



# Journal of Materials and Engineering Structures

## Research Paper

### Comparaison des différentes théories de poutre non locale raffinée pour la flexion et l'analyse du flambement des nano-poutres

Comparison of Different Local Unrefined Beam Theories for Bending and Nano Beams Buckling Analysis

**Berrabah Hamza Madjid<sup>a,b,\*</sup>, Adda Bedia El Abbas<sup>b,c</sup>, Tounsi Abdelouahed<sup>a,c</sup>**

<sup>a</sup>Département de génie civil, centre universitaire de Relizane, Relizane, Algérie

<sup>b</sup>Département de génie civil, université de Djillali Liabes, Sidi Bel Abbes, Algérie

<sup>c</sup>Laboratoire des matériaux et hydrologies, Sidi Bel Abbes, Algérie

#### ARTICLE INFO

Historique de l'article :

Recu : 12 juillet 2015

Révisé : 15 décembre 2015

Accepté : 12 mars 2016

Mots clés:

Poutre non locale

Flexion

Flambement

Nano-poutre

Keywords :

Non local beam

Flexion

Buckling

Nano beam

#### RESUME

Dans cette étude, la théorie de déformation de cisaillement non locale unifiée est proposée pour l'étude la flexion et le flambement des nano poutres. Cette théorie est basée sur l'hypothèse que les déplacements transversaux et plans sont constitués de composantes de flexion et de cisaillement, les composantes de cisaillement ne contribuent pas aux moments de flexion. Les équations du mouvement sont dérivées en utilisant le principe d'Hamilton. Des solutions analytiques pour la déformation, charge de flambement, et la fréquence naturelle sont présentées pour une nano-poutre simplement appuyée, et les résultats obtenus sont comparés à ceux proposés par la théorie des poutres non locales de Timoshenko et les théories des poutres de Reddy.

#### ABSTRACT

In this study, non unified local shear deformation theory is proposed to consider the bending and buckling of nano beams. This theory is based on the assumption that the cross-sectional and planar displacements consist of bending and shear components, shear components do not contribute to the bending moments. Motion equations are derived using the Hamilton's principle. Analytical solutions for deformation, buckling load, and the natural frequency are presented to a nano simply supported beam, and the results obtained are compared to those proposed by the nonlocal Timoshenko beam theory and Reddy beam theories.

\* Corresponding author. Tel.: +213 790351763.

E-mail address: b\_hamza\_2005@yahoo.fr

## 1 Introduction

Les éléments structurels tels que les poutres, les plaques, et les membranes en micro-ou nano échelle en longueur sont couramment utilisés comme composants dans des dispositifs de micro-système ou nano électromécaniques [1, 2].

Fondamentalement, deux différentes approches sont disponibles pour la modélisation théorique des matériaux nanostructures : les approches atomistiques et la mécanique des milieux continus. Le premier comprend la dynamique moléculaire classique (MD), la dynamique moléculaire de fortes liaisons (TBMD) et la théorie de la densité fonctionnelle (DFT) [1, 3-7].

Le calcul de ces approches est souvent coûteux, en particulier pour les nanotubes de carbone multi paroi à grande échelle. Par conséquent, la mécanique des milieux continus est considérée comme un moyen alternatif pour la modélisation des matériaux à l'échelle nanométrique. En effet, les effets d'échelles sont importants dans le comportement mécanique de ces structures dans lesquelles les dimensions sont faibles et comparables à des distances moléculaires. Ces effets peuvent être déterminés à l'aide de la mécanique des milieux continus qui dépend de la théorie de déformation [8], modifiant la théorie de la contrainte [9], et la théorie de l'élasticité non locale [10]. Contrairement aux théories classiques, les théories non locales contiennent des paramètres d'échelle pour les longueurs concernant les matériaux internes qui peuvent capter des effets de taille à l'échelle nanométrique. Un examen pour des différents modèles non locaux peut être trouvé dans [11]. Dans ce document, la théorie de l'élasticité non locale d'Eringen [10] est utilisée pour étudier la flexion et le flambement des nano poutres simplement appuyées.

La théorie non locale a été développée par plusieurs auteurs comme une réponse à l'incapacité de l'élasticité locale pour gérer les problèmes élastiques avec des singularités géométriques pointues (par exemple, une fissure pointue). Le modèle d'Eringen a été appliqué pour la micro et nano poutre d'Euler-Bernoulli par [12], l'étude du flambement des nanotubes de carbone a été faite par [13, 14] et aussi par [15] qui ont étudié une barre élastique en traction.

Plusieurs auteurs ont développé l'utilisation de la théorie non-locale pour l'étude des vibrations libres transversales [16], la flexion et le flambement des nano poutres [17]. [18] a proposé le modèle hybride non-local de la poutre d'Euler-Bernoulli et la formulation non linéaire non locale des poutres. En utilisant la méthode des éléments finis, [17] ont étudié les nano poutre avec la formulation linéaire non locale. Tounsi et ses collègues ont étudié la propagation des ondes sonores dans les nano tubes en carbone simple et double paroi en tenant compte de l'effet non local ainsi que la température et la contrainte axiale initiale. En outre, [18] a obtenu une équation du mouvement cohérente pour le déplacement d'un fluide dans les nano tubes en carbone par la vibration libre avec l'effet non local, qui est une application importante de la théorie élastique non locale dans les NTC. Plus récemment, l'effet de la chiralité des réponses mécaniques des nanotubes de carbone est étudié par [19-26]. [27] ont étudié l'effet non local sur les propriétés de flambement thermiques pour les nano tubes en carbone à double paroi (DWCNTs) où la concordance du modèle de poutre continue des NTC est examiné et l'amplitude du paramètre à petite échelle (c'est-à-dire  $e_0a$ ) est déterminée après avoir comparé les résultats avec ceux obtenus à partir de la simulation de la dynamique moléculaire (MD).

Dans la présente étude, les différentes théories de déformation de cisaillement sont utilisées pour la flexion, le flambement et les vibrations de poutres nanométriques en utilisant l'élasticité locale et non locale. Ces théories sont basées sur l'hypothèse que les déplacements plans et transversaux sont constitués de composantes de flexion et de cisaillement, dans lesquelles les composants de flexion ne contribuent pas dans les forces de cisaillement et, de même, les composants de cisaillement ne contribuent pas dans les moments de flexion. La caractéristique la plus intéressante de cette théorie est qu'elle représente une variation non linéaire des déformations de cisaillement transversales à travers l'épaisseur et satisfait les conditions aux limites de traction zéro sur les surfaces supérieure et inférieure de la nano poutre sans utiliser les facteurs de correction de cisaillement.

En se basant sur les relations constitutives non locales d'Eringen, on dérive les équations du mouvement des nano poutres en utilisant le principe de Hamilton. Les solutions analytiques pour la flexion, charge de flambement, et la fréquence naturelle sont présentés pour les nano poutres simplement appuyées, et les résultats obtenus sont comparés à ceux prédits par la théorie de poutre d'Euler-Bernoulli (EBT), la théorie de poutre de Timoshenko (TBT), et la théorie de poutre de Reddy (RBT).

## 2 Formulations théoriques

### 2.1 Hypothèses de base

Le champ de déplacement de la théorie proposée est choisi en fonction des hypothèses suivantes:

- Les déplacements sont petits en comparaison avec l'épaisseur des nano-poutres et, par conséquent, les déformations impliquées sont infinitésimales.
- le déplacement transversal  $w$  comprend deux composantes, de flexion  $w_b$ , et de cisaillement  $w_s$ . Ces composantes sont seulement en fonction de la coordonnée  $x$ .

$$w(x, z) = w_b(x) + w_s(x) \quad (1)$$

- La contrainte normale transversale  $\sigma_z$  est négligeable devant la contrainte plane  $\sigma_x$ .
- Suivant la direction  $x$  le déplacement  $u$  contient deux composantes, la flexion, et le cisaillement.

$$u = u_b + u_s \quad (2)$$

La composante de flexion  $u_b$  est supposée être similaire au déplacement donné par la théorie de la poutre classique. Par conséquent, l'expression de  $u_b$  peut être donnée comme suit

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x} \quad (3)$$

La composante de déplacement  $u_s$ , dû à la déformation de cisaillement est supposée être parabolique, sinusoïdale, hyperbolique et exponentielle par rapport aux coordonnées d'épaisseur. Ainsi, la composante de cisaillement  $u_s$  donne lieu, à une liaison avec  $w_s$ , à une variation d'ordre élevé pour une déformation de cisaillement  $\gamma_{xz}$  et donc à la contrainte de cisaillement  $\tau_{xz}$  à travers l'épaisseur de la nano poutre de telle sorte que la contrainte de cisaillement  $\tau_{xz}$  est nulle dans la partie supérieure et inférieure de la nano poutre. Par conséquent, l'expression de  $u_s$  peut être donnée comme suit

$$u_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (4)$$

La fonction  $f(z)$  associée à la distribution de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur de la poutre sont données dans le tableau 1.

### 2.2 Cinématique

En se basant sur les hypothèses précédentes, le champ de déplacement peut être obtenu en utilisant les équations. (1) - (4)

**Tableau 1 forme des fonctions**

Modèle	$f(z)$
Modèle 1	$f(z) = \frac{4z^3}{3h^2}$
Modèle 2	$f(z) = z - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$
Modèle 3	$f(z) = z - h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) + z \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$
Modèle 4	$f(z) = z - ze^{-2(z/h)^2}$

$$u(x, z, t) = -z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (5a)$$

$$w(x, z, t) = w_b(x, t) + w_s(x, t) \quad (5b)$$

Les déformations associées aux déplacements dans l'équation sont

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z k_x^b + f(z) k_x^s \text{ et } \gamma_{xz} = g(z) \gamma_{xz}^s \quad (6)$$

Où

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, \quad k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}$$

$$\gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad g(z) = 1 - f'(z) \text{ et } f'(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (7)$$

### 2.3 Relations constitutives

La réponse des matériaux à l'échelle nanométrique est différente de ceux de leurs homologues en vrac. L'élasticité nonlocal est d'abord considéré par [10]. Il a supposé que la contrainte a un point de référence est en fonction du champ de déformation à chaque point de la continuité. [10] a proposé une forme différentielle pour la relation de comportement non local s'exprime comme suit

$$\sigma_x - \mu \frac{d^2 \sigma_x}{dx^2} = E \varepsilon_x \quad (8a)$$

$$\tau_{xz} - \mu \frac{d^2 \tau_{xz}}{dx^2} = G \gamma_{xz} \quad (8b)$$

où  $E$  et  $G$  sont respectivement le module d'élasticité et le module de cisaillement de la nano poutre,  $\mu = (e_0 a)^2$  est le paramètre non local, ( $e_0$ ) est une constante appropriée à chaque matière et ( $a$ ) est une longueur caractéristique interne. Le paramètre non local dépend des conditions aux limites, chiralité, les formes de mode, le nombre de murs, et le type de mouvement [29]. Jusqu'à présent, il n'existe aucune étude rigoureuse faite sur l'estimation de la valeur du paramètre non local. Il est suggéré que la valeur du paramètre non local peut être déterminé en faisant une comparaison des courbes de dispersion de la mécanique des milieux continus non locaux et la simulation de la dynamique moléculaire [29, 30]. En général, une estimation attentive du paramètre non local est ( $e_0 a < 2 \text{ nm}$ ) pour un nanotube de carbone a un seul mur [31].

### 2.4 Les équations du mouvement

Le principe de "Hamilton" est utilisé pour dérivé les équations du mouvement. Ce principe peut être énoncé sous une forme analytique [16]

$$\delta \int_0^T (U + V - K) dt = 0 \quad (9)$$

où  $\delta U$  est la variation virtuelle de l'énergie de déformation;  $\delta V$  est la variation virtuelle de l'énergie potentielle, et  $\delta K$  est la variation virtuelle de l'énergie cinétique. La variation de l'énergie de déformation de la poutre peut être exprimée comme

$$\delta U = \int_0^L \int_A (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA dx$$

$$= \int_0^L \left( -M_b \frac{d^2 \delta w_b}{dx^2} - M_s \frac{d^2 \delta w_s}{dx^2} + Q \frac{d \delta w_s}{dx} \right) dx \quad (10)$$

Où  $M_b$ ,  $M_s$  et  $Q$  sont les résultantes des contraintes définies comme

$$(M_b, M_s) = \int_A (z, f) \sigma_x dA \text{ et } Q = \int_A g \tau_{xz} dA \quad (11)$$

La variation de l'énergie potentielle par les charges appliquées peut être écrite comme

$$\delta V = -\int_0^L q \delta(w_b + w_s) dx - \int_0^L N_0 \frac{d(w_b + w_s)}{dx} \frac{d\delta(w_b + w_s)}{dx} dx \quad (12)$$

Où  $q$  et  $N_0$  sont respectivement les charges transversale et axiale, La variation de l'énergie cinétique peut être exprimée par

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_0^L \int_A \rho [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{w} \delta \dot{w}] dA dx \\ &= \int_0^L \left\{ I_0 (\dot{w}_b + \dot{w}_s) (\delta \dot{w}_b + \delta \dot{w}_s) + I_2 \left( \frac{d\dot{w}_b}{dx} \frac{d\delta \dot{w}_b}{dx} \right) + K_2 \left( \frac{d\dot{w}_s}{dx} \frac{d\delta \dot{w}_s}{dx} \right) \right. \\ &\quad \left. + J_2 \left( \frac{d\dot{w}_b}{dx} \frac{d\delta \dot{w}_s}{dx} + \frac{d\dot{w}_s}{dx} \frac{d\delta \dot{w}_b}{dx} \right) \right\} dx \end{aligned} \quad (13)$$

Où les exposants indique la dérivation par rapport au variable temps ( $t$ );  $\rho$  est la masse volumique, et ( $I_0, I_2, J_2, K_2$ ) sont les inerties de masse définis comme

$$(I_0, I_2, J_2, K_2) = \int_A (1, z^2, z f, f^2) \rho dA \quad (14)$$

En substituant les expressions de  $\delta U$ ,  $\delta V$ , Et  $\delta K$  des équations (10), (12) et (13) dans l'équation (9) et en intégrant par parties, et en assemblant les coefficients  $\delta w_b$  et  $\delta w_s$ , les équations de mouvement proposé par la théorie des poutres sont obtenus

$$\begin{aligned} \delta w_b : \quad & \frac{d^2 M_b}{dx^2} + q - N_0 \frac{d^2(w_b + w_s)}{dx^2} = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - I_2 \frac{d^2 \dot{w}_b}{dx^2} - J_2 \frac{d^2 \dot{w}_s}{dx^2} \\ \delta w_s : \quad & \frac{d^2 M_s}{dx^2} + \frac{dQ}{dx} + q - N_0 \frac{d^2(w_b + w_s)}{dx^2} = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - J_2 \frac{d^2 \dot{w}_b}{dx^2} - K_2 \frac{d^2 \dot{w}_s}{dx^2} \end{aligned} \quad (15)$$

Lorsque l'effet de la déformation de cisaillement est négligée ( $w_s=0$ ), les équations d'équilibre de l'équation (15) récupérer ces dérivée par la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli.

En substituant l'équation (6) dans l'équation (8) et les résultats suivants dans l'équation (11), les contraintes résultantes sont obtenues en tant que

$$M_b - \mu \frac{d^2 M_b}{dx^2} = -D \frac{d^2 w_b}{dx^2} - D_s \frac{d^2 w_s}{dx^2} \quad (16a)$$

$$M_s - \mu \frac{d^2 M_s}{dx^2} = -D_s \frac{d^2 w_b}{dx^2} - H_s \frac{d^2 w_s}{dx^2} \quad (16b)$$

$$Q - \mu \frac{d^2 Q}{dx^2} = A_s \frac{dw_s}{dx} \quad (16c)$$

$$\text{Où} \quad (D, D_s, H_s) = \int_A (z^2, z f, f^2) E dA, \quad A_s = \int_A g^2 G dA \quad (17)$$

En substituant l'équation (16) dans l'équation (15), les équations mouvement non locales peuvent être exprimées en termes de déplacements ( $w_b, w_s$ ) comme

$$\begin{aligned} -D \frac{d^4 w_b}{dx^4} - D_s \frac{d^4 w_s}{dx^4} + q - \mu \frac{d^2 q}{dx^2} - N_0 \left( \frac{d^2(w_b + w_s)}{dx^2} - \mu \frac{d^4(w_b + w_s)}{dx^4} \right) \\ = I_0 \left( (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - \mu \frac{d^2(\dot{w}_b + \dot{w}_s)}{dx^2} \right) - I_2 \left( \frac{d^2 \dot{w}_b}{dx^2} - \mu \frac{d^4 \dot{w}_b}{dx^4} \right) - J_2 \left( \frac{d^2 \dot{w}_s}{dx^2} - \mu \frac{d^4 \dot{w}_s}{dx^4} \right) \end{aligned} \quad (18a)$$

$$\begin{aligned}
 & -D_s \frac{d^4 w_b}{dx^4} - H_s \frac{d^4 w_s}{dx^4} + A_s \frac{d^2 w_s}{dx^2} + q - \mu \frac{d^2 q}{dx^2} - N_0 \left( \frac{d^2 (w_b + w_s)}{dx^2} - \mu \frac{d^4 (w_b + w_s)}{dx^4} \right) \\
 & = I_0 \left( (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - \mu \frac{d^2 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s)}{dx^2} \right) - J_2 \left( \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} - \mu \frac{d^4 \ddot{w}_b}{dx^4} \right) - K_2 \left( \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} - \mu \frac{d^4 \ddot{w}_s}{dx^4} \right)
 \end{aligned} \tag{18b}$$

### 3 Solution analytique de nano poutre simplement appuyée

Dans cette étude, des solutions analytiques sont donnés pour des nano poutres isotropes simplement appuyée pour la flexion, flambement et la vibration libre. Les conditions aux limites de nano poutre simplement appuyée sont

$$w_b = w_s = M_b = M_s = 0 \text{ à } x = 0, L$$

Le champ de déplacement suivant satisfait aux conditions aux limites et aux équations d'équilibres.

$$\begin{Bmatrix} w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} W_{bn} \sin(\alpha x) e^{i \omega t} \\ W_{sn} \sin(\alpha x) e^{i \omega t} \end{Bmatrix} \tag{19-20}$$

Où  $W_{bn}$ , et  $W_{sn}$  sont des paramètres arbitraires à déterminer,  $\omega$  est la fréquence propre associée au  $n^{ième}$  mode propre, et  $\alpha = n\pi / L$ . La charge transversale  $q$  est également élargie dans la série sinus de Fourier en tant que

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \sin \alpha x, \quad Q_n = \frac{2}{L} \int_0^L q(x) \sin(\alpha x) dx \tag{21}$$

Les coefficients de Fourier  $Q_n$  associée à certaines charges typiques sont donnés

$$Q_n = q_0, \quad n = 1 \quad \text{pour une charge sinusoïdal,} \tag{22a}$$

$$Q_n = \frac{4q_0}{n\pi}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad \text{pour une charge uniforme,} \tag{22b}$$

$$Q_n = \frac{2q_0}{L} \sin \frac{n\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{pour une charge ponctuelle } Q_0 \text{ au plan moyen,} \tag{22c}$$

En substituant les expansions de  $w_b$ ,  $w_s$  et  $q$  des équations (20) et (21) dans l'équation (18), les solutions peuvent être obtenues à partir des équations suivantes

$$\left( \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} \end{bmatrix} - \lambda N_0 \alpha^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} W_{bn} \\ W_{sn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \lambda Q_n \\ \lambda Q_n \end{Bmatrix} \tag{23}$$

Où 
$$S_{11} = D\alpha^4, \quad S_{12} = D_s\alpha^4, \quad S_{22} = H_s\alpha^4 + A_s\alpha^2, \quad \lambda = 1 + \mu\alpha^2 \tag{24}$$

$$m_{11} = I_0 + I_2\alpha^2, \quad m_{12} = I_0 + J_2\alpha^2, \quad m_{22} = I_0 + K_2\alpha^2$$

#### 3.1 Flexion

La flexion statique est obtenue à partir de l'équation (23) par la mise en  $N_0$ , et tous les dérivés par rapport au temps égale à zéro

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(S_{11} + S_{22} - 2S_{12})}{(S_{11}S_{22} - S_{12}^2)} \lambda Q_n \sin \alpha x \tag{25}$$

#### 3.2 Flambement

Le flambement est obtenu à partir de l'équation (23) en définissant  $q$  et les dérivés par rapport au temps égale à zéro

$$N_0 = \frac{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}{\lambda\alpha^2 (S_{11} - 2S_{12} + S_{22})} \tag{26}$$

## 4 Validité et application du modèle de poutre continue pour les nano poutre

L'application d'un modèle de poutre continue des nanotubes de carbone (NTC) est étudié par plusieurs auteurs (par exemple, [5, 32] a rendu l'applicabilité du modèle de poutre continue dans la mécanique des nanotubes de carbone et nano bâtonnets.

[30] présentent une étude rigoureuse, dans laquelle ils vérifient la validité du modèle de poutre dans l'étude des ondes de flexion, simulées par la dynamique moléculaire (MD), pour les nanotubes de carbone à une seule paroi. Dans cette étude, [32] ont observé que lorsque le nombre d'onde devient très grande, la microstructure des nanotubes de carbone joue un rôle important dans la dispersion des ondes de flexion et diminue de manière significative la vitesse de phase des ondes de flexion de haute fréquence.

Récemment [33] ont présenté les résultats numériques pour les déformations critiques de flambement obtenus à partir de la théorie de mécanique des milieux continus et une étude de comparaison est effectuée avec simulations de DM [24]. On voit que les déformations critiques de flambement obtenu par [25] sont en bon accord en comparaison avec les résultats obtenus à partir de la simulation de la dynamique moléculaire. Sur la base des résultats de la simulation MD, la valeur du constant non-local est déterminée pour NTC basé sur le calcul de la moyenne. La meilleure correspondance entre les simulations de dynamique moléculaire (DM) et les formulations non locales est réalisée pour une valeur constante non locale de ( $e_0a = 0,54 \text{ nm}$ ) pour les CNT (5, 5) et ( $e_0a = 1,05 \text{ nm}$ ) pour les CNT (7, 7) avec une bonne précision (l'erreur est inférieure à 10 %).

## 5 Résultats numériques

Dans cette partie, les résultats numériques sont donnés pour des solutions analytiques donnés dans les parties précédentes. Pour tous les calculs, le «coefficient de Poisson est pris égale a 0,3. Toutefois, pour le calcul effectué à l'aide de TBT, le facteur de correction de cisaillement est pris égal à 5/6. La longueur de nano poutre L est supposée être égale à 10 nm. Pour plus de commodité, les expressions non dimensionnelles suivantes sont utilisées :

- $\bar{w} = 100w \frac{EI}{q_0 L^4}$  pour une charge uniforme
- $\bar{w} = 100w \frac{EI}{Q_0 L^3}$  pour une charge ponctuelle
- $\bar{\omega} = \omega L \sqrt{\frac{I_0}{EI}}$  paramètre de fréquence
- $\bar{N} = N_{cr} \frac{L^2}{EI}$  paramètre de charge critique de flambement

Les résultats numériques pour la flexion sous une charge uniforme sont donnés dans le tableau 2. Ces derniers sont obtenus en utilisant 100 termes dans la série de l'équation (25). On peut voir que les résultats de diverses théories de déformation de cisaillement proposées sont en excellent accord avec ceux prédits par le TBT et RBT pour toutes les valeurs du rapport d'épaisseur  $L/h$  et le paramètre d'échelle  $\mu$ . Selon ces résultats, le paramètre d'échelle est plus évident pour un faible rapport d'épaisseur  $L/h$  et il diminue avec l'augmentation de  $L/h$ . L'effet d'échelle sont plus prononcés pour une charge ponctuelle. EBT sous-estime la flexion pour un faible rapport d'épaisseur  $L/h$ . Avec l'augmentation des  $L/h$  les résultats sont convergents à une certaine valeur. La différence entre EBT et les théories de déformation et de cisaillement (c.-à-d TBT, RBT, et les théories actuelles) est négligeable pour nano poutre minces et considérable pour nano poutre profondes. Cela est dû au fait que l'EBT néglige les effets de déformation de cisaillement.

Les charges de flambements critiques non dimensionnels sont présentées dans le Tableau 3. Les résultats obtenus en utilisant les théories proposées sont comparées avec celles calculées par TBT et RBT ou un bon accord est considéré. On peut observer dans le tableau 3 que les charges de flambement sont réduites avec l'augmentation de paramètre d'échelle  $\mu$ . Les paramètres de charge critique de flambement sont insensibles à la théorie utilisée. Conforme aux résultats de flexion, pour un faible rapport d'épaisseur  $L/h$ , l'effet non local est important et cet effet est perdu pour un rapport élever de  $L/h$ .

**Tableau 2. Comparaison de la flexion centrée maximale dimensionnelle sous une charge uniforme pour une nano poutre simplement appuyées**

$L/h$	$\mu (nm^2)$	EBT	TBT	RBT	Model 1	Model 2	Model 3	Model 4
5	0	1.3021	1.4321	1.4320	1.4320	1.4317	1.4320	1.4311
	1	1.4271	1.5674	1.5673	1.5674	1.5671	1.5674	1.5665
	2	1.5521	1.7028	1.7027	1.7028	1.7025	1.7028	1.7018
	3	1.6771	1.8381	1.8381	1.8382	1.8379	1.8382	1.8371
	4	1.8021	1.9734	1.9735	2.9736	2.9733	2.9736	2.9725
10	0	1.3021	1.3346	1.3346	1.3346	1.3345	1.3346	1.3344
	1	1.4271	1.4622	1.4622	1.4622	1.4621	1.4622	1.4620
	2	1.5521	1.5898	1.5898	1.5898	1.5897	1.5898	1.5896
	3	1.6771	1.7173	1.7174	1.7174	1.7173	1.7174	1.7171
	4	1.8021	1.8489	1.8450	1.8450	1.8449	1.8450	1.8447
20	0	1.3021	1.3102	1.3102	1.3102	1.3102	1.3102	1.3102
	1	1.4271	1.4359	1.4359	1.4359	1.4359	1.4359	1.4358
	2	1.5521	1.5615	1.5615	1.5615	1.5615	1.5615	1.5615
	3	1.6771	1.6871	1.6872	1.6872	1.6871	1.6872	1.6871
	4	1.8021	1.8128	1.8128	1.8128	1.8128	1.8128	1.8128
100	0	1.3021	1.3024	1.3024	1.3024	1.3024	1.3024	1.3024
	1	1.4271	1.4274	1.4274	1.4274	1.4274	1.4274	1.4274
	2	1.5521	1.5525	1.5525	1.5525	1.5525	1.5525	1.5525
	3	1.6771	1.6775	1.6775	1.6775	1.6775	1.6775	1.6775
	4	1.8021	1.8025	1.8025	1.8025	1.8025	1.8025	1.8025

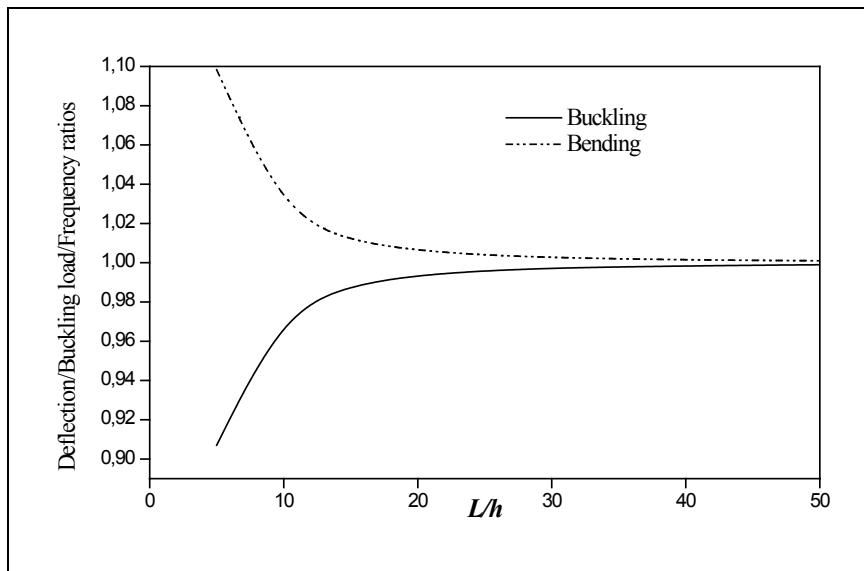
Les fréquences fondamentales malgré les paramètres non locaux  $\mu$  sont présentées dans le tableau 4. On peut observer que les résultats des théories actuelles sont en excellent accord avec ceux prédits par le TBT et RBT pour toutes les valeurs de rapport d'épaisseur  $L/h$  et le paramètre non locale  $\mu$ . Selon ces résultats, la fréquence fondamentale est diminuée avec l'augmentation de paramètre non local  $\mu$ . De plus, l'effet de la déformation de cisaillement sur la fréquence fondamentale est significatif lorsque la valeur de  $L/h$  est faible.

Les trois premières fréquences non dimensionnelle de flexion sont présentés dans le tableau 5 pour différents paramètre non local  $\mu$  et le rapport d'épaisseur  $L/h$  pour différentes théories. Comme le paramètre d'échelle  $\mu$  augmente, la fréquence non dimensionnelle de flexion obtenue pour la théorie des poutres non locale devient plus petite que ceux de son identique local. Cette diminution est particulièrement importante pour des valeurs plus élevées du nombre mode de vibration  $n$ , et donc l'effet à petite échelle ne peut être négligé. Comme on l'observe dans les exemples ci-dessus, les théories de déformation de cisaillement proposés sont en bon accord avec ceux prédits par le TBT et RBT pour toutes les valeurs de rapport d'épaisseur  $L/h$ , le paramètre d'échelle  $\mu$ , et le nombre mode de vibration  $n$ .

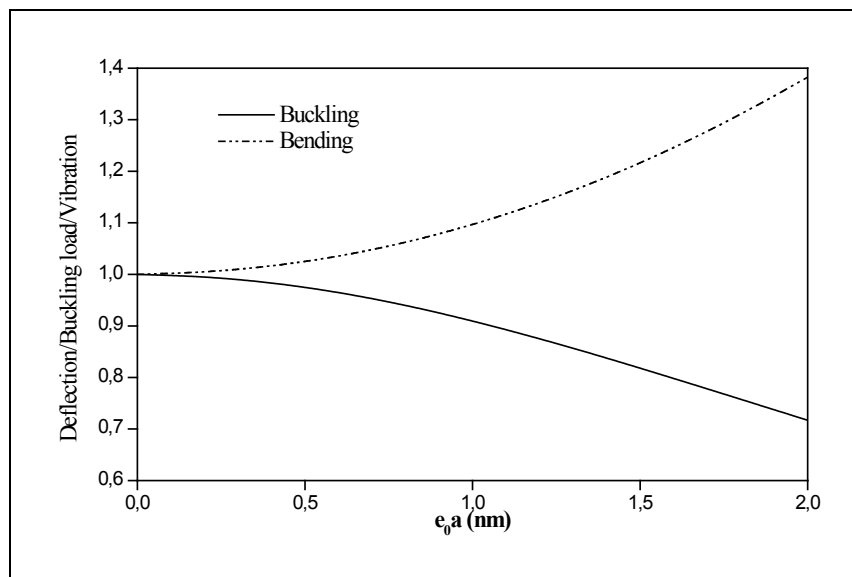
En général, on peut conclure à partir des tableaux 2-5 que la théorie locale sous-estime la flexion et surestime les charges de flambement ainsi que les fréquences naturelles des nano poutres par rapport à la théorie non-local, et la différence entre les théories locales et non locales est importante pour une grande valeur du paramètre d'échelle. Cela est dû au fait que la théorie non locale est incapable de saisir l'effet à petite échelle des nano poutres. En outre, l'inclusion de la déformation de cisaillement et l'effet non local augmente la flexion et diminue les charges de flambement et les fréquences naturelles. Dans tous les cas, on peut observer que les modèles 1 et 3 donnent des résultats presque identiques à ceux obtenus par RBT. L'effet de la déformation de cisaillement sur la flexion, flambement et les réponses vibratoires de nano poutre est représenté sur la figure 1 pour une poutre simplement appuyée avec  $\mu = 1 \text{ nm}^2$ . Dans cette figure, la flexion, la charge de flambement, et les rapports de fréquence sont définis comme les rapports de ceux prédits par la théorie actuelle et celle prévues par EBT où l'effet de déformation de cisaillement est négligée. On observe que, la prise en compte de l'effet de déformation de cisaillement rend la poutre plus souple, et par conséquent, conduit à une diminution de la charge de flambement et de fréquences naturelles et d'une augmentation de flexion. Ceci indique que l'effet de la déformation de cisaillement se traduit par une réduction de la rigidité de la poutre. L'effet à petite échelle sur la flexion, flambement et les



réponses vibratoires de nano poutre est clairement démontré dans la figure 2 pour une poutre simplement appuyée avec  $L/h = 10$ . La flexion, le flambage, et les rapports de fréquence sont définies comme les rapports de ceux prédits par la théorie non locale pour les valeurs prédit par la théorie locale (c-a-d,  $\mu = 0$ ). On peut observer que le rapport de flexion est supérieur à l'unité, alors que les rapports de charge et la fréquence de flambement sont plus petits que l'unité. Cela signifie que la théorie locale sous-estime la flexion et surestime les charges de flambement ainsi que les fréquences naturelles des nano poutres par rapport à la théorie non-locale. Cela est dû au fait que la théorie locale est incapable de saisir l'effet à petite échelle des nano poutres.



**Fig. 1** Effet de la déformation de cisaillement transversal sur la flexion, la charge critique de flambement, et les rapports de fréquence fondamentale pour une nano poutre simplement appuyée en utilisant le modèle 1 avec  $\mu = 1 \text{ nm}^2$



**Fig. 2** Effet de petite échelle sur la flexion, la charge critique de flambement, et les rapports de fréquence fondamentale pour une nano poutre simplement appuyée en utilisant le modèle 1 avec  $L/h = 10$

**Tableau 3. Comparaison de la charge critique dimensionnelle du flambement pour une nano poutre simplement appuyées**

$L/h$	$\mu (nm^2)$	EBT	TBT	RBT	Model 1	Model 2	Model 3	Model 4
5	0	9.8696	8.9509	8.9519	8.9519	8.9533	8.9519	8.9573
	1	8.9830	8.1468	8.1477	8.1477	8.1490	8.1477	8.1527
	2	8.2426	7.4753	7.4761	7.4761	7.4773	7.4761	7.4807
	3	7.6149	6.9061	6.9068	6.9068	6.9080	6.9068	6.9111
	4	7.0761	6.4174	6.4181	6.4181	6.4191	6.4181	6.4220
10	0	9.8696	9.6227	9.6228	9.6228	9.6231	9.6228	9.6242
	1	8.9830	8.7583	8.7583	8.7583	8.7587	8.7583	8.7597
	2	8.2426	8.0364	8.0364	8.0364	8.0367	8.0364	8.0377
	3	7.6149	7.4244	7.4245	7.4245	7.4247	7.4245	7.4256
	4	7.0761	6.8990	6.8991	6.8991	6.8994	6.8991	6.9001
20	0	9.8696	9.8067	9.8067	9.8067	9.8068	9.8067	9.8071
	1	8.9830	8.9258	8.9258	8.9258	8.9258	8.9258	8.9261
	2	8.2426	8.1900	8.1900	8.1900	8.1901	8.1900	8.1904
	3	7.6149	7.5664	7.5664	7.5664	7.5665	7.5664	7.5667
	4	7.0761	7.0310	7.0310	7.0310	7.0310	7.0310	7.0313
100	0	9.8696	9.8671	9.8671	9.8671	9.8671	9.8671	9.8671
	1	8.9830	8.9807	8.9807	8.9807	9.9807	8.9807	8.9807
	2	8.2426	8.2405	8.2405	8.2405	8.2405	8.2405	8.2405
	3	7.6149	7.6130	7.6130	7.6130	7.6130	7.6130	7.6130
	4	7.0761	7.0743	7.0743	7.0743	7.0743	7.0743	7.0743

**Tableau 4 Comparaison de la fréquence fondamentale non dimensionnelle  $\bar{\omega}$  pour une nano poutre simplement appuyées**

$L/h$	$\mu (nm^2)$	EBT	TBT	RBT	Model 1	Model 2	Model 3	Model 4
5	0	9.7112	9.2740	9.2745	9.2745	9.2752	9.2745	9.2781
	1	9.2647	8.8477	8.8482	8.8482	8.8488	8.8482	8.8515
	2	8.8747	8.4752	8.4757	8.4757	8.4763	8.4757	8.4789
	3	8.5301	8.1461	8.1466	8.1466	8.1472	8.1466	8.1497
	4	8.2228	7.8526	7.8530	7.8530	7.8536	7.8530	7.8561
10	0	9.8293	9.7075	9.7075	9.7075	9.7077	9.7075	9.7083
	1	9.3774	9.2612	9.2612	9.2612	9.2614	9.2612	9.2620
	2	8.9826	8.8713	8.8714	8.8714	8.8715	8.8713	8.8721
	3	8.6338	8.5269	8.5269	8.5269	8.5271	8.5269	8.5276
	4	8.3228	8.2196	8.2197	8.2197	8.2198	8.2196	8.2203
20	0	9.8595	9.8281	9.8281	9.8282	9.8283	9.8282	9.8281
	1	9.4062	9.3763	9.3763	9.3764	9.3764	9.3764	9.3763
	2	9.0102	8.9816	8.9816	8.9816	8.9817	8.9816	8.9816
	3	8.6604	8.6328	8.6328	8.6329	8.6330	8.6329	8.6328
	4	8.3483	8.3218	8.3218	8.3218	8.3220	8.3218	8.3218
100	0	9.8692	9.8679	9.8679	9.8723	9.8776	9.8722	9.8511
	1	9.4155	9.4143	9.4143	9.4184	9.4235	9.4184	9.3982
	2	9.0191	9.0180	9.0180	9.0219	9.0267	9.0219	9.0026
	3	8.6689	8.6678	8.6678	8.6716	8.6763	8.6716	8.6530
	4	8.3566	8.3555	8.3555	8.3592	8.3636	8.3592	8.3413

**Tableau 5 Comparaison des trois fréquences non dimensionnelle  $\bar{\omega}$  pour une nano poutre simplement appuyées**

Modes ( $n$ )	$\mu (nm^2)$	EBT	TBT	RBT	Model 1	Model 2	Model 3	Model 4
1	0	9.7112	9.2740	9.2745	9.2745	9.2752	9.2746	9.2772
	1	9.2647	8.8477	8.8482	8.8482	8.8488	8.8483	8.8507
	2	8.8747	8.4752	8.4757	8.4757	8.4763	8.4758	8.4781
	3	8.5301	8.1461	8.1466	8.1466	8.1472	8.1467	8.1489
	4	8.2228	7.8526	7.8530	7.8530	7.8536	7.8531	7.8553
2	0	37.1120	32.1665	32.1847	32.1847	32.1948	32.1851	32.2180
	1	31.4239	27.2364	27.2519	27.2519	27.2604	27.2522	27.2800
	2	27.7422	24.0453	24.0589	24.0589	24.0664	24.0592	24.0837
	3	25.1104	21.7642	21.7765	21.7765	21.7833	21.7768	21.7990
	4	23.1088	20.0293	20.0407	20.0407	20.0470	20.0409	20.0614
3	0	78.0234	61.4581	61.5746	61.5746	61.6192	61.5718	61.7052
	1	56.7798	44.7247	44.8095	44.8095	44.8420	44.8075	44.9046
	2	46.8246	36.8831	36.9531	36.9531	36.9798	36.9514	37.0315
	3	40.7568	32.1036	32.1645	32.1645	32.1878	32.1631	32.2327
	4	36.5657	28.8023	28.8569	28.8569	28.8778	28.8556	28.9181

## 6 Conclusion

Plusieurs théories de poutre de déformation de cisaillement non locales sont proposées pour la flexion, flambement, et les vibrations de nano poutre. Ces théories sont basées sur l'hypothèse que dans les déplacements plans et transversaux sont constitués de composantes de flexion et de cisaillement, dans lequel les composantes de flexion ne contribuent pas vers les forces de cisaillement et, de même, les composantes de cisaillement ne contribuent pas vers des moments de flexion. En outre, les modèles proposés sont capables de capturer à la fois à les effets de petite échelle et de déformation de cisaillement de nano poutre, et nécessitent pas le facteur de correction de cisaillement. Les équations constitutives non locales d'Eringen sont utilisées dans les formulations. Les résultats de tous les modèles proposés sont presque identiques les uns aux autres, et sont en bon accord avec TBT et RBT.

## REFERENCES

- [1]- N.V. Lavrik, M.J. Sepaniak, P.G. Datskos, Cantilever transducers as a platform for chemical and biological sensors. *Rev. Sci. Instrum.* 75(2004), 2229-2253.
- [2]- K.L. Ekinci, M.L. Roukes, Nanoelectromechanical systems. *Rev. Sci. Instrum.*, 76(6) (2005), 061101.
- [3]- S. Iijima, C. Brabec, A. Maiti, J. Bernholc, Structural flexibility of carbon nanotubes. *J. Chem. Phys.* 104(5) (1996), 2089 – 2092. doi:10.1063/1.470966
- [4]- B.I. Yakobson, M.P. Campbell, C.J. Brabec, J. Bernholc, High strain rate fracture and C-chain unraveling in carbon nanotubes, *Comput. Mater. Sci.* 8(4) (1997), 341 – 348.
- [5]- E. Hernandez, C. Goze, P. Bernier, A. Rubio, Elastic properties of C and  $B_xC_yN_z$  composite nanotubes. *Phys. Rev. Lett.*, 80(1998), 4502 – 4505. doi:10.1103/PhysRevLett.80.4502
- [6]- D. Sanchez-Portal, E. Artacho, J.M. Soler, A. Rubio, P. Ordejo, Ab initio structural, elastic, and vibrational properties of carbon nanotubes. *Phys. Rev. B.* 59(1999), 12678 – 12688.
- [7]- D. Qian, G.J. Wagner, W.K. Liu, M.F. Yu, R.S. Ruoff, Mechanics of carbon nanotubes. *Appl. Mech. Rev.* 55(6)(2002), 495 – 533.
- [8]- W.D. Nix, H. Gao, Indentation size effects in crystalline materials: A law for strain gradient plasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 46(3) (1998), 411–425. doi:10.1016/S0022-5096(97)00086-0
- [9]- H.M. Ma, X.L. Gao, J.N. Reddy, A microstructure-dependent Timoshenko beam model based on a modified couple stress theory. *J. Mech. Phys. Solids*, 56(2008), 3379–3391. doi:10.1016/j.jmps.2008.09.007
- [10]- A.C. Eringen, Nonlocal polar elastic continua. *Int. J. Eng. Sci.* 10(1)(1972), 1–16.
- [11]- Z.P. Bazant, M. Jirasek, Nonlocal integral formulations of plasticity and damage: Survey of progress. *J. Eng.*

- Mech. 128(11) (2002) 1119–1149. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:11(1119)
- [12]- J. Peddieson, G.R. Buchanan, R.P. McNitt, Application of nonlocal continuum models to nanotechnology. *Int. J. Eng. Sci.* 41(3–5) (2003), 305–312. doi:10.1016/S0020-7225(02)00210-0
- [13]- L.J. Sudak, Column buckling of multiwalled carbon nanotubes using nonlocal continuum mechanics. *J. Appl. Physics*, 94(11) (2003), 7281–7287. doi:10.1063/1.1625437
- [14]- K. Amara, A. Tounsi, I. Mechab, E.A. Adda Bedia, Nonlocal elasticity effect on column buckling of multiwalled carbon nanotubes under temperature field. *Appl. Math. Modelling*, 34(12)(2010), 3933–3942.
- [15]- A.A. Pisano, P. Fuschi, Closed form solution for a nonlocal elastic bar in tension. *Int. J. Solids Struct.* 40(1) (2003), 13–23. doi:10.1016/S0020-7683(02)00547-4
- [16]- J.N. Reddy, Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams. *Int. J. Eng. Sci.* 45(2–8) (2007), 288–307. doi:10.1016/j.ijengsci.2007.04.004
- [17]- J.N. Reddy, Nonlocal nonlinear formulations for bending of classical and shear deformation theories of beams and plates. *Int. J. Eng. Sci.* 48(11) (2010), 1507–1518. doi:10.1016/j.ijengsci.2010.09.020
- [18]- Y.Y. Zhang, C.M. Wang, N. Challamel, Bending, buckling, and vibration of micro/nanobeams by hybrid nonlocal beam model. *J. Eng. Mech.* 136(5) (2010), 562–574. doi:10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000107
- [19]- H. Heireche, A. Tounsi, A. Benzair, Scale effect on wave propagation of double-walled carbon nanotubes with initial axial loading. *J. Appl. Phys.* 19(18)(2008), 185703. doi: 10.1088/0957-4484/19/18/185703.
- [20]- M. Maachou, M. Zidour, H. Baghdadi, N. Ziane, A. Tounsi, A nonlocal Levinson beam model for free vibration analysis of zigzag single-walled carbon nanotubes including thermal effects. *Solid State Communications*, 151(20)(2011), 1467–1471. doi:10.1016/j.ssc.2011.06.038
- [21]- M. Naceri, M. Zidour, A. Semmah, M.S.A. Houari, A. Benzair, A. Tounsi, Sound wave propagation in armchair single walled carbon nanotubes under thermal environment. *J. Appl. Phys.*, 110(2011), 124322.
- [22]- A. Besseghier, A. Tounsi, M.S.A. Houari, A. Benzair, L. Boumia, H. Heireche, Thermal effect on wave propagation in double-walled carbon nanotubes embedded in a polymer matrix using nonlocal elasticity. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 43(7)(2011), 1379 – 1386. doi:10.1016/j.physe.2011.03.008
- [23]- M. Zidour, K.H. Benrahou, A. Semmah, M. Naceri, H.A. Belhadj, K. Bakhti, A. Tounsi, The thermal effect on vibration of zigzag single walled carbon nanotubes using nonlocal Timoshenko beam theory. *Computational Mater. Sci.* 51(1)(2012), 252–260. doi:10.1016/j.commatsci.2011.07.021
- [24]- Y. Gafour, M. Zidour, A. Tounsi, H. Heireche, A. Semmah, Sound wave propagation in zigzag double-walled carbon nanotubes embedded in an elastic medium using nonlocal elasticity theory. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 48(2013), 118–123. doi:10.1016/j.physe.2012.11.006
- [25]- S. Benguediab, A. Tounsi, M. Zidour, A. Semmah, Chirality and scale effects on mechanical buckling properties of zigzag double-walled carbon nanotubes. *Composites Part B: Engineering*, 57(2014), 21-24.
- [26]- A. Semmah, A. Tounsi, M. Zidour, H. Heireche, M. Naceri, Effect of chirality on critical buckling temperature of a zigzag single-walled carbon nanotubes using nonlocal continuum theory. *Fullerenes, Nanotubes and Carbon Nanostructures*, 23(6)(2015), 518–522.
- [27]- H. Baghdadi, A. Tounsi, M. Zidour, A. Benzair, Thermal effect on vibration characteristics of armchair and zigzag single walled carbon nanotubes using nonlocal parabolic beam theory. *Fullerenes, Nanotubes and Carbon Nanostructures*, 23(3) (2015), 266–272.
- [28]- A. Tounsi, H. Heireche, H.M. Berrabah, I. Mechab, Comment on ‘Vibration analysis of fluid-conveying double-walled carbon nanotubes based on nonlocal elastic theory’, *J. Phys.–Condens. Matter.*, 21(44)(2009), 448001.
- [29]- B. Arash, R. Ansari, Evaluation of nonlocal parameter in the vibrations of single-walled carbon nanotubes with initial strain. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 42(8)(2010), 2058–2064.
- [30]- Q. Wang, C.M. Wang, The constitutive relation and small scale parameter of nonlocal continuum mechanics for modeling carbon nanotubes. *Nanotechnology*, 18(7)(2007), 075702. doi:10.1088/0957-4484/18/7/075702.
- [31]- Q. Wang, Wave propagation in carbon nanotubes via nonlocal continuum mechanics. *J. Appl. Phys.* 98(2005), 124301. doi:10.1063/1.2141648
- [32]- C.M. Wang, S. Kitipornchai, C.W. Lim, M. Eisenberger, Beam bending solutions based on nonlocal Timoshenko beam theory. *J. Eng. Mech.* 134(6) (2008), 475–481. doi:10.1061/(ASCE)0733-9399(2008)134:6(475)
- [33]- A. Tounsi, H. Heireche, E.A. Adda Bedia, Comment on “Free transverse vibration of the fluid-conveying single-walled carbon nanotube using nonlocal elastic theory”. [*J. Appl. Phys.* 103, 024302 (2008)]. *J. Appl. Phys.*, 105(2009), 126105. doi:10.1063/1.3153960