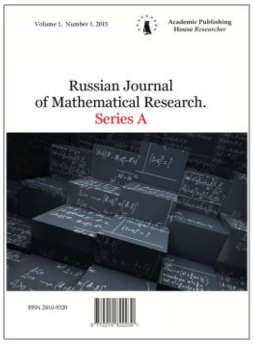

Published in the Slovak Republic
Russian Journal of Mathematical Research. Series A
Has been issued since 2015.
E-ISSN: 2413-7529
2017, 3(2): 36-48

DOI: 10.13187/rjmr.a.2017.2.36
www.ejournal30.com

Articles and statements

Analysis of a Fuzzy Quadratic Equation with Real Roots

Viktor I. Samarin [a, *], Irina L. Makarova [a], Natalya F. Yakunina [a]

[a] Sochi state university, Russian Federation

Abstract

The range of admissible values of the real roots of a quadratic equation with fuzzy parameters, taking into account the requirements for satisfying the formulas of Viet's theorem, is analyzed. The formulas for the boundary values of the fuzzy real roots of the quadratic equation are given. On the example of the solution of fuzzy cooperative game, a method is proposed for finding the roots of a quadratic equation with zero discriminant.

Keywords: fuzzy number, fuzzy quadratic equation, interacting fuzzy roots of equation, fuzzy cooperative game, mathematical programming problem, objective function, saddle point, fuzzy range of Pareto-optimal solutions.

1. Введение

Нечеткая математика изучает нечеткие множества, нечеткие отношения, нечеткие отображения элементов таких множеств и операции над нечеткими числами и функциями. Нечеткие вычисления на практике обусловлены в первую очередь:

– погрешностью измерительных приборов и небрежностью при измерениях;

– округлением чисел;

– субъективностью при установлении наиболее значимых качественных и количественных факторов, влияющих на показатели изучаемых объектов, и нечеткостью оценок степени влияния этих факторов;

– информационной неполнотой, неопределенностью, неактуальностью и недостоверностью;

– некачественным масштабированием и схематичностью моделей;

– непроизвольным или тенденциозным искажением фактических данных;

– расплывчивостью ограничений области допустимых значений параметров, потенциальных альтернатив трендовых ориентаций и предпочтений;

– нарушением допустимых условий функционирования систем;

– неоднозначностью чувствительности одного параметра к интервальным изменениям других;

– предписываемыми допусками метрических характеристик и технических условий на изготовляемую продукцию;

* Corresponding author
E-mail addresses: visamarin@mail.ru (V.I. Samarin), ratton@mail.ru (I.L. Makarova), elena-555-49@mail.ru (N.F. Yakunina)

– неточностью функциональной аппроксимации;

– случайностью выборки, определяющей доверительные интервалы значений оцениваемых параметров генеральной совокупности;

– обтекаемостью формулировок понятий, терминов, целевых установок и т.п.;

– нестационарностью динамических показателей и т.п.

2. Обсуждение

При решении нечетких алгебраических уравнений (Yager, 1977; Ибрагимов, 2010; Макарова, Самарин, 2015), нечетких неравенств (Dubois, Prade, 1980; Зайченко, 1991; Макарова и др., 2014), нечетких разностных и дифференциальных уравнений (Makarova et al., 2016) возникает необходимость определения границ носителей решений этих уравнений.

Проанализируем корни полного квадратного уравнения с вещественными корнями $ax^2 + bx + c = 0$, где параметры a, b и c – нечеткие действительные числа (L-R)-типа треугольной формы исходя из общих алгебраических формул для корней четкого уравнения $x_{1,\,2} = (-\, b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\,)/(2a)$.

Определим значения x_1 и x_2 при всех возможных реализациях значений a, b и c для их соответствующих носителей: $a = (a_0;\, \alpha_L;\, \alpha_R) = \{a';\, a''\}$, $b = (b_0;\, \beta_L;\, \beta_R) = \{b';\, b''\}$, $c = (c_0;\, \gamma_L;\, \gamma_R) = \{c';\, c''\}$; a_0, b_0, c_0 – модальные значения параметров a, b c квадратного уравнения; α_L и α_R, β_L и β_R, γ_L и γ_R – левые и правые коэффициенты нечеткости; $a' = a_0 - \alpha_L$ и $a'' = a_0 + \alpha_R$, $b' = b_0 - \beta_L$ и $b'' = b_0 + \beta_R$, $c' = c_0 - \gamma_L$; $c'' = c_0 + \gamma_R$ – левые и правые границы носителей этих параметров соответственно.

Приведенные в (Ибрагимов, 2010) формулы задают возможные границы корней уравнения с избытком, поскольку не учитывают того, что нечеткие корни квадратного уравнения x_1 и x_2 являются взаимодействующими (Заде, 1976) в силу наличия условного ограничения, определяемого теоремой Виета.

Приведем решение, например, нечеткого квадратного уравнения $\tilde{2}x^2 - \tilde{5}x - \tilde{3} = 0$, где $a = \tilde{2} = (2;\, 0{,}4;\, 0{,}8)$, т.е. $a_0 = 2$, $a' = 1{,}6$ и $a'' = 2{,}8$; $b = -\,\tilde{5} = (-\,5;\, 0{,}7;\, 0{,}2)$, т.е. $b_0 = -\,5$, $b' = -\,5{,}7$, $b'' = -\,4{,}8$; $c = -\,\tilde{3} = (-\,3;\, 0{,}9;\, 0{,}5)$, т.е. $c_0 = -\,3$, $c' = -\,3{,}9$, $c'' = -\,2{,}5$.

Сначала решаем четкое уравнение $2x^2 - 5x - 3 = 0$, параметры которого равны своим модальным значениям. Получаем модальные значения корней: $x_{10} = 3$, $x_{20} = -\,0{,}5$.

Теперь определим область допустимых значений действительных корней нечеткого квадратного уравнения. При этом учтем, что для каждой реализации квадратного уравнения $\bar{a}\,x^2 + \bar{b}\,x + \bar{c} = 0$ с фиксированной комбинацией точечных значений нечетких параметров a, b, c в пределах их носителей при не равенстве дискриминанта уравнения нулю наличие одного действительного корня x_1 уравнения предполагает существование второго действительного корня x_2. Значение функции принадлежности этих корней будет определяться как $\min(\mu_a(\bar{a});\, \mu_b(\bar{b});\, \mu_c(\bar{c}))$, где $\mu_a(\bar{a})$; $\mu_b(\bar{b})$; $\mu_c(\bar{c})$ – соответствующие значения функций принадлежности для значений $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

Согласно теореме Виета и правил операций над нечеткими числами при $a > 0$, $b < 0$ и $c < 0$ для всей совокупности корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ должны выполняться условия: $x_1 + x_2 = -\, b/a \in \{-\, b''/a'';\, -\, b'/a'\}$, $x_1 \cdot x_2 = c/a \in \{c'/a';\, c''/a''\}$.

Для рассматриваемого уравнения получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} -b''/a'' = 4{,}8/2{,}8 \le x_1 + x_2 \le 5{,}7/1{,}6 = -b'/a'; \\ c'/a' = -3{,}9/1{,}6 \le x_1 \cdot x_2 \le -2{,}5/2{,}8 = c''/a''. \end{cases}$$

Для определенности полагаем $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, и на основании полученной системы неравенств строим область допустимых значений корней x_1 и x_2:

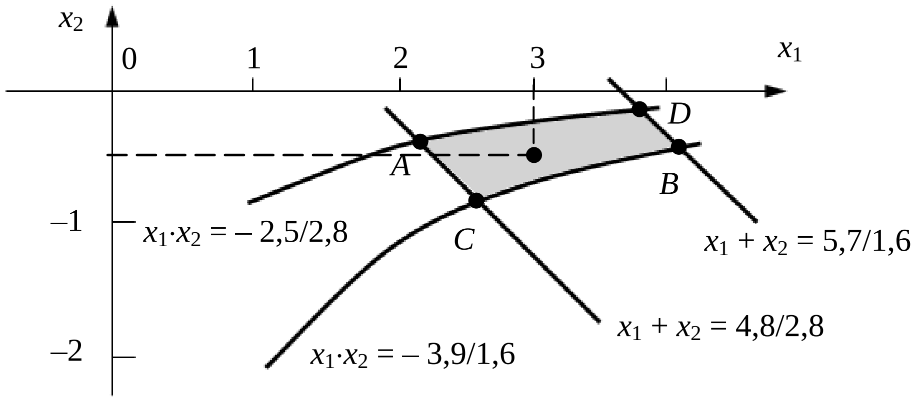

Рис. 1. Область допустимых значений нечетких корней x_1 и x_2 квадратного уравнения

Минимальное значение носителя корня x_1 определяется соответствующей координатой «угловой» точки A полученной области, т.е. x_1' находим из системы уравнений: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -b''/a''; \\ x_1 \cdot x_2 = c''/a''. \end{cases}$ Откуда: $x_1' = \dfrac{-b'' + \sqrt{(b'')^2 - 4a''c''}}{2a''} \approx 2{,}133$, а парный ему второй корень $x_2(x_1') = \dfrac{-b'' - \sqrt{(b'')^2 - 4a''c''}}{2a''} = -b''/a'' - x_1' \approx -0{,}419$.

Максимальное значение носителя корня x_1 определяется соответствующей координатой «угловой» точки B полученной области, т.е. x_1'' находим из системы уравнений: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -b'/a'; \\ x_1 \cdot x_2 = c'/a'. \end{cases}$ Откуда: $x_1'' = \dfrac{-b' + \sqrt{(b')^2 - 4a'c'}}{2a'} \approx 4{,}150$, а парный ему второй корень $x_2(x_1'') = \dfrac{-b' - \sqrt{(b')^2 - 4a'c'}}{2a'} = -b'/a' - x_1'' \approx -0{,}5875$.

Минимальное значение носителя корня x_2 определяется соответствующей координатой «угловой» точки C полученной области, т.е. x_2' находим из системы уравнений: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -b''/a''; \\ x_1 \cdot x_2 = c'/a'. \end{cases}$ Откуда: $x_2' = \dfrac{-b'' - \sqrt{(b'')^2 - 4\cdot(a'')^2 \cdot c'/a'}}{2a''} \approx -0{,}924$, а парный ему второй корень $x_1(x_2') = \dfrac{-b'' + \sqrt{(b'')^2 - 4\cdot(a'')^2 \cdot c'/a'}}{2a''} = -b''/a'' - x_2' \approx 2{,}638$.

Максимальное значение носителя корня x_2 определяется соответствующей координатой «угловой» точки D полученной области, т.е. x_2'' находим из системы уравнений: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -b'/a'; \\ x_1 \cdot x_2 = c''/a''. \end{cases}$ Откуда: $x_2'' = \dfrac{-b' - \sqrt{(b')^2 - 4\cdot(a')^2 \cdot c''/a''}}{2a'} \approx -0{,}235$, а парный ему второй корень $x_1(x_2'') = \dfrac{-b' + \sqrt{(b')^2 - 4\cdot(a')^2 \cdot c''/a''}}{2a'} = -b'/a' - x_2'' \approx 3{,}7975$.

Т.о., для выполненных округлений получаем $x_1 = \{x_1'; x_1''\} \approx \{2{,}133; 4{,}150\}$, $x_2 = \{x_2'; x_2''\} \approx \{-0{,}924; -0{,}235\}$. Согласно же (Ибрагимов, 2010): $x_1 = \{x_1'; x_1''\} \approx \{1{,}973; 4{,}509\}$, $x_2 = \{x_2'; x_2''\} \approx \{-1{,}227; -0{,}098\}$. Если, например, подставить $x_1' = 1{,}973$ в систему неравенств $-b''/a'' \le x_1' + x_2 \le -b'/a'$, $c'/a' \le x_1' \cdot x_2 \le c''/a''$, то получим $x_2 \in \varnothing$.

Формулы граничных значений носителей действительных корней нечеткого квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ для $a > 0$ сведены в таблице 1; если в исходном уравнении $a < 0$, то все уравнение следует умножить на -1 по правилу этой операции над нечеткими числами, и решить полученное уравнение, равносильное исходному:

Таблица 1.

Знаки a, b, c	Знаки корней	$x_1'; x_1''$	$x_2'; x_2''$	Парные корни
$a > 0$ $b > 0$ $c > 0$	$x_1 < 0$ $x_2 < 0$ $(x_{20} < x_{10})$	$x_1' = \frac{-b'' - \sqrt{(b'')^2 - 4(a')^2 c'/a''}}{2a'}$; $x_1'' = \frac{-b'' + \sqrt{(b'')^2 - 4(a')^2 c'/a''}}{2a'}$	$x_2' = x_1'$ $x_2'' = x_1''$	$x_2(x_1') = x_2''$; $x_2(x_1'') = x_2'$; $x_1(x_2') = x_1''$; $x_1(x_2'') = x_1'$
$a > 0$ $b > 0$ $c < 0$	$x_1 > 0$ $x_2 < 0$	$x_1' = \frac{-b'' + \sqrt{(b'')^2 - 4(a')^2 c''/a''}}{2a'}$; $x_1'' = \frac{-b' + \sqrt{(b')^2 - 4(a'')^2 c'/a'}}{2a''}$	$x_2' = \frac{-b'' - \sqrt{(b'')^2 - 4a'c'}}{2a'}$; $x_2'' = \frac{-b' - \sqrt{(b')^2 - 4a''c''}}{2a''}$	$x_2(x_1') = -b''/a' - x_1'$ $x_2(x_1'') = -b'/a'' - x_1''$ $x_1(x_2') = -b''/a' - x_2'$ $x_1(x_2'') = -b'/a'' - x_2''$
$a > 0$ $b < 0$ $c > 0$	$x_1 > 0$ $x_2 > 0$ $(x_{20} < x_{10})$	$x_1' = \frac{-b' - \sqrt{(b')^2 - 4(a')^2 c'/a''}}{2a'}$; $x_1'' = \frac{-b' + \sqrt{(b')^2 - 4(a')^2 c'/a''}}{2a'}$	$x_2' = x_1'$ $x_2'' = x_1''$	$x_2(x_1') = x_2''$; $x_2(x_1'') = x_2'$; $x_1(x_2') = x_1''$; $x_1(x_2'') = x_1'$
$a > 0$ $b < 0$ $c < 0$	$x_1 > 0$ $x_2 < 0$	$x_1' = \frac{-b'' + \sqrt{(b'')^2 - 4a''c''}}{2a''}$; $x_1'' = \frac{-b' + \sqrt{(b')^2 - 4a'c'}}{2a'}$	$x_2' = \frac{-b'' - \sqrt{(b'')^2 - 4(a'')^2 c'/a'}}{2a''}$; $x_2'' = \frac{-b' - \sqrt{(b')^2 - 4(a')^2 c''/a''}}{2a'}$	$x_2(x_1') = -b''/a'' - x_1'$ $x_2(x_1'') = -b'/a' - x_1''$ $x_1(x_2') = -b''/a'' - x_2'$ $x_1(x_2'') = -b'/a' - x_2''$

Для исследования случая равенства корней нечеткого квадратного уравнения решим следующую нечеткую кооперативную игру.

Таксопарку в срочном порядке необходимо приобрести 20 дополнительных автомобилей. На авторынке конкурируют два автосалона A и B. Автосалон A реализует новые машины представляющей интерес марки импортного производства. Затраты автосалона на приобретение каждой из таких машин составляет $\tilde{30}$ ден. ед., номинальная цена $\tilde{50}$ ден. ед., однако при организации маркетинговой акции цена может быть снижена до 40 ден. ед. Автосалон B может организовать реализацию требуемых таксопарку автомобилей трех видов: новых автомобилей импортной марки, произведенных на отечественном предприятии, автомобилей отечественной марки и подержанных автомобилей импортного производства с пробегом. Затраты автосалона B на приобретение каждого из таких автомобилей составляет 28, 25 и $\tilde{17}$ ден. ед., цена реализации – 45, 32 и $\tilde{35}$ ден. ед. соответственно. Таксопарк предпочитает новые автомобили импортного производства, и, если разница в цене не превышает 20 %, выбирает именно их. В противном случае выбираются самые дешевые автомобили из выставленных на продажу. Найти справедливое распределение прибыли и способ реализации автомобилей в случае, если автосалоны заключат между собой договор о совместном удовлетворении потребности таксопарка. Нечеткие числа в задаче – числа (L-R)-типа треугольной формы: $\widetilde{30}$ = (30; 1; 1) = {29; 31}, $\widetilde{50}$ = (50; 1; 1) = {49; 51}, $\widetilde{17}$ = (17; 1; 1) = {16; 18}, $\widetilde{35}$ = (35; 1; 1) = {34; 36}.

Составим сдвоенную матрицу цен реализации автомобилей при соответствующем выборе автосалонами своих стратегий (a_i – стратегии автосалона A, i = 1, 2; b_j – стратегии автосалона B, j = 1, 2, 3):

a_1 – продажа нового автомобиля импортного производства не по сниженной цене;
a_2 – продажа нового автомобиля импортного производства по сниженной цене;
b_1 – продажа автомобиля отечественного производства импортной марки;
b_2 – продажа автомобиля отечественной марки;
b_3 – продажа импортируемого автомобиля с пробегом:

a_i \ b_j	b_1	b_2	b_3
a_1	($\widetilde{50}$; 45)	($\widetilde{50}$; 32)	($\widetilde{50}$; $\widetilde{35}$)
a_2	(40; 45)	(40; 32)	(40; $\widetilde{35}$)

Учитываем спрос на соответствующие автомобили: таксопарк предпочитает новый автомобиль импортного производства, но если разница в цене превышает 20 %, то покупает самый дешевый автомобиль. Получаем матрицу цен потенциально реализуемых автомобилей при соответствующих стратегиях автосалонов:

a_i \ b_j	b_1	b_2	b_3
a_1	($\widetilde{50}$; 0)	(0; 32)	(0; $\widetilde{35}$)
a_2	(40 ; 0)	(0; 32)	(40; 0)

Здесь учтено, что в ситуации (a_1; b_1), поскольку (51–45)/45 = 2/15 < 0,2, то оставляем $\widetilde{50}$; в ситуации (a_1; b_2), поскольку (49–32)/32 ≈ 0,53 > 0,2, то оставляем 32; в ситуации (a_1; b_3), поскольку (49–36)/36 > 0,2, то оставляем $\widetilde{35}$; в ситуации (a_2; b_1), поскольку цена нового импортного автомобиля (40 ден. ед.), который является предпочтительным для таксопарка, меньше цены такого же автомобиля отечественного производства (45 тыс. руб.), то оставляем 40; в ситуации (a_2; b_2), поскольку (40–32)/32 = 0,25 > 0,2, то оставляем 32; в ситуации (a_2; b_3), поскольку (40–35)/35 ≈ 0,14 < 0,2, то оставляем 40.

Составляем сдвоенную матрицу прибыли автосалонов при продаже автомобилей с учетом предпочтений таксопарка. Для этого вычитаем из приведенных цен затраты на приобретение автосалонами соответствующих автомобилей:

$(A; B)$ =

a_i \ b_j	b_1	b_2	b_3
a_1	($\widetilde{20}$; 0)	(0; 7)	(0; $\widetilde{18}$)
a_2	(10; 0)	(0; 7)	(10; 0)

Полученные нечеткие значения прибыли представляют следующие числа (L-R)-типа треугольной формы: $\widetilde{20}$ = $\widetilde{50}$ – $\widetilde{30}$ = (50; 1; 1) – (30; 1; 1) = (20; 2; 2) = {18; 22}, $\widetilde{18}$ = $\widetilde{35}$ – $\widetilde{17}$ = (35; 1; 1) – (17; 1; 1) = (18; 2; 2) = {16; 20}.

Выписываем матрицы выигрышей для каждой фирмы – матрицу A для прибыли автосалона A и матрицу B^T – для автосалона B, получаемую транспонированием матрицы B (при этом строки матрицы B^T, определяющей выигрыши автосалона B, будут стратегиями этой фирмы, а столбцы матрицы B^T – стратегиями конкурирующего с ним автосалона A):

$$A = \begin{pmatrix} \widetilde{20} & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 10 \end{pmatrix}; \quad B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 7 \\ \widetilde{18} & 0 \end{pmatrix}.$$

Обе игры имеют седловые точки в чистых «осторожных» стратегиях, которые находятся методом максимина (для элементов строк матриц A и B^T) и минимакса (для элементов столбцов матриц A и B^T): c_{10} = 0 и c_{20} = 7. Т.о., в отсутствие кооперации автосалон B, используя стратегию b_2, т.е. предлагая автомобили отечественной марки, получит при реализации каждого такого автомобиля гарантированную прибыль c_{20} = 7 ден. ед. В этом случае автосалон A не сможет реализовать свои автомобили при соответствующих ценах на продаваемые автомобили конкурирующего автосалона.

Найдем решение в смешанных стратегиях. Снова спариваем матрицы прибыли A и B: $\begin{pmatrix} (\widetilde{20};0) & (0;7) & (0;\widetilde{18}) \\ (10;0) & (0;7) & (10;0) \end{pmatrix}$, и в декартовой системе координат, оси которой – прибыли соответствующих фирм c_1 и c_2, отмечаем точки, определяемые элементами полученной спаренной матрицей прибылей. Строим границы области допустимых решений для значений c_1 и c_2. Для этого соединяем точки, координаты которых задаются элементами спаренной матрицы, формируя выпуклое множество допустимых значений c_1 и c_2. В результате получаем, что такой областью в случае четких чисел будет множество решений, ограниченное сторонами четырехугольника $PTLQ$, и множеством Парето-оптимальных решений является отрезок PQ.

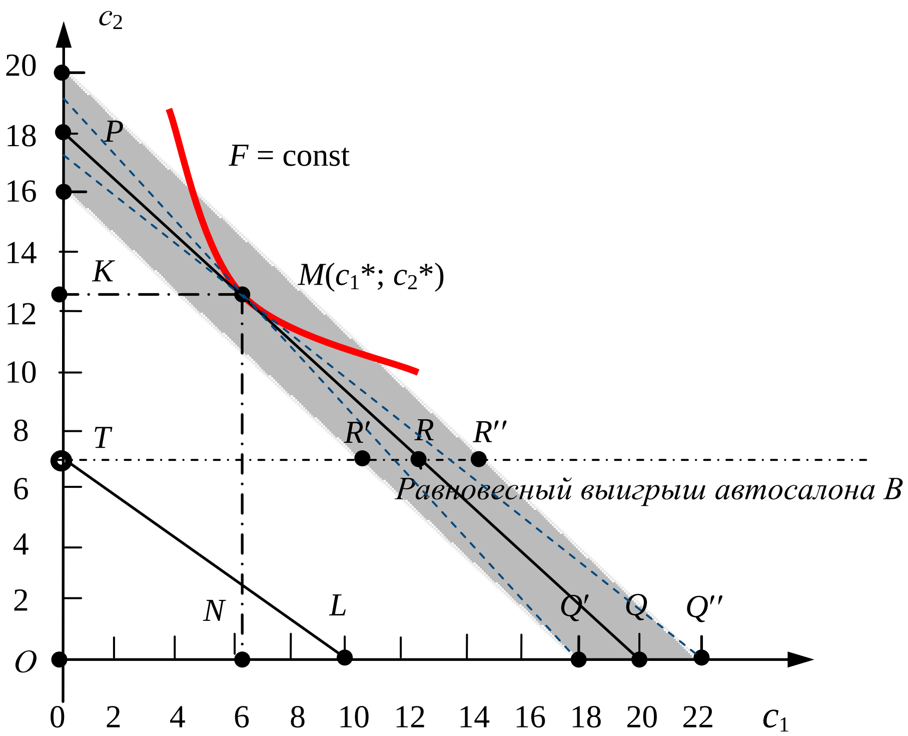

Рис. 2. Область Парето-оптимальных решений нечеткой кооперативной игры

Однако с учетом нечетких значений точек $P(0;\ \widetilde{18})$ и $Q(\widetilde{20};\ 0)$, соответствующих совместным стратегиям (a_1; b_3) и (a_1; b_1), получаем, что множество Парето-оптимальных решений образует полосу $P'P''Q''Q'$. Точкой угрозы является точка $T(c_{10};\ c_{20}) = T(0;\ 7)$. Переговорным множеством для нахождения коалиционного решения является полоса $P'P''R''R'$.

Находим множество точек Нэша в полосе $P'P''R''R'$, в которых достигается нечеткий максимум произведения прибылей автосалонов относительно выигрышей c_{10} и c_{20}, получаемых ими без кооперации, т.е. из условия $F = (c_1 - c_{10})\cdot(c_2 - c_{20}) = c_1\cdot(c_2 - 7) \to \max$. Т.о., рассматриваемая задача сводится к задаче математического программирования исследования операций (Самарин, 2011; Samarin, 2014; Samarin, 2016; Makarova et al., 2016).

Линией уровня целевой функции F является гипербола $c_1\cdot(c_2 - 7) = C$, C – где константа. При увеличении константы C целевая функция возрастает, при этом вершина гиперболы, имеющей асимптоты $c_1 = 0$ и $c_2 = 7$, будет перемещаться вдоль биссектрисы прямого угла между этими асимптотами. Найдем множество возможных максимальных значений C, которое будет определяться точками касания $M(c_1^*;\ c_2^*)$ линии уровня с множеством прямых в полосе $P'P''Q''Q'$. Уравнение этих прямых в отрезках имеет вид $c_1/\widetilde{20} + c_2/\widetilde{18} = 1$.

Однако при решении данной задачи сведением системы $\begin{cases} c_1\cdot(c_2-7)=C; \\ c_1/\widetilde{20}+c_2/\widetilde{18}=1 \end{cases}$ методом подстановки к квадратному уравнению, например, относительно c_1, принимающему вид $\tilde{a}c_1^2 - \tilde{b}c_1 + C = 0$, и нахождение значения C из требования равенства дискриминанта этого уравнения нулю по формулам корней, приведенным в табл. 1, неприемлемо. Это следует из того, что при соответствующих знаках параметров уравнения $(\tilde{a}>0,\ -\tilde{b}<0,\ C>0)$ согласно этим формулам $C = \dfrac{a''\cdot(b')^2}{4\cdot(a')^2}$, т.е. C определяется равенством, правая часть которого включает и правую и левую границу нечеткого коэффициента $\tilde{a} = \{a'; a''\}$ одновременно. Тогда как при заданном значении C для каждой точки получаемой гиперболы возможна единственная касательная. Причем множество соответствующих точек этой гиперболы ограничено семейством касательных, каждая из которых однозначно определяется двумя точками, одна из которых находится в пределах отрезка $Q'Q''$, а вторая – в пределах отрезка $P'P''$. Значение функции принадлежности каждой касательной семейства определяется меньшим значением функций реализации соответствующих точек на отрезках $Q'Q''$ и $P'P''$, которые эта касательная соединяет.

Поэтому решим задачу следующим образом. Сначала найдем минимальное и максимальное значения C и соответствующие значения $(c_1^*;\ c_2^*)$, определяемые точками касания гиперболы $c_1\cdot(c_2 - 7) = C$ с граничными прямыми $P'Q'$ и $P''Q''$ полосы Парето-оптимальных решений. Решаем системы четких уравнений $\begin{cases} c_1\cdot(c_2-7)=C; \\ c_1/18+c_2/16=1 \end{cases}$ и $\begin{cases} c_1\cdot(c_2-7)=C; \\ c_1/22+c_2/20=1 \end{cases}$ сведением каждой системы к квадратному уравнению, и приравниванием соответствующие дискриминанты нулю. Получаем $C' = 22{,}78$ (при этом $c_1^* = 5{,}06$; $c_2^* = 11{,}5$) и $C'' = 46{,}48$ (при этом $c_1^* = 7{,}15$; $c_2^* = 13{,}5$). Теперь для каждого значения C в пределах (22,78; 46,48) находим по две предельные касательные к гиперболе (на рис. 2 – штриховые линии), используя два равенства из следующих четырех, составленных с учетом уравнения касательной к гиперболе $c_1\cdot(c_2 - 7) = C$: $c_2^* = C/c_1^* + 7 = -\dfrac{C}{(c_1^*)^2}\cdot(c_1^* - Q')$; $c_2^* = C/c_1^* + 7 = -\dfrac{C}{(c_1^*)^2}(c_1^* - Q'')$; $c_2^* = C/c_1^* + 7 = -\dfrac{C}{(c_1^*)^2}\cdot c_1^* + P'$; $c_2^* = C/c_1^* + 7 = -\dfrac{C}{(c_1^*)^2}\cdot c_1^* + P''$. Выбор двух равенств осуществляется в зависимости от того через какую из точек проходит соответствующая касательная $(Q'; 0)$, $(Q''; 0)$, $(0; P')$ или $(0; P'')$ так, чтобы вторая конечная точка этой касательной оказалась в интервале $[P';\ P'']$ или $[Q';\ Q'']$

соответственно. Выполненные расчеты сведены в таблице 2:

Таблица 2.

C	Задаваемая конечная точка на касательной	Конечная точка на касательной на другой координатной оси	c_1*	c_2*
22,78	(18; 0)	(0; 16)	5,06	11,5
25	(18; 0)	(0; 16,6)	5,2	11,8
	(0; 16)	(19,75; 0)	5,56	11,5
29	(18; 0)	(0; 17,67)	5,43	12,34
	(22; 0)	(0; 16,26)	6,26	11,63
31	(18; 0)	(0; 18,2)	5,54	12,6
	(22; 0)	(0; 16,7)	6,39	11,85
33	(18; 0)	(0; 18,73)	5,63	12,86
	(22; 0)	(0; 17,14)	6,51	12,07
35	(18; 0)	(0; 19,22)	5,72	13,11
	(22; 0)	(0; 17,58)	6,62	12,29
36	(18; 0)	(0; 19,48)	5,77	13,24
	(22; 0)	(0; 17,8)	6,67	12,4
37	(18; 0)	(0; 19,74)	5,81	13,37
	(22; 0)	(0; 18)	6,72	12,5
40	(0; 20)	(18,93; 0)	6,15	13,5
	(22; 0)	(0; 18,64)	6,87	12,82
43	(0; 20)	(20,36; 0)	6,62	13,5
	(22; 0)	(0; 19,27)	7	13,14
46,48	(22; 0)	(0; 20)	7,15	13,5

По несущим множествам нечетких значений $M(c_1^*;\ c_2^*)$ для каждого значения C строим область нечетких прибылей автосалонов при решении задачи в смешанных стратегиях.

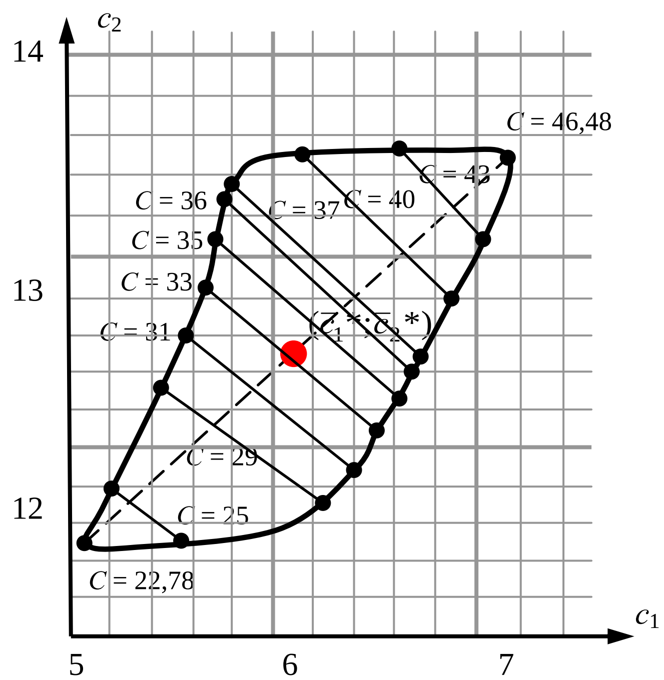

Рис. 3. Область нечетких значений прибылей автосалонов при решении задачи в смешанных стратегиях

Как следует из рис. 3 граница области нечетких значений прибылей автосалонов напоминает петлю гистерезиса. При этом c_1' = 5,06; c_1'' = 7,15; c_2' = 11,5; c_2'' = 13,5. Некоторая несимметричность границы обусловлена увеличением радиуса кривизны в каждой точке гиперболы с ростом значения C, что приводит к расширению диапазона множества касательных к соответствующим гиперболам (так, в вершине гиперболы $y = C/x$ радиус кривизны R равен $\sqrt{2C}$). С учетом ограниченного числа автомобилей, приобретаемых автопарком, и конкретных цен на них прибыли автосалонов будут иметь дискретные значения в приведенной на рис. 3 области.

Полагая треугольной форму функции принадлежности нечеткой прибыли каждого автосалона, определим средние значения этих прибылей.

Среднее значение нечеткого числа $x = (x_0;\ \alpha;\ \beta) = \{x';\ x''\}$ (R-L)-типа с треугольным видом функции принадлежности $\mu_\Delta(x)$, где Δ – носитель нечеткого числа x, вычисляется по формуле: $\bar{x} = \dfrac{\int\limits_{x\in\Delta} \mu_\Delta(x)\cdot x dx}{\int\limits_{x\in\Delta} \mu_\Delta(x) dx}$. Эта формула – аналог определения центра масс тонкого стержня с переменной линейной плотностью $\mu_\Delta(x)$ по его длине. Без операции интегрирования $\bar{x}$ можно определить как x-координату центра масс однородного треугольника, высота которого, опущенная из вершины на основание, расположенное на оси x, определяет на оси x модальное значение x_0 и делит это основание на отрезки длиной α и β (центр масс однородного треугольника совпадает с точкой пересечения медиан, которые делятся этой точкой в отношении 2:1, считая от соответствующей вершины треугольника). В случае $\beta > \alpha$ значение $\bar{x} = x_0 + \frac{1}{3}\cdot(\beta - \alpha) = \frac{1}{3}\cdot(x_0 + x' + x'')$. Пренебрегая некоторой асимметрией области нечетких значений искомых прибылей, можно считать, что $\bar{c}_1{}^* \approx (c_1' + c_1'')/2 \approx 6{,}1$; $\bar{c}_2{}^* \approx (c_2' + c_2'')/2 \approx 12{,}5$.

Т.о., в условиях кооперации получены оптимизированные нечеткие прибыли: первого автосалона $c_1 = \{5{,}06;\ 7{,}15\}$ и второго автосалона $c_2 = \{11{,}5;\ 13{,}5\}$. Причем, следует отметить, что конкретные прибыли, которые в указанных диапазонах получат автосалоны, уже взаимно независимы, хотя и имеют значения в области Парето-оптимальных решений. Эти прибыли будут определяться конкретными значениями нечетких цен реализации автосалонами соответствующих автомобилей.

Согласно приведенным нечетким прибылям точка Нэша, соответствующая их минимальным значениям, имеет координаты $M'(5{,}06;\ 11{,}5)$ и находится на отрезке $P'Q'$ нечеткой области Парето-оптимальных решений. Проекцию точки M' на ось c_2 (см. рис. 2) обозначим точкой K'. Это означает, что совместные стратегии фирм $(a_1;\ b_1)$ и $(a_1;\ b_3)$ в случае минимальных цен на реализуемые автомобили выбираются в пропорции $u_1{:}u_2 = \frac{P'M'}{P'Q'} : \frac{M'Q'}{P'Q'} = \frac{P'K'}{P'O} : \frac{K'O}{P'O}$. Т.е. при покупке автопарком 20-ти автомобилей автосалоном B должны быть выставлены на продажу $\frac{M'Q'}{P'Q'}\cdot 20 = \frac{K'O}{P'O}\cdot 20 = \frac{11{,}5}{16}\cdot 20 \approx 14$ автомобилей с пробегом импортного производства, а остальные – новые автомобили импортной марки отечественного производства. При этом условии автосалон A сможет продать $\frac{M'P'}{P'Q'}\cdot 20 = \frac{P'K'}{P'O}\cdot 20 = \frac{16 - 11{,}5}{16}\cdot 20 \approx 6$ новых автомобилей импортного производства по не сниженной цене. В таком случае автосалон B получит $14\cdot 16 = 224$ ден. ед. прибыли (тогда как при стратегии b_2 прибыль этого автосалона при продаже 20 автомобилей отечественной марки окажется в размере только 20·7 = 140 ден. ед.), а прибыль автосалона A составит 6·18 = 108 ден. ед. (тогда как при стратегии b_2 автосалона B прибыль автосалона A была бы нулевой).

Аналогично, точка Нэша, соответствующая максимальным значениям прибыли автосалонов, имеет координаты $M''(7{,}15;\ 13{,}5)$ и находится на отрезке $P''Q''$ нечеткой области Парето-оптимальных решений. Проекцию точки M'' на ось c_2 (см. рис. 2) обозначим точкой K''. Это означает, что совместные стратегии фирм (a_1; b_1) и (a_1; b_3) в случае максимальных цен на реализуемые автомобили выбираются в пропорции $u_1{:}u_2 = \frac{P''M''}{P''Q''} : \frac{M''Q''}{P''Q''} = \frac{P''K''}{P''O} : \frac{K''O}{P''O}$. Т.е. при покупке автопарком 20-ти автомобилей автосалоном B должны быть выставлены на продажу $\frac{M''Q''}{P''Q''} \cdot 20 = \frac{K''O}{P''O} \cdot 20 = \frac{13{,}5}{20} \cdot 20 \approx 14$ автомобилей с пробегом импортного производства, а остальные – новые автомобили импортной марки отечественного производства. При этом условии автосалон A сможет продать $\frac{M''P''}{P''Q''} \cdot 20 = \frac{P''K''}{P''O} \cdot 20 = \frac{20 - 13{,}5}{20} \cdot 20 \approx 6$ новых автомобилей импортного производства по не сниженной цене. В таком случае автосалон B получит 14·20 = 280 ден. ед. прибыли, а прибыль автосалона A составит 6·22 = 132 ден. ед.

Т.о., в условиях кооперации нечеткие прибыли составят: у автосалона A {108; 132} ден. ед., а у автосалона B – {224; 280} ден. ед.

3. Выводы

Таким образом, при решении квадратного уравнения с нечеткими параметрами необходимо учитывать взаимодействие корней этого уравнения, обусловленное их связью согласно формулам теоремы Виета. Этот фактор определяет фактическую несущую область значений нечетких корней квадратного уравнения с нечеткими параметрами. Однако условия конкретных прикладных задач может дополнительно уменьшить носители нечетких корней уравнения. Так, показано, что требование равенства нулю дискриминанта квадратного уравнения с нечеткими параметрами приводит к необходимости специальных исследований в соответствии с постановкой решаемой задачи.

4. Заключение

Выявлены некоторые особенности построения несущей области значений нечетких корней квадратного уравнения с нечеткими параметрами.

На примере решения нечеткой кооперативной игры предложен метод нахождения корней квадратного уравнения с нечеткими параметрами для случая нулевого дискриминанта. Показано, что нечеткие прибыли конкурирующих предприятий в нечеткой области Парето-оптимальных решений могут оказаться взаимно независимыми.

Полученные результаты могут быть использованы в качестве дидактических материалов таких дисциплин высшего образования, как «Мягкие вычисления», «Институциональная экономика» и «Исследование операций» (Samarin, 2011; Gorlova, Samarin, 2011; Samarin, 2015; Самарина, Самарин, 2003a), что будет содействовать формированию компетенций в построении адекватных исследуемым задачам математических моделей и их оптимизации с целью корректной обработки информации и принятия оптимальных решений при наличии определенных ситуационных условий и ограничений (Samarin, 2012; Самарина, Самарин, 2003b; Самарин, 2015).

Литература

Gorlova, Samarin, 2011 – *Gorlova O.Yu., Samarin V.I.* (2011). Algorithm of Probability Problems Solution in Bernoulli Scheme Conditions as a Block Model // *European researcher*. № 5-1 (7). pp. 493-495.

Заде, 1976 – *Заде Л.* (1976). Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. Москва: Мир. 165 с.

Зайченко, 1991 – *Зайченко Ю.П.* (1991). Исследование операций. Нечеткая оптимизация. Учебное пособие. Киев: Выща школа. 191 с.

Ибрагимов, 2010 – *Ибрагимов В.А.* (2010). Элементы нечеткой математики. Баку: АГНА. 394 с.

Макарова и др., 2014 – *Макарова И.Л., Самарин В.И., Симонян А.Р., Улитина Е.И., Якунина Н.Ф.* (2014). Специальные методы исследования операций в условиях нечетких данных. Учебное пособие. Сочи: РИЦ ФГБОУ ВПО «СГУ». 70 с.

Makarova et al., 2016 – *Makarova I.L., Samarin V.I., Yakunina N.F.* (2016). Clutch-Effect of Fuzzy Variable // *Russian Journal of Mathematical Research*. Series A, Vol.(3), Is. 1. pp. 15-22.

Макарова, Самарин, 2015 – *Макарова И.Л., Самарин В.И.* (2015). Введение в теорию нечетких множеств: Практикум. Учебно-практическое пособие. Сочи: РИЦ ФГБОУ ВПО «СГУ». 116 с.

Макарова и др., 2016 – Исследование операций: метод. указания по выполнению расчетно-графических работ. Сост.: Макарова И.Л., Самарин В.И., Игнатенко А.М. Сочи: РИЦ ФГБОУ ВО «СГУ», 2016, 100 с.

Samarin, 2011 – *Samarin V.I.* (2011). Practice Curriculum Analysis-Project of Resources Optimum Using into Linear Programming Production Planning // *European researcher*. № 5-1 (7). pp. 520-526.

Samarin, 2012 – *Samarin V.I.* (2012). Results of Study of Mathematics by Students as a Competency's Matter // *European researcher*. № 5-1 (20). pp. 468-471.

Samarin, 2014 – *Samarin V.I.* (2014). Composite Principal-Dual Simplex Method for Linear Programming Solving // *Modeling of Artificial Intelligence*. Vol. (3), № 3. P. 126-132.

Samarin, 2015 – *Samarin V.I.* (2015). Fuzzy Combinatorics // *Russian Journal of Mathematical Research. Series A,* Vol.(2). Is. 2. pp. 45-57.

Самарин, 2015 – *Самарин В.И.* (2015). Компетенции бакалавра и специалиста как задел для компетентности в профессиональной деятельности // *Вопросы гуманитарных наук*. № 1 (76). С. 82-87.

Samarin, 2016 – *Samarin V.I.* (2016). Linear Programming in a Closed Loop Queuing System // *Russian Journal of Mathematical Research. Series A,* Vol.(4), Is. 2. P. 56-63.

Самарина, Самарин, 2003a – *Самарина Е.А., Самарин В.И.* (2003). Модульно-тематическая информационная технология в профессиональном образовании // *Информатика и образование*. № 12. С. 79-85.

Самарина, Самарин, 2003b – *Самарина Е.А., Самарин В.И.* (2003). Модель специалиста как определяющий фактор содержательной и технологической составляющих профессионального образования // *Вопросы гуманитарных наук*. №1 (4). С. 312-323.

Dubois, Prade, 1980 – *Dubois D., Prade H.* (1980). New results about properties and semantics of fuzzy-set-theoretic operators. Fuzzy Sets: Theory and Applications to Policy Analysis and Information Systems. Ed. by Wang P.P. and Chang S.K. N.Y.: Plenum Publ. pp. 59-75.

Yager, 1977 – *Yager R.R.* (1977). Fuzzy equation. *Proc. of EEE Int. Conf. Decision and Control*. pp. 596-600.

References

Gorlova, Samarin, 2011 – *Gorlova O.Yu., Samarin V.I.* (2011). Algorithm of Probability Problems Solution in Bernoulli Scheme Conditions as a Block Model. *European researcher*. № 5-1 (7). pp. 493-495.

Ibragimov, 2010 – *Ibragimov V.A.* (2010). Elementy nechetkoi matematiki [Elements of fuzzy mathematics]. Baku: AGNA. 394 p. [in Russian]

Makarova et al., 2016 – *Makarova I.L., Samarin V.I., Yakunina N.F.* (2016). Clutch-Effect of Fuzzy Variable. *Russian Journal of Mathematical Research. Series A*, Vol.(3), Is. 1. pp. 15-22. [in Russian]

Makarova i dr., 2014 – *Makarova I.L., Samarin V.I., Simonyan A.R., Ulitina E.I., Yakunina N.F.* (2014). Spetsial'nye metody issledovaniya operatsii v usloviyakh nechetkikh dannykh [Special methods of investigating operations in fuzzy data]. Uchebnoe posobie. Sochi: RITs FGBOU VPO «SGU». 70 p. [in Russian]

Makarova i dr., 2016 – Issledovanie operatsii: metod. ukazaniya po vypolneniyu raschetno-graficheskikh rabot [Investigation of operations: method. instructions for computational and graphic work]. Sost.: Makarova I.L., Samarin V.I., Ignatenko A.M. Sochi: RITs FGBOU VO «SGU», 2016, 100 p. [in Russian]

Makarova, Samarin, 2015 – *Makarova I.L., Samarin V.I.* (2015). Vvedenie v teoriyu nechetkikh mnozhestv [Introduction to the theory of fuzzy sets]: Praktikum. Uchebno-prakticheskoe posobie. Sochi: RITs FGBOU VPO «SGU». 116 p. [in Russian]

Samarin, 2011 – *Samarin V.I.* (2011). Practice Curriculum Analysis-Project of Resources Optimum Using into Linear Programming Production Planning. *European researcher*. № 5-1 (7). pp. 520-526.

Samarin, 2012 – *Samarin V.I.* (2012). Results of Study of Mathematics by Students as a Competency's Matter. *European researcher*. № 5-1 (20). pp. 468-471.

Samarin, 2014 – *Samarin V.I.* (2014). Composite Principal-Dual Simplex Method for Linear Programming Solving. *Modeling of Artificial Intelligence*. Vol. (3), № 3. pp. 126-132.

Samarin, 2015 – *Samarin V.I.* (2015). Fuzzy Combinatorics. *Russian Journal of Mathematical Research. Series A,* Vol.(2). Is. 2. pp. 45-57.

Samarin, 2015 – *Samarin V.I.* (2015). Kompetentsii bakalavra i spetsialista kak zadel dlya kompetentnosti v professional'noi deyatel'nosti [Bachelor's and specialist's competences as a reserve for competence in professional work]. *Voprosy gumanitarnykh nauk*. № 1 (76). pp. 82-87. [in Russian]

Samarin, 2016 – *Samarin V.I.* (2016). Linear Programming in a Closed Loop Queuing System. *Russian Journal of Mathematical Research. Series A,* Vol.(4), Is. 2. pp. 56-63. [in Russian]

Samarina, Samarin, 2003a – *Samarina E.A., Samarin V.I.* (2003). Modul'no-tematicheskaya informatsionnaya tekhnologiya v professional'nom obrazovanii [Modular-thematic information technology in vocational education]. *Informatika i obrazovanie*. № 12. pp. 79-85. [in Russian]

Samarina, Samarin, 2003b – *Samarina E.A., Samarin V.I.* (2003). Model' spetsialista kak opredelyayushchii faktor soderzhatel'noi i tekhnologicheskoi sostavlyayushchikh professional'nogo obrazovaniya [Model specialist as the determining factor of the content and technological components of vocational education]. *Voprosy gumanitarnykh nauk*. №1 (4). pp. 312-323. [in Russian]

Zade, 1976 – *Zade L.* (1976). Ponyatie lingvisticheskoi peremennoi i ego primenenie k prinyatiyu priblizhennykh reshenii [The concept of a linguistic variable and its application to the adoption of approximate solutions]. Moskva: Mir. 165 s. [in Russian]

Zaichenko, 1991 – *Zaichenko Yu.P.* (1991). Issledovanie operatsii. Nechetkaya optimizatsiya [Operations research. Fuzzy optimization]. Uchebnoe posobie. Kiev: Vyshcha shkola. 191 p. [in Russian]

Dubois, Prade, 1980 – *Dubois D., Prade H.* (1980). New results about properties and semantics of fuzzy-set-theoretic operators. Fuzzy Sets: Theory and Applications to Policy Analysis and Information Systems. Ed. by Wang P.P. and Chang S.K. N.Y.: Plenum Publ. pp. 59-75.

Yager, 1977 – *Yager R.R.* (1977). Fuzzy equation. *Proc. of EEE Int. Conf. Decision and Control*. pp. 596-600.

Анализ нечеткого квадратного уравнения с действительными корнями

Виктор Иванович Самарин [a, *], Ирина Леонидовна Макарова [a],
Наталья Федоровна Якунина [a]

[a] Сочинский государственный университет, Российская Федерация

Аннотация. Проведен анализ области допустимых значений действительных корней квадратного уравнения с нечеткими параметрами с учетом требований выполнения формул теоремы Виета. Приведены формулы граничных значений нечетких действительных корней квадратного уравнения. На примере решения нечеткой кооперативной игры предложен метод нахождения корней квадратного уравнения с нулевым дискриминантом.

Ключевые слова: нечеткое число, нечеткое квадратное уравнение, взаимодействующие нечеткие корни уравнения, нечеткая кооперативная игра, задача математического программирования, целевая функция, седловая точка, нечеткая область Парето-оптимальных решений.

[*] Корреспондирующий автор
Адреса электронной почты: visamarin@mail.ru (В.И. Самарин), ratton@mail.ru (И.Л. Макарова), elena-555-49@mail.ru (Н.Ф. Якунина)