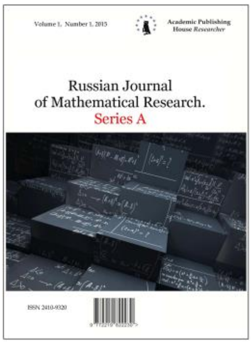
Published in the Slovak Republic
Russian Journal of Mathematical Research. Series A
Has been issued since 2015.
E-ISSN: 2413-7529
2017, 3(2): 62-66

DOI: 10.13187/rjmr.a.2017.2.62
www.ejournal30.com



On Uniformly Converging Fourier Series of Functions from Space L_p

Nikolay V. Shipov [a, *]

[a] Bauman Moscow state technical university, Russian Federation

Abstract

Steinhaus theorem about uniformly equiconverged Fourier series argues that the difference between the partial sums $S_n(\lambda f)-\lambda(x)S_n(f)$ uniformly tends to zero when $n\to\infty$ for any summable function $f(x)$ and the function $\lambda(x)$ which satisfies the Lipchitz conditions of first order. In the present work it is proved that this theorem remains fair, if the function $f(x)$ belongs to the $L_p(1\le p<\infty)$, and the function $\lambda(x)$ satisfies the Lipchitz condition of order α $(1/p<\alpha\le 1)$. The results obtained can be used when examining the conditions of convergence of Fourier series in a fixed location, as well as in examining the conditions of uniform convergence (or absolute convergence in some cases) of these series.

Keywords: Steinhaus theorem, evenly equiconverged Fourier series, the integral modulus of continuity of order p.

1. Введение

Ряды Фурье и интеграл Фурье находят многочисленные применения как в математическом анализе (Bary, 1964; Edwards, 1979), так и в многочисленных задачах математической физики и их приложений, включая обобщенные функции (Шипов, 2010). Пусть для суммируемой (интегрируемой по Лебегу) периодической функции $f(x)$ установлены условия поточечной сходимости (или равномерной сходимости) ряда Фурье $\sigma(f)$, вычислены скорости убывания коэффициентов ряда Фурье и связанные с ними оценки интегральных модулей непрерывности (Гейт, 1972; Теляковский, 1992). Аналогичные проблемы и задачи мы имеем после умножения функции $f(x)$ на периодическую функцию $\lambda(x)$ (в зависимости от свойств периодической функции $\lambda(x)$).

При решении этих задач оказывается полезной теорема Штейнгауза, которая утверждает, что если $\lambda(x)$ есть периодическая функция периода 2π, удовлетворяющая условию Липшица порядка 1, то ряды $\sigma(\lambda f)$ и $\lambda(x)\sigma(f)$ являются на отрезке $[-\pi,\pi]$ равномерно равносходящимися (Bary, 1964). Таким образом разность частичных сумм $S_n(\lambda f)-\lambda(x)S_n(f)$ равномерно стремится к нулю при $n\to\infty$, то есть ряды $\sigma(\lambda f)$ и $\lambda(x)\sigma(f)$ сходятся или расходятся на одинаковых множествах точек x. Поскольку множество точек сходимости (равномерной сходимости или расходимости применительно к функции $f(x)$)

* Corresponding author
E-mail addresses: nvshi@mail.ru (N.V. Shipov)

ряда $\lambda(\mathrm{x})\sigma(\mathrm{f})$ установить значительно проще (так же как и ряд других свойств этого ряда), то согласно теореме Штейнгауза эти множества точек сходимости совпадают.

2.Результаты исследования

Сформулируем вариант обобщения теоремы Штейнгауза, ослабляя ограничения на функцию $\lambda(\mathrm{x})$ и одновременно усиливая требования к функции $\mathrm{f(x)}$.

Теорема 1.

Если периодическая функция $\mathrm{f(x)}$ принадлежит пространству $L_P(1 \le p < \infty)$, а периодическая функция $\lambda(\mathrm{x})$ удовлетворяет условию Липшица порядка α $(1/p < \alpha \le 1)$,

$$|\,\lambda(\mathrm{x}+\mathrm{t}) - \lambda(\mathrm{x})\,| < \mathrm{M}\,|\,\mathrm{t}\,|^{\alpha},$$

где константа M не зависит от x, то ряды $\sigma(\lambda\mathrm{f})$ и $\lambda(\mathrm{x})\sigma(\mathrm{f})$ являются на отрезке $[-\pi,\pi]$ равномерно равносходящимися.

Поскольку функция $\mathrm{f(x+t)}$ суммируема по аргументу t, а функция $\lambda(\mathrm{x+t})$ непрерывна, то функция $\mathrm{f(x+t)}\lambda(\mathrm{x+t})$ суммируема. Поэтому аналогично [1, 2] для разности частичных сумм имеем

$$\mathrm{S_n}(\lambda f) - \lambda(x)S_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f(x+t)}\mathrm{g_X}(t)\sin nt\,dt + o(1), \qquad (1)$$

где

$$\mathrm{g_X}(t) = (\lambda(x+t) - \lambda(x))/t, \qquad (2)$$

$$|\,\mathrm{g_X}(t)\,| \le \mathrm{M}\,|\,\mathrm{t}\,|^{\alpha-1}. \qquad (3)$$

Первое слагаемое в (1) с учетом периодичности функции под знаком интеграла в (1) аналогично [1, 2] по модулю не превосходит величины

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\,f(x+t+\pi/\mathrm{n})\mathrm{g_X}(t+\pi/n) - f(x+t)g_X(t)\,|\,\mathrm{dt} \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\,f(x+t+\pi/\mathrm{n}) - f(x+t)\,|\;|\,\mathrm{g_X}(t+\pi/n)\,|\,dt \;+$$

$$+\;\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\,f(x+t)\,|\,|\,\mathrm{g_X}(t+\pi/n) - \mathrm{g_X}(t)\,|\,dt. \qquad (4)$$

Первый интеграл в (4) оценивается с помощью неравенства Гельдера, считая параметр p большим единицы, и с учетом периодичности функций не превосходит величины

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |\,f(t+\pi/\mathrm{n}) - f(t)\,|^{P}\,dt\right)^{1/P}\left(\int_{-\pi}^{\pi} |\,\mathrm{g_X}(t)\,|^{\mathrm{q}}\,dt\right)^{1/q} \le \omega_{\mathrm{p}}(\pi/n, f)M\left(\int_{-\pi}^{\pi}|\,t\,|^{(\alpha-1)q}dt\right)^{1/q} \le$$

$$\le 2\omega_P(\pi/n, f)M\pi^{\alpha-1+1/q}/(\alpha q - q + 1)^{1/q},$$

где $\omega_p(\delta, f)$ – интегральный модуль непрерывности порядка p функции $f(x)$ [1,2,4,5], стремящийся к нулю при $\delta \to 0$ (то есть при $n \to \infty$), а условие $\alpha q - q + 1 > 0$, то есть $\alpha > 1 - 1/q = 1/p$ выражает требование конечности второго интеграла (несобственного) в неравенстве Гельдера при $p > 1$.

Для оценки второго интеграла в (4) разложим $f(x)$ на интервале $(-\pi, \pi)$ в сумму двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, из которых первая ограничена, $|f_1(x)| < K$, а для второй

$$(\int_{-\pi}^{\pi} |f_2(x)|^P \, dx)^{1/P} < \varepsilon .$$

Далее продолжим функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ периодически с периодом 2π, сохраняя для них те же обозначения. Тогда второй интеграл в (4) не превосходит суммы пяти слагаемых

$$(\int_{-\pi}^{\pi} |f_2(x+t)|^P \, dt)^{1/P} (\int_{-\pi}^{\pi} |g_X(t+\pi/n) - g_X(t)|^q \, dt)^{1/q} + K\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |g_X(t)| \, dt + K\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |g_X(t+\pi/n)| \, dt +$$

$$+ K\int_{-\pi}^{-\varepsilon} |g_X(t+\pi/n) - g_X(t)| \, dt + K\int_{\varepsilon}^{\pi} |g_X(t+\pi/n) - g_X(t)| \, dt . \qquad (5)$$

Для первого слагаемого в (5) с учетом неравенства Минковского аналогично вышеизложенному получаем независящую от x оценку

$$4\varepsilon M \pi^{\alpha - 1 + 1/q} / (\alpha q - q + 1)^{1/q} .$$

Второе слагаемое в (5) с учетом (3) не превосходит величины $2MK\varepsilon^{\alpha}/\alpha$. Третье слагаемое в (5) сводится к интегрированию $|g_X(t)|$ по интервалу

$(-\varepsilon + \pi/n, \varepsilon + \pi/n)$. Поэтому при $\pi/n \le \varepsilon/2$ оно не превосходит величины

$$2MK(2\varepsilon)^{\alpha}/\alpha .$$

Для оценки четвертого слагаемого в (5) используем равномерную непрерывность функции $g_X(t)$ на замкнутом множестве $-\pi \le x \le \pi, -\pi \le t \le -\varepsilon/2$. Поэтому для любого положительного η существует такое $N(\varepsilon, \eta)$, что при всех n превосходящих $N(\varepsilon, \eta)$ справедливо неравенство

$$|g_X(t+\pi/n) - g_X(t)| < \eta \; . \qquad (6)$$

Интегрирование по отрезку $-\pi \le t \le -\varepsilon$ не выводит аргумент $t + \pi/n$ в (6) из отрезка $-\pi \le t \le -\varepsilon/2$, поскольку при $\pi/n \le \varepsilon/2$ выполняется неравенство

$$t + \pi/n \le -\varepsilon + \pi/n \le -\varepsilon/2 .$$

Интегрированием неравенства (6) по отрезку $-\pi \le t \le -\varepsilon$ приходим к выводу, что четвертое слагаемое в (5) не превосходит $\pi K \eta$, если $\pi/n \le \varepsilon/2$ и одновременно n превышает $N(\varepsilon, \eta)$.

Аналогичным образом при оценке пятого слагаемого в (5) используем равномерную непрерывность функции $g_X(t)$ на замкнутом множестве $-\pi \le x \le \pi, \varepsilon \le t \le \pi + \varepsilon/2$, так что пятое слагаемое в (5) также не превосходит величины $\pi K \eta$.

Итак, поскольку ε и η являются произвольными как угодно малыми положительными числами, то существует такое число N , наибольшее из всех, указывавшихся при вычислении оценок интегралов в (4), что при n > N оба интеграла в (4) оказываются ограниченными сверху положительными величинами, пропорциональными ε или η, либо стремящимися к нулю при $\varepsilon \to 0$, и к тому же не зависящими от x. Таким образом разность частичных сумм $S_n(\lambda f) - \lambda(x) S_n(f)$ равномерно стремится к нулю при $n \to \infty$, то есть ряды $\sigma(\lambda f)$ и $\lambda(x)\sigma(f)$ сходятся или расходятся на одинаковых множествах точек x. Разумеется у этих рядов одинаковые множества точек равномерной сходимости.

Этим завершается доказательство этого варианта обобщения теоремы Штейнгауза о равномерно равносходящихся рядах Фурье. в случае, когда α превышает величину 1/p и $p > 1$.

3. Заключение

Полученный результат расширяет класс функций $\lambda(x)$, удовлетворяющих условию Липшица порядка α, на которые можно умножать частичную сумму $S_n(f)$ ряда Фурье функции f(x) с целью изучения множества точек сходимости или расходимости (равномерной сходимости или расходимости) ряда Фурье функции $\lambda(x)f(x)$. При этом функция f(x) должна принадлежать пространству L_p и должно выполняться условие, величина α превышает величину 1/p и $p > 1$ То же самое разумеется справедливо применительно к функции |f(x)|, а в отдельных случаях при изучении множества точек абсолютной сходимости (расходимости) ряда Фурье.

Литература

Гейт, 1972 – *Гейт, В.Э.* О структурных и конструктивных свойствах функции и её сопряженной в L // *Изв. вузов. Матем.* 1972, №7. С. 19-30.

Теляковский, 1992 – *Теляковский, С.А.* Оценки снизу интегрального модуля непрерывности функции через её коэффициенты Фурье // *Матем. заметки.* 1992, № 5. С. 107-112.

Шипов, 2010 – *Шипов, Н.В.* О свойствах функционала P(1/x) в пространстве обобщенных функций медленного роста // *Вестник МГУЛ. Лесной Вестник.* 2010. Т.75, Вып.6. С. 183-185.

Bary, 1964 – *Bary, N.K.* Treatise on Trigonometric Series. Vol. 1 and 2. Vol. 1. Treatise on Trigonometric Series. New York, Pergamon Press. Publ., 1964, 480 p.

Edwards, 1979 – *Edwards R.E.* Fourier Series. A Modern Introduction. New York. Heidelberg. Berlin, Springer-Verlag. Publ., 1979, 256 p.

References

Geit, 1972 – *Geit V.E.* (1972). O strukturnykh i konstruktivnykh svoistvakh funktsii i ee sopryazhennoi v L [On the structural and constructional features of the function and its conjugate in L]. *Izv. vuzov. Matem.* №7. pp. 19-30. [in Russian]

Telyakovskii, 1992 – *Telyakovskii S.A.* (1992). Otsenki snizu integral'nogo modulya nepreryvnosti funktsii cherez ee koeffitsienty Fur'e [Evaluate at the bottom of the integral continuity module of functions through its Fourier coefficients]. *Matem. zametki.* № 5. pp. 107-112. [in Russian]

Shipov, 2010 – *Shipov N.V.* (2010). O svoistvakh funktsionala P(1/x) v prostranstve obobshchennykh funktsii medlennogo rosta [On the properties of the functional P (1 / x) in the space of generalized functions of slow growth]. *Vestnik MGUL. Lesnoi Vestnik.* T.75, Vyp.6. pp. 183-185. [in Russian]

Bary, 1964 – *Bary, N.K.* (1964). Treatise on Trigonometric Series. Vol. 1 and 2. Vol. 1. Treatise on Trigonometric Series. New York, Pergamon Press. Publ., 480 p.

Edwards, 1979 – *Edwards R.E.* (1979). Fourier Series. A Modern Introduction. New York. Heidelberg. Berlin, Springer-Verlag. Publ., 256 p.

О равномерно сходящихся рядах Фурье функций из пространства L_p

Николай Викторович Шипов [a,*]

[a] МГТУ им. Н.Э. Баумана (Мытищинский филиал), Российская Федерация

Аннотация. Теорема Штейнгауза о равномерно равносходящихся рядах Фурье утверждает, что разность частичных сумм $\mathrm{S_n}(\lambda f)-\lambda(x)S_n(f)$ равномерно стремится к нулю при $\mathrm{n}\to\infty$ для любой суммируемой функции $\mathrm{f(x)}$ и функции $\lambda(\mathrm{x})$, удовлетворяющей условию Липшица первого порядка. В настоящей работе доказано, что эта теорема остаётся справедливой, если функция $\mathrm{f(x)}$ принадлежит пространству $L_p(1\le p<\infty)$, а функция $\lambda(\mathrm{x})$ удовлетворяет условию Липшица порядка α $(1/p<\alpha\le 1)$. Полученные результаты могут быть использованы при изучении условий сходимости рядов Фурье в фиксированной точке для функций из L_p, а также при изучении условий равномерной сходимости (в отдельных случаях абсолютной сходимости) этих рядов. Обобщенный вариант теоремы Штейнгауза расширяет класс функций $\lambda(\mathrm{x})$, удовлетворяющих условию Липшица порядка α, на которые можно умножать частичную сумму $\mathrm{S_n}(f)$ ряда Фурье функции $\mathrm{f(x)}$ из L_p для изучения множества точек сходимости или расходимости (равномерной сходимости или расходимости) частичных сумм $\mathrm{S_n}(\lambda f)$ функции $\lambda(\mathrm{x})\mathrm{f(x)}$ при $\mathrm{n}\to\infty$.

Ключевые слова: теорема Штейнгауза, равномерно равносходящиеся ряды Фурье, интегральный модуль непрерывности порядка p.

[*] Корреспондирующий автор
Адреса электронной почты: nvshi@mail.ru (Н.В. Шипов)