



# Çok etmenli sistemlerde çoklu denge noktalarının sürekli zamanda analizi

## Continuous-time analysis of multi-agent systems with multiple consensus equilibria

Özlem Feyza ERKAN<sup>1\*</sup>, Mehmet AKAR<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Boğaziçi Üniversitesi Mühendislik Fakültesi, Elektrik Elektronik Mühendisliği Bölümü, İstanbul, Türkiye  
feyzavarol@gmail.com, mehmet.akar@boun.edu.tr

Geliş Tarihi/Received: 11.03.2016, Kabul Tarihi/Accepted: 11.08.2016  
\* Yazışılan yazar/Corresponding author

doi: 10.5505/pajes.2016.56323  
Özel Sayı Makalesi/Special Issue Article

### Öz

Bu makalede,  $n$  etmeden oluşan ve etmenler arası iletişimi sabit/değişken olan ağlar için çoklu denge noktaları içeren dağıtık onaylaşım problemi incelenmiştir. Literatürde bulunan klasik onaylaşım problemi genişletilerek, çoklu denge noktaları içeren sürekli zaman onaylaşım algoritması için kuramsal sonuçlar elde edilmiştir. Yönsüz çizgelerle modellenmiş ağlarda algoritmanın çoklu denge noktaları onaylaşımını sağlaması için gerek ve yeter koşullar belirlenmiştir. Algoritmanın yakınsama analizi yapılırken spektral çizge kuramı ve anahtarlamalı sistem kuramı kullanılmıştır. Kuramsal sonuçlar benzetim çalışmaları ile doğrulanmıştır.

**Anahtar kelimeler:** Dağıtık onaylaşım, Değişken ilingeli ağlar, Çizge kuramı, Sürekli zaman

### Abstract

In this paper, we examine the multi-equilibrium consensus problem for a network of  $n$  agents having fixed or time-varying communication links. We introduce necessary and sufficient conditions on networks modeled with undirected graphs such that multi-equilibrium consensus states are achieved, thus extending the classical convergence results in the literature. Spectral graph theory and switched systems theory are used to analyze the continuous-time algorithm. Theoretical results are verified by simulation studies.

**Keywords:** Distributed consensus, Switching topology networks, Graph theory, Continuous-time

## 1 Giriş

Geçtiğimiz yıllarda, çoklu dinamik etmenlerden oluşan sistemlerin dağıtık koordinasyonu üzerine kayda değer sayıda araştırma yapılmış; ve bu sistemlerin dağıtık koordinasyonu onaylaşım, dizilim düzeni oluşturma, en iyileme, ve görev atama gibi değişik alt başlıklarda incelenmiştir. Bir grup etmenin kendi arasında bilgi paylaşarak ortak bir değer üzerinde uzlaştığı onaylaşım algoritmaları bu kapsamda en önemli problemlerden biri haline gelmiştir [1]-[11].

[1]'de yapılan çalışmada çoklu otonom etmenlerden oluşan bir ağ, ilingesi değişen yönsüz çizgelerle modellenmiştir. En yakın komşuluklar prensibi kullanılarak, önerilen ayrık zaman onaylaşım algoritmasının yakınsama özellikleri incelenmiştir. Daha sonra bu çalışma [2] tarafından genişletilmiş ve ilingesi değişen yönlendirilmiş ağlar için sürekli zaman onaylaşım algoritmasının analizi yapılmıştır. Buna göre, ağın ortalama temelli onaylaşımını sağlayabilmesi için ilingenin dengeli ve kuvvetli bağlı olması gerektiği kanıtlanmıştır. [3] ve [4]'te, ayrık zamanda dağıtık onaylaşım problemi çalışılmış olup, ilingesi değişen ve yönlendirilmiş çizgeler kullanılmıştır.

Onaylaşımın ancak ve ancak çizgenin kapsayan ağaç içermesi durumunda gerçekleştiği ispatlanmıştır. [5]'te ise çoklu etmenlerden oluşan sistemlerde asenkron onaylaşımın sağlanması için koşullar belirlenmiştir. Yapılan bir diğer çalışmada, zamanla değişen ve gecikmenin bulunduğu çizgeler üzerinde tanımlanan ortalama tabanlı dağıtık onaylaşım algoritmasının yakınsaması ele alınmıştır [6]. Sınırlandırılmış bir örnek olmayan gecikmenin yakınsama hızını olumsuz etkilemediği analitik olarak gösterilmiştir. Öte yandan, ayrık zamanda onaylaşım problemi, satır olasılıksal matrislerin

çarpımının ergodik olup olmadığı olarak ifade edilebilir. [7],[8]'de rastsal onaylaşım algoritmaları önerilmiş ve algoritmaların yakınsaması için gerekli ilingeli koşulları belirlenmiştir.

Yukarıda atıfta bulunulan kuramsal çalışmaların yanı sıra, onaylaşım algoritmaları insansız hava/deniz/kara araçları, gezgin robot ağları, uydu kümeleri gibi sayısız uygulama alanına sahiptir [9]-[11].

Çok etmenli sistemlerin hatalı ve belirsiz ortamlarda çalışabilmesi, ölçeklenebilir dağıtık onaylaşım algoritmalarının tasarlanmasını ve analizini gerektirir. Bu nedenle, tek denge noktaları onaylaşım problemleri literatürde detaylı bir şekilde incelenmiş ve çeşitli koşullar belirlenmiştir. Buna rağmen, aynı ağda bulunan ve değişik değerler üzerinde uzlaşan etmenlerin incelendiği çoklu denge noktaları onaylaşım algoritmaları sadece son zamanlarda çalışılmaya başlanmıştır [12]-[15].

Çoklu denge noktaları dağıtık onaylaşım algoritmaları üzerine yapılan çalışmaların azlığının yanı sıra, önerilen algoritmalar matematiksel çerçeveden uzak olup, nispeten basitleştirici varsayımlar altında gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmada, yönsüz bir çizgeyle modellenmiş ağı çoklu denge noktaları onaylaşımına ulaşabilmesi için ağ ilingesi üzerindeki gerek ve/veya yeter koşullar incelenmiştir.

Bu makale şu şekilde organize edilmiştir: İkinci bölümde dağıtık onaylaşımın sürekli zaman matematiksel modeli verilmiş ve çoklu denge noktaları onaylaşım problemi tanımlanmıştır. Sonraki bölümde sabit ve değişken ilingeli ağlar için elde edilen kuramsal sonuçlar ve ispatları verilmiştir. Dördüncü bölümde kuramsal sonuçların açıklanabilmesi için benzetim çalışmaları yapılmıştır. Son bölümde ise elde edilen sonuçlardan bahsedilmiştir.

## 2 Çoklu denge noktali dağıtık onaylaşım

Bu kısımda sürekli zaman dağıtık onaylaşım algoritmasının analizinde kullanılacak matematiksel altyapı ve tanımlamalar verilmiştir. Buna ek olarak, sabit ve ilingesi değişen ağlar için çoklu denge noktali dağıtık onaylaşım probleminin tanımı verilmiştir.

### 2.1 Çizge kuramı temelleri

$G=(V, E)$  çizgesi  $n$  etmeden oluşan bir ağı temsil ediyor olsun. Ağda bulunan düğümler  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  kümesi ve düğümler arası haberleşmeyi tanımlayan kenarlar kümesi ise  $E \subseteq V \times V$  ile gösterilir. Ağdaki düğümlerin indisleri sonlu  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  kümesinden değer alır.  $i$  ve  $j$  düğümleri arasındaki iletişim akışını ifade eden kenar  $e_{ij} = (v_j, v_i)$ 'dir ve  $i$  düğümünden  $j$  düğümüne bir ok ile gösterilir.

Eğer  $e_{ij}$  kenarı  $G$  çizgesinin bir elemanı ise  $i$  ve  $j$  düğümleri komşu düğümler olarak adlandırılır. Buna göre,  $i$ . düğümün komşuluk kümesi  $N_i = \{v_j \in V: (v_j, v_i) \in E\}$  olarak gösterilir. Ele alınan çizge, eğer  $i, j \in V: (v_i, v_j) \in E \Leftrightarrow (v_j, v_i) \in E$  ise yönsüzdür. Aksi takdirde, çizge yönlendirilmiştir.

Yönlendirilmiş bir çizgedeki yönlü yol, düğüm sekanslarını bağlayan  $(e_1, e_2), (e_2, e_3), \dots$  sıralı kenar çiftleri ile gösterilir. Yönsüz bir çizge, eğer her bir düğümünden diğer tüm düğümlere giden bir yol bulunuyorsa *bağlıdır* denir. Çevrimsiz ve bağlı bir çizge *ağaç* olarak tanımlanır.  $G$  çizgesindeki bütün düğümleri içeren ağaç ise o çizgenin *kapsayan ağacıdır*. Derecesi 1 olan *kök* düğüm haricindeki düğümler ağacın yapraklarıdır ve en fazla bir ata düğüme sahiptirler.

İlingelerin değişken olduğu durumda, ağ dinamik bir çizge  $\mathcal{G}=(V, E(t))$  ile tanımlanabilir. Çizgelerin *birleşimi* ise  $\{\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_m\} \subset \mathcal{G}'$ 'dir. Bu çizge  $v_i, i \in I$  düğümlerine ve  $\mathcal{G}_j, j = 1, \dots, m$ 'nin kenar kümelerinin birleşimine sahip yönsüz bir çizgedir. Makale boyunca, etmen ve düğüm ifadeleri birbirlerinin yerine kullanılacaktır.

### 2.2 Dağıtık onaylaşım algoritmasının sürekli zaman modeli

Verilen  $G=(V, E)$  ağında,  $x_i(t) \in R, i$ . etmenin durum değişkenini ifade ediyor olsun. Ağdaki etmenler durum değişkenlerini kendilerinden ve komşularından aldığı bilgilere göre günceller. Buna göre her bir etmenin dinamikleri aşağıdaki gibidir:

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t), \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

(1) denkleminde  $x_i(t)$  ve  $u_i(t)$  sırasıyla,  $i$ . etmenin durum ve kontrol değişkenini belirtir.

Literatürde çoğu çalışmada kullanılan sürekli zaman onaylaşım algoritması şöyledir:

$$u_i(t) = \sum_{v_j \in N_i} a_{ij}(t)(x_j(t) - x_i(t)) \quad (2)$$

Burada  $a_{ij}(t)$ ,  $t$  anındaki bitişiklik matrisinin  $(i, j)$ . elemanına karşılık gelir ve şu koşulları sağlar.

*Varsayım 1.* Eğer  $i$  ve  $j$ . etmen arasında bağlantı yoksa  $a_{ij}(t) = 0$ 'dır. Aksi halde, herhangi bir pozitif  $\delta$  parametresi için  $a_{ij}(t) \geq \delta$ 'dir.

Denklem (1) ve (2) birleştirildiğinde sürekli zamanda onaylaşım algoritması şu hale dönüşür:

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{v_j \in N_i} a_{ij}(t)(x_j(t) - x_i(t)) \quad (3)$$

Denklem (3) matris formunda aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\dot{x}(t) = -Lx(t), \quad x(0) = x_0 \quad (4)$$

Burada  $L$  ağın Laplas işlecidir ve  $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$  şeklindedir. Laplas işlecinin  $L = [l_{ij}]$  elemanları şu şekilde tanımlanır:

$$l_{ij} = \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}, & \text{eğer } i = j \\ -a_{ij}, & \text{eğer } i \neq j \end{cases} \quad (5)$$

Laplas matrisinin tanımı gereği, her bir satır toplamı sıfırdır. Bu sebeple,  $L$  matrisinin  $\mathbf{1} = [1 \dots 1]^T \in R^n$  sağ özvektörüne karşılık gelen sıfırda bir özdeğeri bulunur.

İlingesi sabit olan bir ağ için, (4) denkleminin kararlılık analizi, Laplas işlecinin özdeğerleri incelenerek gerçekleştirilebilir. Bu durumda sürekli zaman onaylaşım algoritması (4)'ün çözümü  $x(t) = e^{-Lt}x_0$  ile verilir. Ek olarak, (3) algoritmasının yakınsama analizi için elde edilmiş sonuçlar aşağıdaki gibi özetlenebilir.

**Önsav 2.1** ([3], Önsav 3.3) Verilen bir  $L = [l_{ij}]$  matrisi,  $l_{ii} \geq 0, l_{ij} \leq 0, \forall i \neq j$  ve her bir  $j$  için  $\sum_{i=1}^n l_{ij} = 0, i, j \in I$  şartlarını sağlıyor olsun.  $L$  matrisinin en az bir özdeğeri sıfırdadır ve geri kalan özdeğerleri ise pozitif ve gerçektir. Buna ek olarak,  $L$  matrisinin sadece bir özdeğerinin sıfırda olması ancak ve ancak çizgede kapsayan bir ağacın olmasıyla mümkündür.

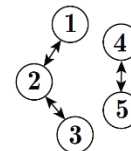
*Yorum 1.* Eğer ağı temsil eden yönsüz  $G$  çizgesi bağlı ise, ona karşılık gelen Laplas matrisinin yalnızca bir özdeğeri sıfırdadır ve diğer özdeğerleri de pozitif ve gerçektir.

**Önsav 2.2** ([2], Kuram 4)  $n$  etmeden oluşan bir ağ için (3) algoritması kullanılıyor olsun. Algoritmanın tüm başlangıç koşulları için sonuçta onaylaşımı sağlaması ancak ve ancak ağı temsil eden  $G=(V, E)$  çizgesinin bağlı olmasıyla sağlanır.

Literatürde yer alan birçok çalışmada, ağ ilingelinin sabit olduğu ve ideal iletişime sahip olduğu kabul edilmiştir. Halbuki, ağ ilingesi etmenler arası yeni bağlantıların oluşmasına veya mevcut olanların kopmasına bağlı olarak zamanla değişen bir yapıya sahip olabilir. Değişen ilingeli ağ ile modellenen bir sistem,  $\mathcal{G}=\{\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_N\}$  kümesi ile verilen ilingeler arasında değişecektir. Böylece, onaylaşım algoritması anahtarlamalı doğrusal bir sistem haline gelir:

$$\dot{x}(t) = -L(t)x(t) \quad (6)$$

Burada  $L(t)$ , her  $t$  anındaki Laplas işlecini gösterir.



Şekil 1. 5 etmeden oluşan örnek bir ilinge.

(6) yapısında bulunan ilingesi değişen ağların yakınsaması için, [3]'e göre ağa karşılık gelen çizgelerin birleşiminin sınırlı zaman aralıklarında yeterli sıklıkta bir kapsayan ağacı olması gerekmektedir ([3], Kuram 3.2).

### 2.3 Çoklu denge noktalı onaylaşım problemi

Bu kısımda, öncelikle çoklu denge noktaları içeren onaylaşım problemi tanımlanmıştır.

**Tanım 1.** Verilen  $G = (V, E)$  ağının alt grubu,  $(V^S, E^S)$  çizgesiyle ifade edilir, ve öyle ki  $V^S \subseteq V$  ve  $E^S \subseteq E \cap (V^S \times V^S)$ 'dir.

**Tanım 2.** (Çoklu Denge Noktalı Onaylaşım) Eğer  $K$  tane boş olmayan  $S_l, l = 1, \dots, K$  alt grup ve  $K$  farklı  $c_i, i = 1, \dots, K$  sabiti bulunuyorsa ve öyle ki bunlar

$$l \neq m \text{ ve } l, m = 1, \dots, K \text{ için } \bigcup_{l=1}^K S_l = V, S_l \cap S_m = \emptyset,$$

ise ve  $S_l$  alt grubu için herhangi bir  $x_0 \in R^n$  da  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = c_i, \forall v_i \in S_l$  sağlanıyorsa, (3) sistemi ile temsil edilen ağ  $K$  denge noktasına yakınsar.

Bu çalışmanın amacı, ağın  $K \geq 2$  denge noktasına ulaştığı koşulları belirlemektir. Özellikle, yönsüz çizgeler ele alınmıştır. Makalenin temel katkılarının sunulabilmesi için öncelikle ilgili tanımlamalar verilecektir.

**Tanım 3.** (Bağlı Bileşen)  $G = (V, E)$  sabit ilingeye sahip yönsüz bir çizgeyi temsil etsin, ve  $V_c \subseteq V, E_c \subseteq E$  olsun. Eğer  $V_c$ 'nin elemanları arasında bir yol bulunuyorsa  $G_c = (V_c, E_c)$  yönsüz  $G$  çizgesinin bağlı bileşendir denir.

**Tanım 4.** ( $K$ -Bağlı Bileşen)  $G = (V, E)$  çizgesindeki bağlı bileşenler  $G_1, G_2, \dots, G_K$  olsun, ve bunların herbiri  $G_1 = (V_1, E_1), \dots, G_K = (V_K, E_K)$  ile gösterilsin, eğer  $V = V_1 \cup V_2 \dots \cup V_K, V_i \cap V_j = \emptyset$  her bir  $i, j \in I, i \neq j$  ve  $E = E_1 \cup E_2 \dots \cup E_K$  ise,  $G = (V, E)$  yönsüz çizgesi  $K$  bağlı bileşene sahiptir denir.

*Örnek 1.* İlingesi Şekil 1'de verilen 5 etmenli bir sistemi ele alalım. Tanım 4'den yararlanıldığında, ağın iki bağlı bileşeninin olduğu görülür ve bunlar  $G_1 = (V_1, E_1)$  ve  $G_2 = (V_2, E_2)$ 'dir.

Dağıtık onaylaşım algoritmasının çoklu denge noktalarına yakınsaması ile ilgili temel sonuçlar verilmeden önce, aşağıda daha sonra ilingesi değişen ağlarda kullanılacak olan sonuç verilmiştir.

**Önsav 2.3**  $G_1 = (V_1, E_1)$  ve  $G_2 = (V_2, E_2)$  çizgelerini ele alalım.  $G_1 \cup G_2$ 'nin bağlı bileşenlerinin sayısı,  $G_1$  veya  $G_2$ 'nin bağlı bileşen sayısından azdır veya eşittir.

*İspat.*  $E_1 \cup E_2 \supseteq E_1$  ve  $E_1 \cup E_2 \supseteq E_2$  kullanılarak bu sonuca varılır.

## 3 Çoklu denge noktalı dağıtık onaylaşımın analizi

Bu kısımda, ilingesi sabit ve değişen ve yönsüz çizgelerle modellenmiş ağlarda çoklu denge noktalarının analizi verilmiştir.

### 3.1 Sabit ilingeli ağlar

Çoklu denge noktalarına sahip onaylaşım algoritmaları, klasik onaylaşımın özelliklerine sahip görünse de kuramsal analizi daha karmaşıktır. Çoklu denge noktaları içeren yönsüz çizgeler için elde edilen sonuç aşağıdaki gibidir.

**Kuram 3.1.**  $n$  etmenden oluşan ve sabit  $G = (V, E)$  çizgesi ile gösterilen bir ağı ele alalım. Varsayım 1'i sağlayan (3) algoritması için sistemin  $K$  denge noktasına,  $K \in Z, (n \geq K \geq 1)$ , yakınsaması için gerek ve yeter koşul ağın  $K$  bağlı bileşeni olmasıdır.

*İspat.* (Yeterlik) Ağın  $K$  bağlı bileşeni olduğunu kabul edelim. Genelliği bozmadan,  $L$  matrisi şu yapıda yazılabilir.

$$L = \text{blockdiag}\{\bar{L}_1, \dots, \bar{L}_K\}$$

Burada her bir  $\bar{L}_i, i = 1, \dots, K$  matrisinin yalnızca bir özdeğeri sıfırdadır ve diğer özdeğerleri (eğer varsa) ise pozitifdir. Eğer  $L$  matrisi bu yapıda değilse uygun bir dönüşüm matrisi kullanılarak bu yapıya getirilebilir. Ayrıca, bu matrislerin Laplas işlecinin yapısal özelliklerini sağladığı göz önüne alınmalıdır.

Önsav 2.1, Önsav 2.2 ve Tanım 4 uygulandığında, doğrusal sistemin çözümü  $e^{-L_i t} x_{0i} \rightarrow c_i \mathbf{1}_{n_i}$  ifade edilir. Burada  $c_i = d_i^T x_{0i}, i = 1, \dots, K$  ve  $d_i$  ise  $\bar{L}_i$  matrisinin sıfır özdeğerine karşılık gelen özvektörü temsil eder, diğer bir deyişle  $d_i^T \bar{L}_i = 0$  ve  $x_0 = [x_{01} \ x_{02} \ \dots \ x_{0K}]^T, x_{0i} \in R^{n_i}$ 'dir. Rastgele bir  $x_{0i}$  başlangıç değeri seçildiğinde, herhangi  $i, j, i \neq j$  için  $c_i \neq c_j$  olur. Sadece  $d_i^T = d_j^T = 0$  sağlandığında  $c_i$ 'nin  $c_j$ 'ye eşit olduğuna dikkat edilmelidir. Fakat, sol özdeğerin tanımı gereği,  $d_i^T \neq 0$ 'dir ve  $c_i \neq c_j$  olduğu anlamına gelir. Bu nedenle, ağ  $K$  denge noktasına yakınsar.

(Gereklik) Ağın  $K$  bağlı bileşene sahip olmadığını kabul edelim. Bu durum iki başlıkta incelenebilir:

- i. Ağ en az  $K+1$  bağlı bileşene sahiptir.
- ii. veya ağın en fazla  $K-1$  bağlı bileşeni vardır.

Durum (i) Ağda en az  $K+1$  bağlı bileşen bulunuyor olsun. Yeterlilik kısmında uygulanan mantık takip edildiğinde;  $L$  matrisi

$$L = \text{blockdiag}\{\bar{L}_1, \dots, \bar{L}_{K+1}\}$$

şeklinde ifade edilebilir ve bu ağın  $K+1$  denge noktasına yakınsadığı anlamına gelir. Benzer sonuçlar  $K+2$  bağlı bileşeni bulunan bir ağ için de geçerlidir. Böylece, ağda en az  $K+1$  onaylaşım denge noktası bulunduğu sonucuna varılır.

Durum (ii) Ağda en fazla  $K-1$  bağlı bileşen bulunuyor olsun. i. duruma benzer olarak tümevarımla ağda en fazla  $K-1$  onaylaşım denge noktası bulunduğu kanıtlanır.

Her iki durum sonucu ağ  $K$  onaylaşım noktasına yakınsamaz ki bu da çelişkiye yol açmaktadır, dolayısıyla sürekli zaman dağıtık onaylaşım algoritması (3) için ispat tamamlanmıştır.

### 3.2 Değişken ilingeli ağlar

Bu kısımda, ilingesi zamanla değişen ağların birden fazla denge noktasına erişmesi için gerek ve yeter koşullar belirtilmiştir. Kuram 3.1'in anahtarlamalı sistemlere genişletilebilmesi için, öncelikle eşdeğer  $K$  bağlılık kavramı tanımlanacaktır.

**Tanım 5.** (Eşdeğer  $K$  bağlı) Verilen  $G_1 = (V, E_1)$  çizgesinin  $K$  bağlı bileşeni olsun ve bunlar  $(V_{c_1}, E_{c_1}), \dots, (V_{c_K}, E_{c_K})$  ile verilmiş olsun. Benzer şekilde  $G_2 = (V, E_2)$  çizgesinin de  $(V_{c_1}, \bar{E}_{c_1}), \dots, (V_{c_K}, \bar{E}_{c_K})$  ile verilen  $K$  bağlı bileşeni olsun. Bu durumda,  $G_1$  ve  $G_2$  çizgeleri eşdeğer  $K$  bağlı çizgeler olarak ifade edilir.

**Önsav 3.2**  $L_1, \dots, L_j$  matrislerinin her biri eşdeğer  $K$  bağlı çizgelere karşılık gelen matrisleri temsil etsin. Her bir  $e^{-L_{i_1}}, \dots, e^{-L_{i_j}}$  pozitif uzunluklu sekans için, çarpıma karşılık gelen çizgenin de eşdeğer  $K$  bağlı olduğunu varsayalım. O zaman, her bir sonsuz  $e^{-L_{i_1}}, e^{-L_{i_2}}, \dots$  sekansı için  $c_1, \dots, c_K$  vektörleri vardır ve öyle ki

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (e^{-L_{i_m} \Delta t_m} \dots e^{-L_{i_1} \Delta t_1})^j = C_K \quad (7)$$

burada  $C_K$  aşağıdaki yapıdadır:

$$C_K \triangleq \text{diag}\{\mathbf{1}_{n_1} c_1^T, \dots, \mathbf{1}_{n_K} c_K^T\} \quad (8)$$

**Önsav 3.3** Eğer yönsüz çizgelerin birleşiminin oluşturduğu  $\{\mathcal{G}_{i_1}, \dots, \mathcal{G}_{i_m}\}$  kümesi  $K$  bağlı ve  $L_{i_j}, j = 1, \dots, m$  ise (6)'da her  $\mathcal{G}_{i_j}$  çizgesine karşılık gelen matrisi ifade ediyor olsun. Öyleyse herhangi bir pozitif sınırlandırılmış  $\Delta t_i$  için, matris çarpımı

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-L_{i_m} \Delta t_m} \dots e^{-L_{i_1} \Delta t_1})^t = C_K \quad (9)$$

sağlar, burada  $C_K$  (8) yapısındadır.

*İspat.*  $\{\mathcal{G}_{i_1}, \dots, \mathcal{G}_{i_m}\}$  çizgelerinin birleşiminin  $K$  bağlı bileşeni olduğunu kabul edelim.  $L_{i_j}$  matrisini iki matrisin toplamı olarak  $\eta_{i_j} I_n + M_{i_j}$  şeklinde ifade edebiliriz. Burada  $\eta_{i_j}, L_{i_j}$ 'nin diyagonal elemanlarının maksimumunu ve  $M_{i_j}$  ise negatif olmayan elemanlardan oluşan bir matrisi gösterir.

Bu durumda  $W_{i_j} = e^{-L_{i_j} \Delta t_j}$  olarak tanımlansın.  $W_{i_j}$ , pozitif diyagonal elemanlara sahip satır-olasılıksal yapıda bir matristir. Böylece,

$$W_{i_j} = e^{-(\eta_{i_j} I_n + M_{i_j}) \Delta t_j} = e^{-\eta_{i_j} \Delta t_j} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (M_{i_j} \Delta t_j)^k$$

yazılabilir. Dikkat edilmelidir ki  $W_{i_j} = e^{-L_{i_j} \Delta t_j}$ 'nin her bir diyagonal elemanı  $e^{-\eta_{i_j} \Delta t_j}$ 'dan büyük veya eşittir, ve diğer elemanları da negatif olmayan elemanlardan oluşur. Buna ek olarak,  $W_{i_j}$  matrisinin  $L_{i_j}$  ile aynı özvektörlere sahip olmasından dolayı, her bir  $e^{-L_{i_j} \Delta t_j}$  matrisi de satır olasılıksal bir matrisi temsil eder.

Kuram 3.1'in ispatına benzer bir yöntem izlendiğinde  $t \rightarrow \infty$  iken  $e^{-L_{i_m} \Delta t_m} \dots e^{-L_{i_1} \Delta t_1}$  matris çarpımının (9)'u sağladığı görülür.

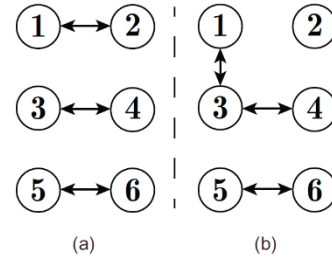
**Kuram 3.4.**  $n$  etmeden oluşan ve değişken ilingeye sahip ağ,  $\mathcal{G} = (V, E(t))$  çizgesi ile ifade ediliyor olsun. Sonsuz sekansta birbirleriyle kesişmeyen  $[t_i, t_{i+1})$  zaman aralıkları bulunuyor olsun.  $i = 0$ 'da başlayan  $[t_0, t_1)$  zaman aralığı sınırlandırılmış ve  $[t_i, t_{i+1})$   $i = 1, 2, \dots$  bir örnek sınırlandırılmış olsun. Eğer, her  $i, j \geq 1$  için çizgelerin birleşimi  $[t_i, t_{i+1})$  ve  $[t_j, t_{j+1})$  aralıkları boyunca eşdeğer  $K$  bağlı ise Varsayım 1'i sağlayan (6) algoritması  $K$  farklı onaylaşım denge noktasına yakınsar.

#### 4 Benzetim çalışmaları

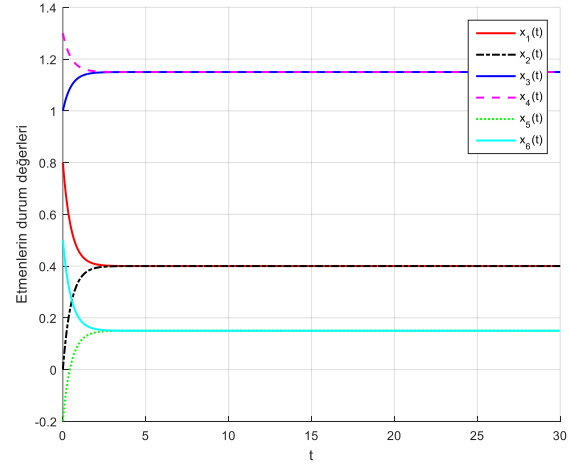
Bu kısımda, elde edilen teorik sonuçların açıklanabilmesi için, farklı ilingelere sahip yönsüz çizgelerde sürekli zaman onaylaşım algoritması kullanılarak denge noktaları ile ilgili benzetimler yapılmıştır.

*Örnek 2.* İlingesi Şekil 2-a'da verilen ve 6 etmenli ağı ele alalım. Etmenler arası ağırlıkların 1 alındığı durumda  $L$  matrisinin özdeğerleri  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 2$  şeklinde hesaplanabilir. Etmenlerin ilk değerleri  $x(0) = [0.8, 0, 1, 1.3, -0.2, 0.5]^T$  seçildiğinde etmenlerin değerlerinin değişimi Şekil 3'te gösterilmiştir. Buna göre, verilen koşullar altında sürekli zaman algoritması sonuçurda onaylaşımı sağlar.

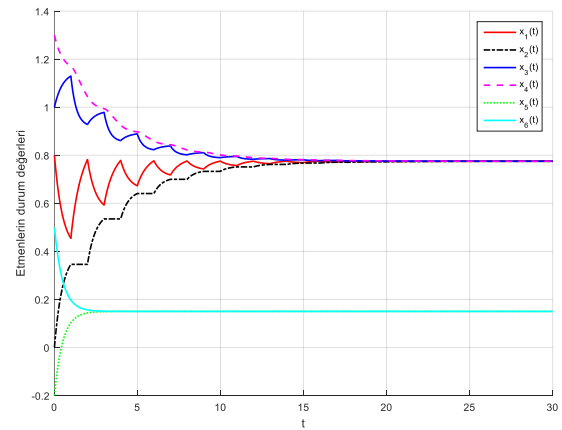
Elde edilen sonuç sabit ilingeli ağlarda geçerli olan Kuram 3.1 ile tutarlıdır.



Şekil 2. 6 etmenli (a) ve (b) ilingeleri.



Şekil 3. (a) ilingesine sahip ağdaki etmenlerin durum değerleri.



Şekil 4. (a) ve (b) ilingeleri arasında değişen ağı onaylaşımı.

*Örnek 3.* Değişken ilingeli ağlardaki kuramımızı açıklamak için ilingeleri Şekil 2- a ve b'de verilen ağları ele alalım. İlingelerin (a) ve (b) arasında  $T = 1s$  lik anahtarlama periyodu ile sıralı olarak değiştiği durumu inceleyelim. Her bir ağı ayrı olarak değerlendirildiğinde, diğer bir deyişle sabit ilingeye sahipken, ağ 3 farklı noktaya ulaşmaktaydı. Fakat bu örnekte Kuram 3.4'ten de görüleceği üzere etmenler iki farklı denge noktasına ulaşacaktır. Etmenlerin ilk değerleri  $x(0) = [0.8, 0, 1, 1.3, -0.2, 0.5]^T$  alındığında durum değerlerinin değişimleri Şekil 4'te verilmiştir.



## 5 Sonuçlar

Bu çalışmada, yönsüz çizgelerle ifade edilen sabit ve değişken ilingeli ağlar için çoklu denge noktalı dağıtık onaylaşım problemi çalışılmıştır. Sürekli zaman algoritmasının yakınsama özelliklerinin araştırılabilmesi için sistemdeki etmenler birinci derece integratörler olarak modellenmiştir. Bu çalışmanın temel katkılarından biri, literatürde mevcut olan [1],[3]'te verilen sonuçların genişletilmesi ve ağıñ birden fazla onaylaşım noktasına yakınsaması için gerek ve yeter koşulların belirlenmesidir. Elde edilen teorik sonuçların geçerliliği benzetim çalışmaları ile açıklanmıştır.

## 6 Teşekkür

Bu çalışma TÜBİTAK tarafından 114E613 ve BAP 9141 projeleri kapsamında desteklenmektedir.

## 7 Kaynaklar

- [1] Jadbabaie A, Lin J, Morse A S. "Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules". *IEEE Transactions Automatic Control*, 48(6), 988-1001, 2003.
- [2] Olfati-Saber R, Murray R M. "Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(9), 1520-1533, 2004.
- [3] Ren W, Beard R W. "Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(5), 655-66, 2005.
- [4] Moreau L. "Stability of multiagent systems with time-dependent communication links". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(2), 169-182, 2005.
- [5] Cao M, Morse A S, Anderson B D. "Agreeing asynchronously". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(8), 1826-1838, 2008.
- [6] Cihan O, Akar M. "Effect of nonuniform varying delay on the rate of convergence in averaging-based consensus". *Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences*, 23, 1069-1080, 2015.
- [7] Akar M, Shorten R. "On the Existence of Common Lyapunov Functions for Consensus Algorithms Based on Averaging". *Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences*, 19(3), 2011.
- [8] Akar M, Shorten R. "Distributed probabilistic synchronization algorithms for communication networks". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53, 389-393, 2008.
- [9] Fax J A, Murray R M. "Information Flow and Cooperative Control of Vehicle Formations". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(9), 1465-1476, 2004.
- [10] Lawton J, Beard R, Young B. "A Decentralized Approach to Formation Maneuvers". *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 19(6), 933-941, 2003.
- [11] Lin Z, Francis B, Maggiore M. "Necessary and Sufficient Graphical Conditions for Formation Control of Unicycles". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(1), 121-127, 2005.
- [12] Yu J, Wang L. "Group consensus of multi-agent systems with directed information exchange". *International Journal of Systems Science*, 43(2), 334-348, 2012.
- [13] Tan C, Liu G, Duan G. "Group consensus of networked multi-agent systems with directed topology". *18th IFAC World Congress*, Milano, Italy, 28 August-02 September 2011.
- [14] Xia W, Cao M. "Clustering in diffusively coupled networks". *Automatica*, 47(11), 2395-2405, 2011.
- [15] Qin J, Yu C. "Cluster consensus control of generic linear multi-agent systems under directed topology with acyclic partition". *Automatica*, 49(9), 2898-2905, 2013.