tag{3}$$

Заметим, что численная схема (2) является системой алгебраических нелинейных уравнений, решение которой дает численное решение исходной математической модели (2). Реализация схемы (2) была осуществлена в компьютерной системе моделирования Scilab, которая находится в свободном доступе.

Алгоритм реализации в Scilab. Была создана функция FOFinanc() в среде Scilab, которая реализует численное решение математической фрактальной модели финансовой системы (2). Приведем код этой функции.

```
function [T, Y]=FOFinanc(parameters, orders, TSim, Y0)
```

```
% в качестве аргументов передаем
% параметры parameters: a=parameters(1); b=parameters(2); c=parameters(3);
% порядки orders: q1=orders(1); q2=orders(2); q3=orders(3);
%время вычисления TSim
% начальные условия Y0: x(1)=Y0(1); y(1)=Y0(2); z(1)=Y0(3);
% на выходе получаем
% время T --- массив от 0 до TSim с шагом моделирования h
% Y=[y(:,1), y(:,2), y(:,3)]=[x(t); y(t); z(t)] --- координаты траектории
%состояния в трехмерном пространстве состояний
h=0.04166;% шаг моделирования --- по условию задания постоянный
% число шагов по времени --- это время моделирования поделить на шаг и округлить:
n=round(TSim/h); %из входных данных присваиваем значения порядков производных вектор q:
q1=orders(1); q2=orders(2); q3=orders(3); % из входных данных присваиваем значения параметров --- констант финансовой системы
a=parameters(1); b=parameters(2); c=parameters(3); % вычисление биномиальных коэффициентов:
cp1=1; cp2=1; cp3=1;% это начальные значения - первая часть формулы (3)
for j=1:n% цикл по времени
% расчет новых значений коэффициентов по второй части формулы (3)
c1(j)=(1-(1+q1)/j)*cp1;% при q=1
c2(j)=(1-(1+q2)/j)*cp2;% при q=2
c3(j)=(1-(1+q3)/j)*cp3;% при q=3
cp1=c1(j); cp2=c2(j); cp3=c3(j);%обновляем переменные новыми значениями коэффициентов
end
%из входных данных присваиваем значения начальных условий
x(1)=Y0(1); y(1)=Y0(2); z(1)=Y0(3);
% расчет численного решения --- траекторий для фазового портрета
for i=2:n% цикл по времени
   %расчет по формуле (2)
   % memo возвращает суммы из (2)
x(i)=(z(i-1)+(y(i-1)-a)*x(i-1))*h^q1 - memo(x, c1, i);% абсцисса новой точки траектории состояния
y(i)=(1-b*y(i-1)-x(i)^2)*h^q2 - memo(y, c2, i);%ордината новой точки траектории состояния
z(i)=(-x(i)-c*z(i-1))*h^q3 - memo(z, c3, i);%аппликата новой точки траектории состояния
end
for j=1:n% собираем координаты точек траектории в один массив для удобства
Y(j,1)=x(j); Y(j,2)=y(j); Y(j,3)=z(j);
end
% время T --- массив от 0 до TSim с шагом моделирования h --- чтобы
% определить, какие точки траектории какому моменту времени соответствуют
T=0:h:TSim;
end function
```

Вспомогательная функция memo () имеет вид:

```
function [yo] = memo(r, c, k)
%вычисляет сумму yo произведений биномиальных коэффициентов на координаты точек траектории
%входные данные:
% r --- массив координат точек траектории (ордината x, абсцисса y или аппликата z)
% c --- массив биномиальных коэффициентов (c1 для x, c2 для y, c3 для z)
% k --- номер шага по времени, до которого накапливаем сумму
%(передается номер текущего шага моделирования)
temp = 0;% это переменная для накопления суммы, инициализируем нулем
```

```
for j=1:k-1% накопление суммы
temp = temp + c(j)*r(k-j);
end
yo = temp;% помещаем накопленную сумму в выходной аргумент
endfunction
```

Результаты моделирования. Рассмотрим примеры работы, приведенного выше алгоритма.

Пример 1. (Классическая модель финансовой системы). Рассмотрим следующие значения параметров: a = 1; b = 0.1 и c = 1; $q_1 = q_2 = q_3 = 1$; вектор начальных условий (1, -1, 1), время моделирования TSim =200 .

Вызываем функцию FOFinanc():

[t, y]=**FOFinanc**([1 0.1 1],[1 1 1],200, [1 -1 1]).

Координаты траектории обозначаются следующим образом:

y=[*y*(:,1), *y*(:,2), *y*(:,3)]=[*x(t); y(t); z(t)*].

Далее определяются состояния в трехмерном пространстве состояний. Строим 3-мерный график, который представлен на рисунке 1:

```
subplot(121)
param3d(y(:,1), y(:,2), y(:,3),'k');
xlabel('x(t)'); ylabel('y(t)'); zlabel('z(t)')
```

В данном отрывке кода мы строим 2-мерный график, подписываем оси и включаем сетку на графике. Выводим второй график, который представлен на рисунке 2:

```
subplot(122)
plot(y(:,1), y(:,2),'k');
```

Далее представлена траектория состояния, проецируемая на плоскость $x - y$. Подписываем оси и также включаем сетку на графике:

```
xlabel('x(t)');
ylabel('y(t)').
```

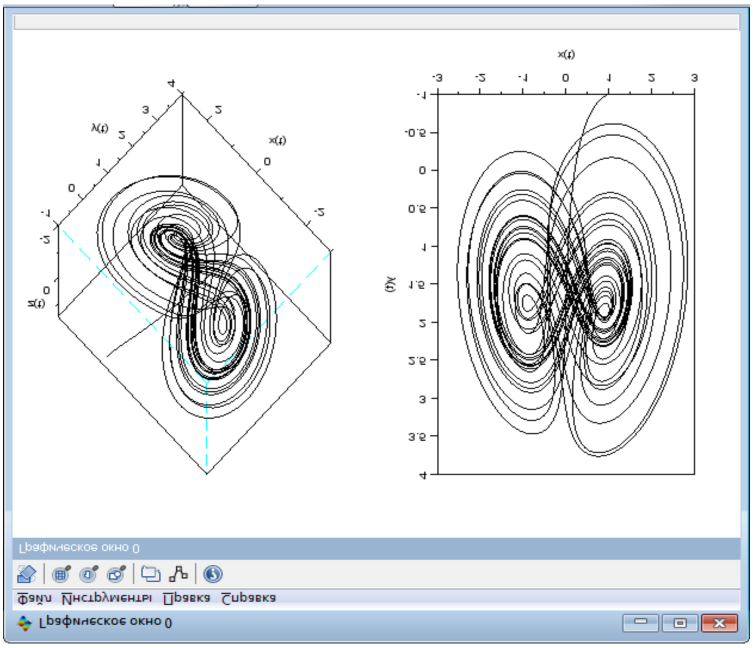


Рис. 1. Фазовые траектории для Примера 1

Мы можем увидеть, что на рис. 1 фазовая траектория представляет собой хаотический аттрактор, похожий на аттрактор Лоренца (Petras, 2011). Возникает вопрос будет ли существовать хаотический аттрактор в случае обобщения классической модели, ведь для существования хаотического аттрактора в классических нелинейных динамических системах необходимо, чтобы размерность системы была больше трех?

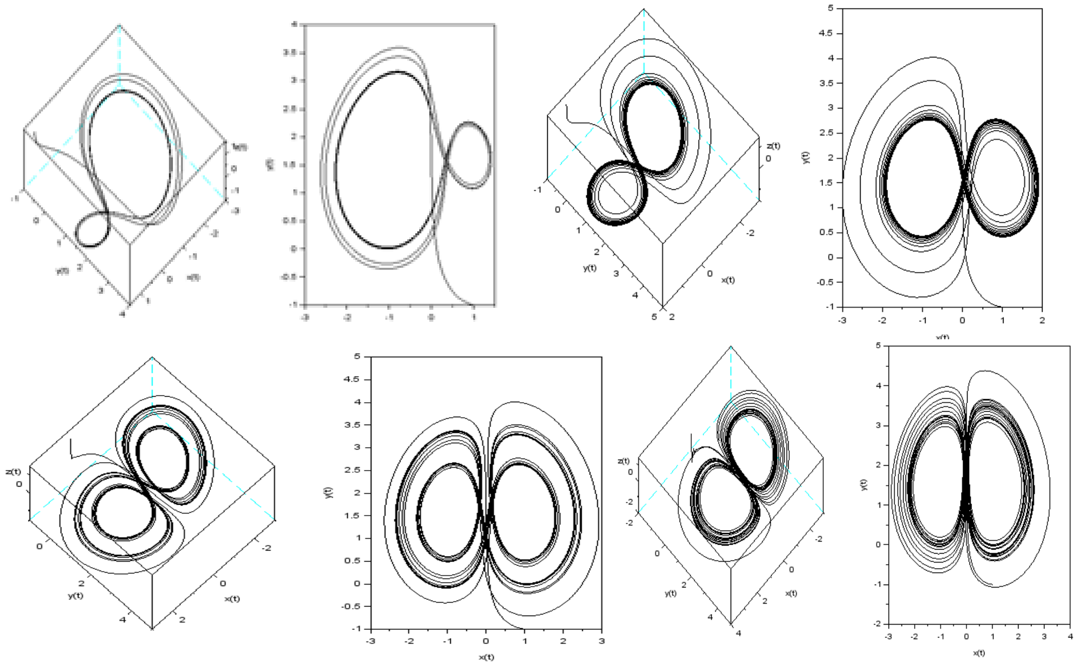
Пример 2. Рассмотрим случай, фрактальной финансовой системы для следующих значений параметров:

a) $q_1 = 1$, $q_2 = 1$, $q_3 = 0.8$, b) $q_1 = 1$, $q_2 = 1$, $q_3 = 0.6$,

c) $q_1 = 1$, $q_2 = 1$, $q_3 = 0.4$, d) $q_1 = 1$, $q_2 = 1$, $q_3 = 0.2$.

Остальные параметры возьмем из Примера 1. Результаты моделирования приведены на Рисунке 2.

a) b)



c) d)

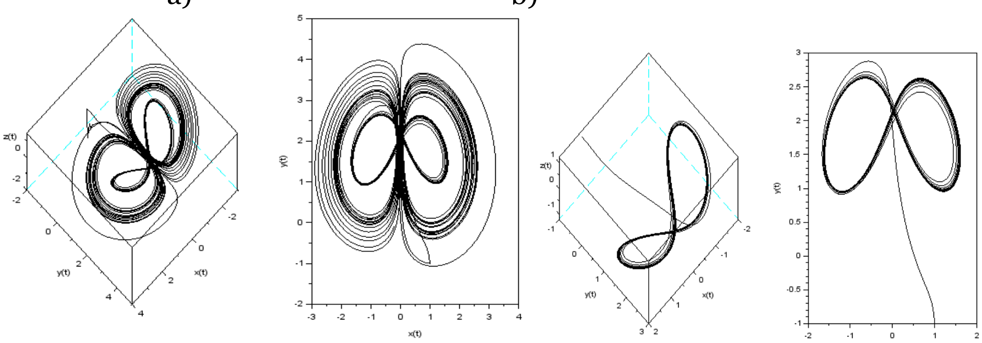
Рис. 2. Фазовые траектории при параметрах q_1=1, q_2=1: a) -q_3=0.8, b) - q_3=0.6, c) -q_3=0.4, d) - q_3=0.2

Из Рисунка 2 представлены фазовые траектории в пространстве и на плоскости мы видим, что имеет место хаотический аттрактор, несмотря на то, что система (2) имеет размерность меньше трех.

Пример 3. Рассмотрим следующие значения дробных порядков:

a) $q_1 = 1$, $q_2 = 0.8$, $q_3 = 1$, b) $q_1 = 1$, $q_2 = 0.6$, $q_3 = 1$, c) $q_1 = 1$, $q_2 = 0.4$, q_3 =1, d) $q_1 = 1$, $q_2 = 0.2$, $q_3 = 1$. На Рисунке 3 приведены результаты моделирования.

a) b)



c) d)

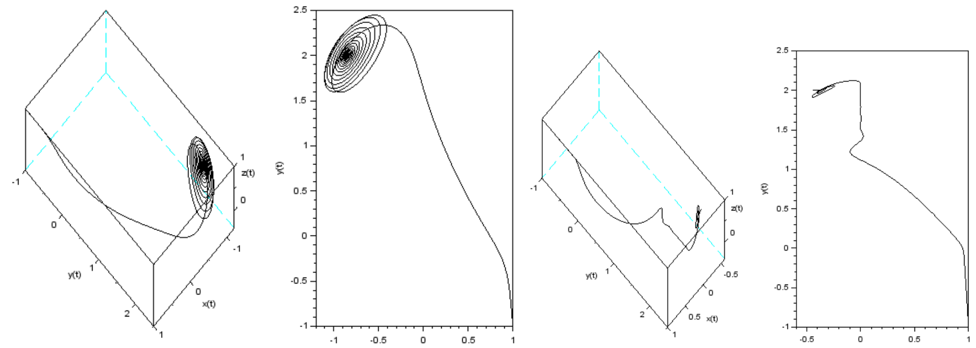


Рис. 3. Фазовые траектории при значениях параметров: q_1=1, q_3=1: a) - q_2=0.8, b) - q_2=0.6, c) -q_2=0.4, d) - q_2=0.2

Мы также видим на Рисунке 3 эволюцию хаотического аттрактора вплоть до его разрушения (рис 3d).

Пример 4. Рассмотрим следующие значения дробных порядков:

a) q_1 = 0.8, q_2 = 1, q_3 = 1, b) q_1 = 0.6, q_2 = 1, q_3 = 1, c) q_1 = 0.4, q_2 = 1, q_3 =1, d) q_1 = 0.2, q_2 = 1, q_3 = 1. Результаты моделирования приведены на Рисунке 4.

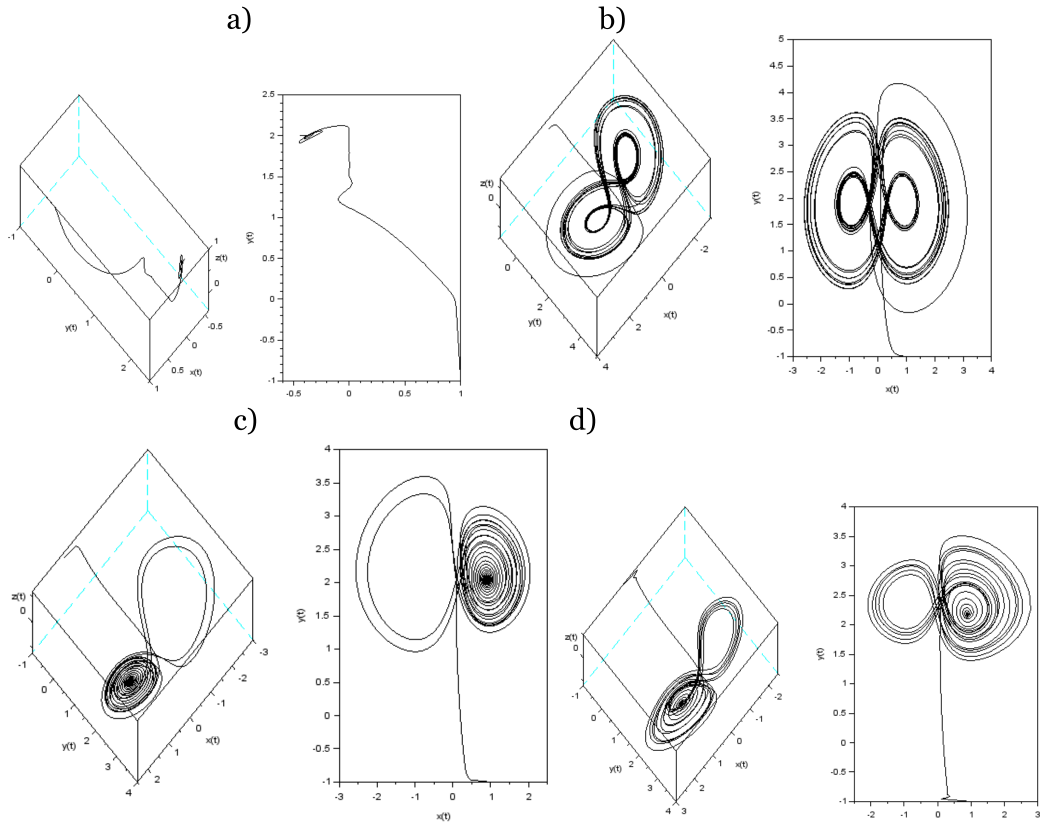


Рис. 4. Фазовые траектории при значениях параметров:
q_2=1, q_3=1: a) - q_1=0.8, b) - q_1=0.6, c) - q_1=0.4, d) - q_1=0.2

Здесь мы видим зарождение хаотического аттрактора рис. 4a и дальнейшее его развитие.

3. Заключение

В работе была исследована следующая задача: провести исследования существования хаотического режима фрактальной финансовой системы. С помощью численного метода, основанного на аппроксимации дробных производных в смысле Римана-Лиувилля дискретными производными Грюнвальда-Летникова была построена нелокальная конечноразностная схема, которая была реализована в компьютерной среде Scilab. Были написаны функции реализующие численное решения задачи Коши (2) и построены фазовые траектории в пространстве и на плоскости. Показано, что хаотические аттракторы могут существовать во фрактальных финансовых системах даже, если их размерность меньше трех.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта президента РФ №МК-1152.2018 и НИР «Применение дробного исчисления в теории колебательных процессов» №АААА-А17-117031050058-9.

Литература

Куликов, Куликов, 2015 – *Куликов А.Н., Куликов Д.А.* Эффект запаздывания и экономические циклы // *Таврический вестник информатики и математики.* 2015. №2(27). С. 89-101.

Самута и др., 2012 – *Самута В.В., Стрелова В.А., Паровик Р.И.* Нелокальная модель неоклассического экономического роста Солоу // *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки.* 2012. № 2(5). С. 37-41.

Шпилько и др., 2012 – *Шпилько Я.Е., Соломко А.А., Паровик Р.И.* Параметризация уравнения Самуэльсона в модели Эванса об установления равновесной цены на рынке одного товара // *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки.* 2012. Т. 5. № 2. С. 33-36.

Chen, 2008 – *Chen W.Ch.* Nonlinear dynamic and chaos in a fractional-order financial system // *Chaos, Solitons and Fractals.* 2008. vol. 36. pp. 1305–1314.

Ma, Chen, 2001 – *Ma J.H., Chen Y.S.* Study for the bifurcation topological structure and the global complicated character of a kind of nonlinear finance system. I // *Applied Mathematics and Mechanics.* 2001. vol. 22, no. 11, pp. 1240–1251.

Makarov, Parovik, 2016 – *Makarov D.V., Parovik R.I.* Modeling of the economic cycles using the theory of fractional calculus // *Journal of Internet Banking and Commerce.* 2016. vol. 21. no. S6.

Petras, 2011 – *Petras I.* Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation. Springer Science & Business Media, 2011.

References

Chen, 2008 – *Chen, W.Ch.* (2008). Nonlinear dynamic and chaos in a fractional-order financial system. *Chaos, Solitons and Fractals.* vol. 36. pp. 1305–1314.

Kulikov, Kulikov, 2015 – *Kulikov, A.N., Kulikov, D.A.* (2015). Effekt zapazdyvaniya i ekonomicheskie tsikly [The effect of delay and economic cycles]. *Tavricheskii vestnik informatiki i matematiki.* №2(27). pp. 89-101. [in Russian]

Ma, Chen, 2001 – *Ma, J.H., Chen, Y.S.* (2001). Study for the bifurcation topological structure and the global complicated character of a kind of nonlinear finance system. I *Applied Mathematics and Mechanics.* vol. 22, no. 11, pp. 1240–1251.

Makarov, Parovik, 2016 – *Makarov, D.V., Parovik, R.I.* (2016). Modeling of the economic cycles using the theory of fractional calculus. *Journal of Internet Banking and Commerce.* vol. 21. no. S6.

Petras, 2011 – *Petras, I.* (2011). Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation. Springer Science & Business Media.

Samuta i dr., 2012 – *Samuta, V.V., Strelova, V.A., Parovik, R.I.* (2012). Nelokal'naya model' neoklassicheskogo ekonomicheskogo rosta Solou [Nonlocal model of the neoclassical economic growth of Solow]. *Vestnik KRAUNTs. Fiziko-matematicheskie nauki.* № 2(5). pp. 37-41. [in Russian]

Shpil'ko i dr., 2012 – *Shpil'ko, Ya.E., Solomko, A.A., Parovik, R.I.* (2012). Parametrizatsiya uravneniya Samuel'sona v modeli Evansa ob ustanovleniya ravnovesnoi tseny na rynke odnogo tovara [Parametrization of the Samuelson equation in the Evans model of establishing an equilibrium price in the single commodity market]. *Vestnik KRAUNTs. Fiziko-matematicheskie nauki.* T. 5. № 2. pp. 33-36. [in Russian]

Математическое моделирование фрактальной финансовой системы в компьютерной среде Scilab

Э.А. Гафурова [a, *], Р.И. Паровик [a]

[a] Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, Российская Федерация

Аннотация. В работе рассмотрена математическая модель фрактальной финансовой системы, которая учитывает эффекты эредитарности или памяти. Эта математическая модель представляет собой задачу Коши, в которой модельные уравнения представляют собой систему дифференциальных уравнений с производными дробных порядков. С помощью численного алгоритма, основанного на теории конечно-разностных схем, было получено приближенное решение предложенной модели. Численный алгоритм был реализован в компьютерной программе на языке Scilab, с помощью которой производились построения фазовых траекторий фрактальной финансовой системы. Показано, что в случае учета фрактальных свойств, могут существовать хаотические режимы даже в динамических системах размерности меньше трех.

Ключевые слова: фрактальная финансовая система, математическая модель, Scilab, численный алгоритм, фазовые траектории.

* Корреспондирующий автор
Адреса электронной почты: eiza09@mail.ru (Э.А. Гафурова), romanparovik@gmail.com (Р.И. Паровик)