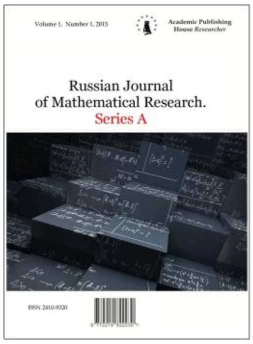

Published in the Slovak Republic
Russian Journal of Mathematical Research. Series A
Has been issued since 2015.
ISSN: 2410-9320
E-ISSN: 2413-7529
2017, 3(1): 10-14

DOI: 10.13187/rjmr.a.2017.1.10
www.ejournal30.com

On Optimality Conditions for the Second-Order

R.A. Khachatryan [a, *]

[a] Yerevan State University, Armenia

Abstract

The cones of the tangent directions of the second-opder for sets defined with constraints of equality type are constructed. They may not be twice differentiable.

There are obtained the second-order conditions.

Keywords: tangent vector, cone, strict differentiability.

1. Введение

В статье (Левитин и др., 1978) введено понятие касательного вектора второго порядка к множествам. Затем В.В. Гороховиком в статьях (Гороховик, 1990; Гороховик, 2006a; Гороховик, 2006b) введено понятие касательного конуса второго порядка и применено для вывода условий оптимальности второго порядка в задачах оптимизации. В этих работах обобщены известные классические условия оптимальности (см. Левитин и др., 1978; Сухарев и др., 1986). А в работе (Bonans, Shapiro, 2000) описаны эти конусы для множества вида $M \equiv \{x / g(x) \le 0\}$, где g выпуклая функция и рассмотрены условия оптимальности в общей задаче математического программирования с ограничениями типа равенств и неравенств. Во всех этих условиях предполагаются, что функции, участвующие в задачах оптимизации строго дифференцируемы.

В этой статье построены векторы касательных направлений второго порядка к множествам, задаваемых (вообще говоря) не строго дифференцируемыми функциями. Они могут и не быть дважды дифференцируемым. Получено необходимое условие экстремума второго порядка для таких функций.

2. Метод исследования

В статье применены методы выпуклого и негладкого анализа при построении касательных векторов. Ключевую роль здесь играет теорема Брауера о неподвижной точке.

В дальнейшем $< x, y >$ – скалярное произведение векторов $x, y \in R^n$.

A^* – транспанированная матрица к матрицу A.

Пусть для функций $f_i : R^n \to R^1$, $i = 1,2,...,k$ имеют место представление

$$f_i(x_0 + h) = f_i(x_0) + < f_i'(x_0), h > + 1/2 < A_i(x_0)h, h > + r_i(h),$$

где $r_i(h) = o(\| h \|^2)$, $A_i(x_0)(n \times n)$-симметричные матрицы.

* Corresponding author
E-mail addresses: Khachatryan.rafik@gmail.com (R.A. Khachatryan)

Положим

$$F(x) = (f_1(x),..., f_k(x)),\ \mathbf{A}(x_0)[h,h] \equiv (< A_1(x_0)h, h >,...,< A_k(x_0)h, h >),$$

$$M = \{x / F(x) = 0\},\ K_M(x_0, \bar{h}) = \{\bar{z} / F'(x_0)\bar{z} + A(x_0)[\bar{h}, \bar{h}] = 0\}.$$

Вектор $\bar{z} \in K_M(x_0, \bar{h})$ называется касательным вектором второго порядка к множеству M в точке x_0 по направлению $\bar{h} \in KerF'(x_0)$.

3. Результаты

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть

a) *градиенты* $f_i'(x_0)$, $i = 1,2,...,k$ *линейно независимы в точке* $x_0 \in M$,

b) *отображение* $r(h) = (r_1(h),..., r_k(h))$ *непрерывно в окрестности нуля,*

c) $\bar{h} \in KerF'(x_0)$, $\bar{z} \in K_M(x_0, \bar{h})$.

Тогда существует отображение $o(\alpha^2)$ *такое, что*

$$F\left(x_0 + \alpha\bar{h} + \frac{\alpha^2}{2}\bar{z} + o(\alpha^2)\right) = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение:

$$Q(\alpha, h) = F\left(x_0 + \alpha\bar{h} + \frac{\alpha^2}{2}\bar{z} + (F'(x_0))^* h\right) = 0$$

Покажем, что это уравнение имеет решение: $h(\alpha) = o(\alpha^2)$. Имеем

$$Q(\alpha, h) = F\left(x_0 + \alpha\bar{h} + \frac{\alpha^2}{2}\bar{z} + (F'(x_0))^* h\right) =$$

$$= F(x_0) + \alpha F'(x_0)\bar{h} + F'(x_0)(F'(x_0))^* h + \frac{\alpha^2}{2}(F'(x_0))\bar{z} +$$

$$+ \mathbf{A}(x_0)[h,h] + r(\sqrt{\alpha^4 + \| h \|^2}) =$$

$$= F'(x_0)(F'(x_0))^* h + r(\sqrt{\alpha^4 + \| h \|^2}).$$

Положим

$$B = F'(x_0)(F'(x_0))^*.$$

Из условий теоремы следует, что матрица B имеет обратную. Покажем, что отображение

$$\phi(\alpha, h) = h - B^{-1}Q(\alpha, h)$$

имеет неподвижную точку. Имеем

$$\| \phi(\alpha, h) \| = \| -B^{-1}Q(\alpha, h) \| \le C\bar{r}(\sqrt{\alpha^4 + \| h \|^2}),$$

где

$$\bar{r}(\lambda) = \sup\{\| r(z) \|, \| z \| \le \lambda\}.$$

Конечно функция $\bar{r}(\lambda)$ неубывающая и $\bar{r}(\lambda) = o(\lambda)$. Положим

$$\tau(\alpha) = \inf\{\tau > 0 : \bar{r}(\sqrt{\alpha^4 + \tau^2}) \le \tau\}.$$

Отсюда следует, что для достаточно малых α имеет место неравенство:

$$\tau(\alpha) \le \alpha^2.$$

По определению $\tau(\alpha)$ существует $\tau^*(\alpha)$ такое, что

$$\tau(\alpha)\le\tau^*(\alpha)\le\tau(\alpha)+\alpha^4,\ \bar r(\sqrt{\alpha^4+(\tau^*(\alpha)^2})\le\tau^*(\alpha).$$

Покажем, что

$$\frac{\tau^*(\alpha)}{\alpha^2}\to 0 \quad \text{при} \quad \alpha\to 0.$$

Так как $\bar r(t)$ не убывает, то из неравенства $\sqrt{\gamma^2+\beta^2}\le\gamma+\beta$, $\gamma>0$, $\beta>0$ получаем

$$\tau(\alpha)-\alpha^4\le\bar r(\sqrt{\alpha^4+((\tau(\alpha)-\alpha^4)^2}\le\bar r(\alpha^2+|\tau(\alpha)-\alpha^4|)\le\bar r(3\alpha^2).$$

Поэтому

$$\frac{\tau^*(\alpha)}{\alpha^2}\to 0 \quad \text{при} \quad \alpha\to 0.$$

Следовательно, если $\| h\|\le\tau^*(\alpha)$, то

$$\|\phi(\alpha,h)\|\le\tau^*(\alpha).$$

Таким образом, непрерывное отображение $\phi(\bar x,\cdot)$ отображает шар $\| h\|\le\tau^*(\alpha)$ в себя. Используя теорему Брауера, получаем, что отображение $\phi(\alpha,\cdot)$ имеет неподвижную точку в этом шаре, т.е. существует отображение $h(\alpha)$ такое, что

$$\phi(\alpha,h(\alpha))\le\tau^*(\alpha) \quad \text{и} \quad \| h(\alpha)\|\le\tau^*(\alpha).$$

Следовательно, h(a)

$$\frac{h(\alpha)}{\alpha^2}\to 0 \quad \text{при} \quad \alpha\to 0.$$

Таким образом,

$$Q(\alpha,h(\alpha))=0. \ \blacksquare$$

Следствие. *При условиях теоремы 1 функции* f_i, $i=1,2,...,k$, *вообще говоря, не являются дважды дифференцируемыми.*

Пусть

$$f(h_1,h_2)=h_1^3\sin\frac{1}{h_1^2}+h_1^2+h_2^2,\ f(0,h_2)=0.,$$

Эта функция дважды не дифференцируема в нуле, но имеет место представление

$$f(h_1,h_2)=f(0,0)+<f'(0),h>+1/2<Ah,h>+o(\| h\|^2),$$

где

$$A=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}.$$

Рассмотрим задачу минимизации

$$f_0(x)\to\min,\ f_i(x)=0,\ i=1,2,...,k,\ x\in R^n$$

Теорема 2. (Необходмое условие второго порядка).

Пусть относительно функций f_i, $i=0,1,...,k$ *выполнены все предположения теоремы* 1, *причем* x_0 *-решение вышеуказанной задачи. Тогда существуют числа* $y_0^*=1$, $y_1^*,...,y_k^*$ *такие, что*

$$\sum_{i=0}^{k}y_i^*<A_i(x_0)h,h>\ge 0,\quad \forall h\in Ker F'(x_0)$$

Доказательство. Положим

$$x(\alpha) = x_0 + \alpha\bar{h} + \frac{\alpha^2}{2}\bar{z} + o(\alpha^2).$$

Имеем

$$f_0(x(\alpha)) = f_0(x_0) + \alpha < f_0'(x_0), \bar{h} > + \frac{\alpha^2}{2} < f_0'(x_0), \bar{z} > + < A_0(x_0)\bar{h}, \bar{h} > + o(\alpha^2).$$

Поскольку точка x_0 – локального минимума функции f_0 на множестве M, то отсюда следует, что

$$< f_0'(x_0), \bar{h} > = 0, \ (f_0'(x_0), \bar{z}) + (A_0(x_0)\bar{h}, \bar{h}) \geq 0,$$

$$\forall h \in Ker F'(x_0), \quad F'(x_0)\bar{z} + \mathbf{A}(x_0)[\bar{h}, \bar{h}] = 0.$$

Отсюда, (0,0) -точка минимума функции

$$g(\bar{z}, \bar{h}) \equiv < f_0'(x_0), \bar{z} > + < A_0(x_0)\bar{h}, \bar{h} >$$

при ограничениях

$$\forall \bar{h} \in Ker F'(x_0), \quad F'(x_0)\bar{z} + \mathbf{A}(x_0)[\bar{h}, \bar{h}] = 0.$$

Отсюда u из классической теоремы 2.7 (Сухарев и др., 1986: 143), получим утверждение нашей теоремы.

4. Обсуждение результатов

Итак, основным результатом статьи является теорема 1, где построены касательные векторы второго порядка, при ослабленных условиях гладкости.

5. Заключение

Результаты этой статьи могут быть применены в необходимых условиях экстремума в негладких задачах математического программирования.

Литература

Гороховик, 1990 – *Гороховик В.В.* Выпуклые и негладкие задачи векторной оптимизации, Минск, Наука и техника, 1990, 239 с.

Гороховик, 2006a – *Гороховик В.В.* Асимтотически касательный конус второго порядка к множествам и условия оптимальности в задачах оптимизации с ограничениями // Вестник СПбГУ, 2006, серия 10, вып. 1, С. 34-42.

Гороховик, 2006b – *Гороховик В.В.* Касательные конусы второго порядка к множествам у условия минимальности для точек подмножеств упорядоченных нормированных пространств // Труды института математики НАН Беларуси, 2006, т. 14, №2, С. 35-47.

Левитин и др., 1978 – *Левитин Е.С., Милютин А.А., Осмоловский Х.П.* Условия высших порядков в задачах с ограничениями // Успехи мат. наук, 1978, т. 33, вып. 6, С. 85-148.

Сухарев и др., 1986 – *Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.* Курс методов оптимизации, Москва, Наука, 1986, 368 с.

Bonans, Shapiro, 2000 – *Bonans Frederic J., Shapiro A.* Perturbation Analysis of Optimization Problems, Springer, 2000, 601 p.

References

Gorokhovik, 1990 – *Gorokhovik V.V.* (1990). Vypuklye i negladkie zadachi vektornoi optimizatsii, Minsk, Nauka i tekhnika [Convex and nonsmooth vector optimization problems]. 239 p.

Gorokhovik, 2006a – *Gorokhovik V.V.* (2006). Asimtoticheski kasatel'nyi konus vtorogo poryadka k mnozhestvam i usloviya optimal'nosti v zadachakh optimizatsii s ogranicheniyami [Asymptotically tangent cone of second order to sets and optimality conditions in optimization problems with constraints]. *Vestnik SPbGU*, seriya 10, vyp. 1, pp. 34-42.

Gorokhovik, 2006b – *Gorokhovik V.V.* (2006). Kasatel'nye konusy vtorogo poryadka k mnozhestvam u usloviya minimal'nosti dlya tochek podmnozhestv uporyadochennykh normirovannykh prostranstv [Tangent cones of second order to sets for the minimality condition for points of subsets of ordered normed spaces]. *Trudy instituta matematiki NAN Belarusi*, t. 14, №2, pp. 35-47.

Levitin i dr., 1978 – *Levitin E.S., Milyutin A.A., Osmolovskii X.P.* (1978). Usloviya vysshikh poryadkov v zadachakh s ogranicheniyami [Higher-order conditions in problems with constraints]. Uspekhi mat. nauk, t. 33, vyp. 6, pp. 85-148.

Sukharev i dr., 1986 – *Sukharev A.G., Timokhov A.V., Fedorov V.V.* (1986). Kurs metodov optimizatsii [A course of optimization methods]. Moskva, Nauka, 368 p.

Bonans, Shapiro, 2000 – Bonans Frederic J., Shapiro A. Perturbation Analysis of Optimization Problems, Springer, 2000, 601 p.

Об условиях оптимальности второго порядка

Р.А. Хачатрян [a, *]

[a] Ереванский государственный университет, Армения

Аннотация. В этой статье построены векторы касательных направлений второго порядка к множествам, задаваемых (вообще говоря) не строго дифференцируемыми функциями. Они могут и не быть дважды дифференцируемым. Получено необходимое условие экстремума второго порядка для таких функций.

Ключевые слова: касательный вектор, конус, строгая дифференцируемость.

[*] Корреспондирующий автор
Адреса электронной почты: Khachatryan.rafik@gmail.com (Р.А. Хачатрян)