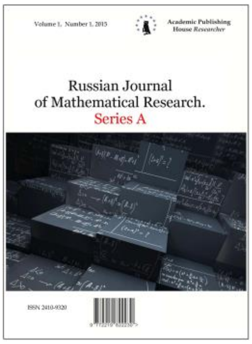


Published in the Slovak Republic
Russian Journal of Mathematical Research. Series A
Has been issued since 2015.
E-ISSN: 2413-7529
2017, 3(2): 67-73

DOI: 10.13187/rjmr.a.2017.2.67
www.ejournal30.com

# Extremal Problems for the Main Characteristics in the Model M|G|1 ∞

Arsen R. Simonyan [a, *]

[a] Sochi state university, Russian Federation

**Abstract**

In this paper we consider a single-channel queuing system with a Poisson incoming flow. For this system, the extremal problems for the Laplace-Stieltjes transformations and the moments of the distribution functions of the basic characteristics (periods of employment, waiting times) are solved with expectation. Problems are solved with moment constraints. The assumption that the incoming flow is Poisson is not a too strong restriction, but on the other hand it simplifies the apparatus for studying this system. This assumption enables us to arrive at more compact results.

**Keywords:** queuing theory, distribution function, queuing system, busy period, waiting time.

## 1. Введение

Классификация Кендалла моделей теории массового обслуживания представляет модель G|G|s|∞ следующим образом (Симонян, Улитина, 2008): в $s$ –канальную систему обслуживания с ожиданием в случайные моменты времени $0 \le t_1 \le t_2 \le \cdots$ поступают одиночные вызовы. Нумерация вызовов – в порядке поступления. Если обозначить $v_n,\ n \ge 1$ – время обслуживания вызова с номером $n$ и $u_n = t_n - t_{n-1},\ t_0 = 0$, то $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ являются независимыми, одинаково распределенными (НОР) неотрицательными случайными величинами (СВ) с функциями распределения $A(x)$ и $B(x)$. В начальный момент времени модель свободна от вызовов. Предполагается, что $A(+0) = 0,\ B(+0) = 0$.

Основные характеристики модели M|G|1|∞ (при $s = 1$ и $A(x) = \begin{cases} 1 - e^{-ax}, & \text{при } x \ge 0, \\ 0, & \text{при } x < 0, \end{cases}$) хорошо изучены (Simonyan, 2004, Симонян, 2003) при различных загрузках $\rho = \beta_1/\alpha_1$, где $0 < \alpha_1 = Mu_1 < +\infty,\ 0 < \beta_1 = Mv_1 < +\infty$ ($M$ – знак математического ожидания). Более того, есть немало трудов, которые посвящены основным характеристикам модели с несколькими пуассоновскими входящими потоками (Симонян, Улитина, 2005; Симонян, Улитина, 2010; Симонян и др., 2013; Simonyan et al., 2016).

## 2. Основная часть

Перейдем к экстремальным задачам в модели M|G|1|∞. В рамках этой модели обозначим $\rho = a\beta_1$ ($a > 0$ интенсивность входящего потока) – загрузка системы, а при $s \ge 0,\ \pi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} d\Pi(x)$ ($\Pi(x)$- ФР периода занятости), $\beta(s) - \int_0^\infty e^{-sx} dB(x)$ – преобразования Лапласа-Стилтьеса (ПЛС) периода занятости и длительностей обслуживания вызовов. А основными характеристиками модели являются $w_{FIFO}$ и $w_{LIFO}$

* Corresponding author
E-mail addresses: oppm@mail.ru (A.R. Simonyan)

(времена ожидания(ВО) модели M|G|1|∞ при прямом (FIFO) и обратном (LIFO) порядке обслуживания), с ФР $W_{FIFO}(x), W_{LIFO}(x)$ и ПЛС $\omega_{FIFO}(s)$, $\omega_{LIFO}(s)$ соответственно.

Пусть $\rho < 1$ и $a > 0$ фиксированы; $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ – вещественные константы $(\beta_k = \int_0^{\infty} t^k dB(x), k = \overline{1,n})$; $\bar{\beta}_n = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$; $\Im_0(\bar{\beta}_n)$ –подкласс класса всех ФР на $[b_1, b_2]$, $0 < b_1 < b_2 < +\infty$ удовлетворяющих ограничениям

$$\int_{b_1}^{b_2} t^k dB(x) = \beta_k, \qquad k = \overline{1,n}. \tag{1}$$

Предполагаем, что класс $\Im_0(\bar{\beta}_n)$ не пуст.

Мы будем иметь дело с $\pi(s)$ от ФР в классе $C_0$ ($C_0$ – подкласс класса консервативных дисциплин, в котором не допускаются прерывания обслуживания, и вызов на прибор выбирается независимо от реализации его длительности обслуживания), $\omega_{FIFO}(s)$, $\omega_{LIFO}(s)$ от ФР стационарных ВО (Гнеденко и др., 1973). Известно, что (Гнеденко, 1973)

$$\beta(s) = \pi\big(s + a - a\pi(s)\big), \ \ s \geq 0, \tag{2}$$

$$\omega_{FIFO}(s) = \frac{s(1-\rho)}{s - a + a\beta(s)}, \tag{3}$$

$$\omega_{LIFO}(s) = 1 - \rho + \frac{a\big(1 - \pi(s)\big)}{s + a - a\pi(s)}. \tag{4}$$

Пусть $g(s), s \geq 0$ – любая из функций $\pi(s), \big(-\omega_{FIFO}(s)\big), \omega_{LIFO}(s)$.

<u>Теорема 1.</u> 1) При всех $s > 0$

$$\inf_{B\in\Im_0(\bar{\beta}_n)} g(s) \quad \text{и} \quad \inf_{B\in\Im_0(\bar{\beta}_n)} \beta(s), \tag{5}$$

$$\sup_{B\in\Im_0(\bar{\beta}_n)} g(s) \quad \text{и} \quad \sup_{B\in\Im_0(\bar{\beta}_n)} \beta(s), \tag{6}$$

достигаются на одних и тех же ФР $B_*$ и $B^*$ из $\Im_0(\bar{\beta}_n)$.

2) В качестве $B_*$ $(B^*)$ может быть взята ступенчатая ФР со скачками $p_k$ $(p_k')$ в точках $x_k$ $(x_k')$. Величины $p_k$ $(p_k')$, $x_k$ $(x_k')$ однозначно определяются из следующих систем уравнений:

При $n = 2v - 1$:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{v} p_k = 1, & p_k > 0, k = \overline{1,v} \\ \sum_{k=1}^{v} p_k x_k^m = \beta_m, & m = \overline{1{,}2v-1} \\ b_1 < x_1 < \cdots < x_v < b_2; \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{v} p_k' = 1, & p_k' > 0, \ k = \overline{0,v}, \\ p_0' b_1^m + \sum_{k=1}^{v-1} p_k' x_k'^m + p_v' b_2^m = \beta_m, & m = \overline{1{,}2v-1}, \\ b_1 < x_1' < \cdots < x_v' < b_2. \end{cases} \tag{8}$$

При $n = 2v$:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{v} p_k = 1, & p_k > 0, k = \overline{0,v} \\ p_0 b_1^m + \sum_{k=1}^{v} p_k x_k^m = \beta_m, & m = \overline{1{,}2v} \\ b_1 < x_1 < \cdots < x_v < b_2; \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{v} p'_k = 1, & p'_k > 0,\ k = \overline{1, v+1}, \\ \sum_{k=1}^{v} p'_k x'^m_k + p'_{v+1} b_2^m = \beta_m, & m = \overline{1, 2v}, \\ b_1 < x'_1 < \dots < x'_v < b_2. \end{cases} \qquad (10)$$

Таким образом, одна и та же ступенчатая ФР $B_*$ $(B^*)$, определяемая системами (7) и (9) ((8) и (10)), доставляет инфимум (супремум) функционалам (5) ((6)) при всех $s \geq 0$ одновременно.

У введенных характеристик при $0 < b_1 < b_2 < +\infty$ конечны моменты всех положительных порядков. Обозначим через $\pi_{n+1}, \omega_{FIFO,n}, \omega_{LIFO,n}$ моменты порядков $n+1, n, n$ соответствующих характеристик и пусть $c$ – любая из величин $\pi_{n+1}, \omega_{FIFO,n}, \omega_{LIFO,n}$.

Теорема 2. Обозначим $\beta_{n+1} = \int_{b_1}^{b_2} x^{n+1} dB(x)$. Тогда

$$\inf_{B \in \mathfrak{J}_0(\bar{\beta}_n)} c \quad \text{и} \quad \inf_{B \in \mathfrak{J}_0(\bar{\beta}_n)} \beta_{n+1},$$

$$\sup_{B \in \mathfrak{J}_0(\bar{\beta}_n)} c \quad \text{и} \quad \sup_{B \in \mathfrak{J}_0(\bar{\beta}_n)} \beta_{n+1}$$

достигаются на одних и тех же ФР $B_*$ и $B^*$ из $\mathfrak{J}_0(\bar{\beta}_n)$, доставляющих экстремумы функционалам (5) и (6) соответственно.

Теоремы 1 и 2 основаны на общих фактах теории экстремальных задач (Даниелян, Мовсисян, 1989) на классе $\mathfrak{J}_0([b_1, b_2]), -\infty < b_1 < b_2 < +\infty$ при многих моментных ограничениях и на представлениях (2)-(4).

Пусть, определенные на $[b_1, b_2], -\infty < b_1 < b_2 < +\infty$,функции $u_1(t), \cdots, u_n(t)$ непрерывны; $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ – вещественные константы; $\bar{u}_n(t) = (u_1(t), \cdots, u_n(t))$; $\bar{\beta}_n = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$; $\mathfrak{J}_0([b_1, b_2])$ – класс всех ФР на $[b_1, b_2]$.

Обозначим через $\mathfrak{J}_0(\bar{\beta}_n)$ множество ФР $F \in \mathfrak{J}_0([b_1, b_2])$, таких что

$$\int_{b_1}^{b_2} \bar{u}_n(t) dF(t) = \bar{\beta}_n \qquad (11)$$

и определим моментное пространство

$$M(\mathfrak{J}_0([b_1, b_2])) = \left\{ \bar{\beta}_n : \int_{b_1}^{b_2} \bar{u}_n(t) dF(t) = \bar{\beta}_n, F \in \mathfrak{J}_0([b_1, b_2]) \right\} \subset R^n,$$

где $R^n$ – $n$ – мерное Евклидово пространство.

Теорема Каратеодори-Рисса (Крейн, Нудельман, 1973). Для любого

$$\bar{\beta}_n \in M(\mathfrak{J}_0([b_1, b_2])) \ \left( \bar{\beta}_n \in \partial M(\mathfrak{J}_0([b_1, b_2])) \right)$$

существует ступенчатая функция на $[b_1, b_2]$ с не более чем $n+1$ скачками (с не более чем $n$ скачками), удовлетворяющая (11).

Теорема усилена Э.А. Даниеляном и Г.С. Мовсисяном (Даниелян, Мовсисян, 1989). Именно, для любого $\bar{\beta}_n \in M(\mathfrak{J}_0([b_1, b_2]))$ с не более чем $n$ скачками, удовлетворяющая (11).

Эти утверждения сводят экстремальную задачу

$$\int_{b_1}^{b_2} u_{n+1}(t) dF(t) \to extremum \qquad (12)$$

с обобщенными моментными ограничениями (11), где $u_{n+1}(t)$ определена и непрерывна на $[b_1, b_2]$, к оптимизации функционала $\sum_{k=1}^{n+1} p_k u_{n+1}(x_k)$ по переменным $p_k \geq 0,\ k = \overline{1, n+1}, b_1 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{n+1} \leq b_2$, удовлетворяющим условиям

$$\sum_{k=1}^{n+1} p_k = 1, \qquad \sum_{k+1}^{n+1} p_k \bar{u}_n(x_k) = \bar{\beta}_n.$$

Такую задачу эффективно решает численный метод Ермольева, модифицированный для $\mathfrak{I}_0([b_1,b_2])$ А.Н. Голодниковым и Л.С. Стойковой (Голодников, Стойкова, 1978).

Нам интересны два частных случая этой экстремальной задачи.

Пусть $-\infty < b_1 < b_2 < +\infty$, $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ –положительные константы. При заданном $s > 0$ найти

$$\beta(s) = \int_{b_1}^{b_2} e^{-st} dB(t) \to extremum \tag{13}$$

В классе ФР $B$ из $\mathfrak{I}_0([b_1,b_2])$, удовлетворяющих ограничениям

$$\int_{b_1}^{b_2} t^k dB(t) = \beta_k, \quad k = \overline{1,n}. \tag{14}$$

Далее решить аналогичную задачу с заменой (13) на

$$\beta_{n+1} = \int_{b_1}^{b_2} t^{n+1} dB(t) \to extremum. \tag{15}$$

Эти экстремальные задачи (13)-(14) и (15)-(14) обладают особенностью, позволяющей аналитическое решение. Опишем упомянутую особенность.

Пусть система функций

$$u_1(t), \cdots, u_n(t) \text{ и } u_1(t), \cdots, u_n(t), u_{n+1}(t) \tag{16}$$

образуют $T_+$ –системы (чебышевские системы). Система $u_1(t), \cdots, u_n(t), t \in [b_1, b_2]$, образует $T_+$ –систему, если для любых $b_1 \le t_1 \le \cdots \le t_n \le b_2$ определитель $\left|u_i(t_j)\right|_{i,j=1}^{n} > 0$ (Крейн, 1973).

Например, $1, t, \cdots, t^n$ при любом $n$, $1, t, \cdots, t^n, e^{-st}$ при любом $n$ и $s > 0 - T_+$ –системы, что легко проверяется непосредственно.

Экстремальная задача (12)-(11) при чебышевских ограничениях на системы функций (16) в классе $\mathfrak{I}_0([b_1,b_2])$ решается методом выпуклых конусов М.Г. Крейна (Крейн, 1951).

В нашем случае (13)-(15) из известных результатов выводится следующее утверждение.

Следствие. Предполагаем, что класс $\mathfrak{I}_0(\bar{\beta}_n)$ не пуст. При всех $s > 0$ одновременно

$$\inf_{B \in \mathfrak{I}_0(\bar{\beta}_n)} \beta(s) \quad \text{и} \quad \inf_{B \in \mathfrak{I}_0(\bar{\beta}_n)} \beta_{n+1}, \tag{17}$$

$$\sup_{B \in \mathfrak{I}_0(\bar{\beta}_n)} \beta(s) \quad \text{и} \quad \sup_{B \in \mathfrak{I}_0(\bar{\beta}_n)} \beta_{n+1}$$

достигаются на одних и тех же ФР $B_*$ и $B^*$ из $\mathfrak{I}_0(\bar{\beta}_n)$. В качестве $B_*$ $(B^*)$ может быть взята ступенчатая ФР со скачками $p_k$ $(p_k')$ в точках $x_k$ $(x_k')$. Величины $p_k$ $(p_k')$, $x_k$ $(x_k')$ однозначно определяются из систем уравнений (7) и (8) соответственно.

Доказательство теоремы 1. Из формулы (3) вытекает, что при моментных ограничениях (1) в классе $\mathfrak{I}_0([b_1,b_2]), -\infty < b_1 < b_2 < +\infty$ , всех ФР $B$ из $\mathfrak{I}_0([b_1,b_2])$ достигаются или не достигаются на одних и тех же ФР $B_*$ и $B^*$ из $\mathfrak{I}_0(\bar{\beta}_n)$ соответственно, решения следующих экстремальных задач.

$$\omega_{FIFO}(s) \to inf \quad \text{и} \quad \beta(s) \to sup, \tag{18}$$

$$\omega_{FIFO}(s) \to sup \quad \text{и} \quad \beta(s) \to inf. \tag{19}$$

Теперь из (18)-(19) и из Следствия вытекают утверждения Теоремы 1 для ПЛС $\beta(s)$ одновременно при всех $s \ge 0$.

Докажем, что при моментных ограничениях (1) в классе $\mathfrak{I}_0([b_1,b_2])$ решения экстремальных задач в классе $C_0$

$$\pi(s) \to sup \quad \text{и} \quad \beta(s) \to sup, \tag{20}$$

$$\pi(s) \to inf \quad \text{и} \quad \beta(s) \to inf \tag{21}$$

достигаются или не достигаются на одних и тех же ФР $B_*$ и $B^*$ из $\mathfrak{I}_0(\bar{\beta}_n)$ соответственно.

В (Гнеденко, 1973), гл. 1 приведена следующая процедура нахождения решения функционального уравнения (2) при $\rho < 1$. Для любого $s \ge 0$

$\pi(s) = \lim_{n\to+\infty} \pi_n(s),$ (22)
где $\{\pi_n(s)\}$ определяется рекуррентной процедурой
$\pi_1(s) = \beta(s+a),$ (23)
$\pi_{n+1}(s) = \beta(s + a - a\pi_n(s)),\ n = 1,2,\cdots.$ (24)
При этом, установлено, что
$0 \le \pi_n(s) \le \pi_{n+1}(s) \le 1$ (25)
при $s \ge 0$. Так как ФР $B$ не сосредоточены в нуле, то из (13)-(14) следует, что при $s > 0$ неравенства (25) строгие.

Так как $\beta(s)$ и $\beta(s+a), s \ge 0$ достигают экстремума на одних и тех же ФР (Следствие), то из (23)-(24) методом математической индукции нетрудно установить, что при моментных ограничениях (1) в классе $\mathfrak{J}_0([b_1, b_2])$ решения экстремальных задач в классе $C_0$ (20) и (21) достигаются или не достигаются на одних и тех же ФР $B_*$ и $B^*$ из $\mathfrak{J}_0(\bar{\beta}_n)$ соответственно.

Теперь из (20)-(21) и из Следствия вытекают утверждения Теоремы 1 для ПЛС $\pi(s)$ одновременно при всех $s \ge 0$.

Необходимо сделать следующее замечание.

Поскольку процедура содержит предельны переход (22), то следует доказать, что предельны переход не расширяет класс экстремальных ФР в задаче для $\pi(s)$ по сравнению с задачей для $\beta(s)$ при всех $s \ge 0$.

Допустим противное, например, что ФР $B_0$ является и не является экстремальной для первой и для второй экстремальных задач (20) соответственно. Обозначим

$$\beta_0(s) = \int_{b_1}^{b_2} e^{-sx} dB_0(x), \qquad s \ge 0, \qquad \pi^*(s) = \sup_{B\in\mathfrak{J}_0(\bar{\beta}_n)} \pi(s).$$

Тогда $\pi^*(s) = \beta_0(s + a - a\pi^*(s)), s \ge 0.$

Пусть $B^* \in \mathfrak{J}_0(\bar{\beta}_n)$ таково, что $\beta^*(s) = \int_{b_1}^{b_2} e^{-sx} dB^*(x), s \ge 0$, является решением второй экстремальной задачи (20). Тогда $B^*$ доставляет максимум в первой экстремальной задаче (20), т.е. $\pi^*(s) = \beta^*(s + a - a\pi^*(s))$. Но функция $s + a - a\pi^*(s)$ при $\rho < 1$ по $s$ в области $\{s > 0\}$ является строго возрастающей функцией и обратной к ней строго возрастающей функцией служит функция $s - a + a\beta^*(s)$ (Гнеденко и др., 1973). Таким образом имеем $\pi^*(s - a + a\beta^*(s)) = \beta_0(s) = \beta^*(s), s > 0$. По теореме непрерывности для ПЛС $B_0 = B^*$, что противоречит нашему предположению $B_0 \ne B^*$ .

Аналогичное утверждение получается для экстремальных задач (21).

Далее, из формулы (4), представленной в виде

$$\omega_{LIFO}(s) = 1 - \rho + \left(1 + \frac{s}{a(1-\pi(s))}\right)^{-1}, \ s \ge 0,\ \rho < 1,$$

Вытекает, что при моментных ограничениях (1) в классе $\mathfrak{J}_0([b_1, b_2])$ решения экстремальных задач

$$\omega_{LIFO}(s) \to sup \quad \text{и} \quad \pi(s) \to sup, \tag{26}$$
$$\omega_{LIFO}(s) \to inf \quad \text{и} \quad \pi(s) \to inf \tag{27}$$

достигаются или не достигаются на одних и тех же ФР из $\mathfrak{J}_0(\bar{\beta}_n)$.

Сравнивая (20) и (26), (21) и (27), заключаем, что при моментных ограничениях (1) в классе $\mathfrak{J}_0([b_1, b_2])$ решения экстремальных задач

$$\omega_{LIFO}(s) \to sup \quad \text{и} \quad \beta(s) \to sup, \tag{28}$$
$$\omega_{LIFO}(s) \to inf \quad \text{и} \quad \beta(s) \to inf \tag{29}$$

достигаются или не достигаются на одних и тех же ФР из $\mathfrak{J}_0(\bar{\beta}_n)$.

Теорема 1 доказана.

<u>Доказательство теоремы 2</u> основано на представлении моментов случайной величины через дифференциалы соответствующих порядков от ПЛС и на теореме 1.

### 3. Заключение

В модели M|G|1|∞ при дисциплинах FIFO и LIFO, фиксированных первых $n$ моментах длительностей обслуживания, в классе всех функций распределения длительностей обслуживания на $[b_1, b_2], -\infty < b_1 < b_2 < +\infty$ найдены достижимые границы для:

- Преобразований Лапласа-Стилтьеса стационарных функций распределения времени ожидания и периода занятости;

- $n$ –го момента стационарного времени ожидания и $(n+1)$ –го момента периода занятости.

**Литература**

Симонян, Улитина, 2008 – *Симонян А.Р., Улитина Е.И.* О дискретных характеристиках в модели G|G|s|∞ // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2008. Т. 15. № 4. С. 762-763.

Simonyan, Ulitina, 2004 – *Simonyan A.R., Ulitina E.I.* A Theorem on the Convergence to a Stable Law in the M|G|1|∞ Model // *Russian Mathematical Surveys*. 2004. Т. 59. № 3. С. 589-590.

Симонян, Улитина, 2005 – *Симонян А.Р., Улитина Е.И.* О параметрических моделях массового обслуживания // *Обозрение прикладной и промышленной математики*. 2005. Т. 12. С. 184.

Симонян, Улитина, 2010 – *Симонян А.Р., Улитина Е.И.* Нестационарные характеристики в модели Клейнрока с нелинейной функцией приоритета // *Обозрение прикладной и промышленной математики*. 2010. Т. 17. № 2. С. 57.

Симонян и др., 2013 – *Симонян А.Р., Симонян Р.А., Улитина Е.И., Ушаков В.Г.* Стационарные времена ожидания в модели Клейнрока с нелинейной функцией приоритета // *Известия Сочинского государственного университета*. 2013. № 1-2. С. 26-42.

Simonyan et al., 2016 – *Simonyan A.R., Ulitina E.I., Simavoryan S.Zh.* New Submission of Multidimensional Limit Laws in Prabhu's Model // *Russian Journal of Mathematical Research. Series A*. 2016. № 1 (3). С. 38-42.

Гнеденко и др., 1973 – *Гнеденко Б.В., Даниелян Э.А., Димитров Б.Н., Климов Г.П., Матвеев В.Ф.* Приоритетные системы обслуживания. М.: МГУ, 1973, 448 с.

Даниелян, Мовсисян, 1989 – *Даниелян Э.А., Мовсисян Г.С.* Уточнение теоремы Каратеодори-Рисса// *ДАН Арм.ССР*, 3, LVIII, 1989, с. 105-108.

Крейн, Нудельман, 1973 – *Крейн М.Г., Нудельман А.А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973, 552 с.

Голодников, Стойкова, 1978 – *Голодников А.Н., Стойкова Л.С.* Численный метод оценки некоторых функционалов, характеризующих надежность // *Кибернетика*, Киев, 2, 1978, с. 73-77.

Крейн, 1951 – *Крейн М.Г.* Идеи П.Л. Чебышева и А.А. Маркова в теории предельных величин интегралов и их дальнейшее решение // *Успехи математических наук*, т. VI, вып. 4, 1951, С. 3-120.

**References**

Simonyan, Ulitina, 2008 – *Simonyan A.R., Ulitina E.I.* (2008). O diskretnykh kharakteristikakh v modeli G|G|s|∞ [On discrete characteristics in the model G|G|s|∞]. *Obozrenie prikladnoi i promyshlennoi matematiki*. T. 15. № 4. pp. 762-763. [in Russian]

Simonyan, Ulitina, 2004 – *Simonyan A.R., Ulitina E.I.* (2004). A Theorem on the Convergence to a Stable Law in the M|G|1|∞ Model. *Russian Mathematical Surveys*. T. 59. № 3. pp. 589-590.

Simonyan, Ulitina, 2005 – *Simonyan A.R., Ulitina E.I.* (2005). O parametricheskikh modelyakh massovogo obsluzhivaniya [On parametric queuing models]. *Obozrenie prikladnoi i promyshlennoi matematiki*. T. 12. p. 184.

Simonyan, Ulitina, 2010 – *Simonyan A.R., Ulitina E.I.* (2010). Nestatsionarnye kharakteristiki v modeli Kleinroka s nelineinoi funktsiei prioriteta [Non-stationary characteristics in the Kleinrock model with a nonlinear priority function]. *Obozrenie prikladnoi i promyshlennoi matematiki*. T. 17. № 2. p. 57.

Simonyan i dr., 2013 – *Simonyan A.R., Simonyan R.A., Ulitina E.I., Ushakov V.G.* (2013). Statsionarnye vremena ozhidaniya v modeli Kleinroka s nelineinoi funktsiei prioriteta [Stationary expectation times in the Kleinrock model with a nonlinear priority function]. *Izvestiya Sochinskogo gosudarstvennogo universiteta*. № 1-2. pp. 26-42.

Simonyan et al., 2016 – *Simonyan A.R., Ulitina E.I., Simavoryan S.Zh.* (2016). New Submission of Multidimensional Limit Laws in Prabhu's Model. *Russian Journal of Mathematical Research. Series A*. № 1 (3). pp. 38-42.

Gnedenko i dr, 1973 – *Gnedenko B.V., Danielyan E.A., Dimitrov B.N., Klimov G.P., Matveev V.F.* (1973). Prioritetnye sistemy obsluzhivaniya [Priority systems of service]. M.: MGU, 448 p.

Danielyan, Movsisyan, 1989 – *Danielyan E.A., Movsisyan G.S.* (1989). Utochnenie teoremy Karateodori-Rissa [A refinement of the Caratheodory-Riesz theorem]. *DAN Arm.SSR*, 3, LVIII, pp. 105-108.

Krein, Nudel'man, 1973 – *Krein M.G., Nudel'man A.A.* (1973). Problema momentov Markova i ekstremal'nye zadachi [Markov moments problem and extremal problems]. M.: Nauka, 552 s.

Golodnikov, Stoikova, 1978 – *Golodnikov A.N., Stoikova L.S.* (1978). Chislennyi metod otsenki nekotorykh funktsionalov, kharakterizuyushchikh nadezhnost' [A numerical method for estimating certain functionals that characterize reliability]. Kiev, *Kibernetika*, 2, pp. 73-77.

Krein, 1951 – *Krein M.G.* (1951). Idei P.L. Chebysheva i A.A. Markova v teorii predel'nykh velichin integralov i ikh dal'neishee reshenie [The ideas of P.L. Chebyshev and A.A. Markov in the theory of limit values of integrals and their further solution]. *Uspekhi matematicheskikh nauk*, t. VI, vyp.4, pp. 3-120.

**Экстремальные задачи для основных характеристик в модели M|G|1|∞**

Арсен Рафикович Симонян [a, *]

[a] Сочинский государственный университет, Российская Федерация

**Аннотация.** В настоящей статье рассматривается одноканальная система массового обслуживания с пуассоновским входящим потоком. Для данной системы с ожиданием решаются экстремальные задачи для преобразований Лапласа-Стилтьеса и моментов функций распределения основных характеристик (периодов занятости, времен ожидания). Задачи решаются при моментных ограничениях. Предположение, что входящий поток пуассоновский, не является слишком сильным ограничением, но с другой стороны упрощает аппарат исследования данной системы. Указанное предположение дает нам возможность прийти к более компактным результатам.

**Ключевые слова:** теория массового обслуживания, функция распределения, системы массового обслуживания, период занятости, время ожидания.

[*] Корреспондирующий автор
Адреса электронной почты: oppm@mail.ru (А.Р. Симонян)