

# Journal of Materials and Engineering Structures

## Research Paper

### Etude d'une console en matériaux piézo-thermo-élastique

### Study of a Piezo-Thermo-Elastic Materials Console

**Berrabah Hamza Madjid<sup>a,c,\*</sup>, Adda Bedia El Abbas<sup>b,c</sup>, Fahsi Bouazza<sup>b,c</sup>**

<sup>a</sup> Département de génie civil, centre universitaire de Relizane, Relizane, Algérie

<sup>b</sup> Département de génie civil, université de Djillali Liabes, Sidi Bel Abbes, Algérie

<sup>c</sup> Laboratoire des matériaux et hydrologies, Sidi Bel Abbes, Algérie

#### ARTICLE INFO

##### Article history :

Received 5 February 2015

Revised 7 June 2015

Accepted 7 September 2015

##### Mots clés:

poutre composite

FGM

Consoles piezo-thermo-élastique

fraction volumique

##### Keywords:

Composite beam

FGM

Piezo-thermo-elastic consoles

volume fraction

#### R E S U M E

Dans la première partie de ce travail, des expressions analytiques ont été déterminées pour les contraintes à travers l'épaisseur d'une poutre composite soumise à une excitation électrique. Dans la deuxième partie de cette étude, on s'intéresse à la théorie de l'élasticité qui est utilisée pour obtenir des solutions exactes des consoles piezo-thermo-élastique graduellement évaluée sous différents chargements couplés. Ces solutions sont utilisées pour identifier le paramètre piézoélectrique et les coefficients thermiques des matériaux. En outre, des résultats numériques sont obtenus pour l'analyse de la console chargée par deux différents types de chargement. Dans cette partie d'étude on montre aussi que le changement linéaire des paramètres thermiques du matériau n'influe pas sur la distribution de la contrainte et l'induction de la poutre. Cependant il influe sur les composants de la déformation, champ électrique, le déplacement et le potentiel électrique de la console.

#### A B S T R A C T

In the first part of this work, analytical expressions were determined for the stresses through the thickness of a composite beam submitted to electrical excitation. In the second part of this study we are interested in the theory of elasticity, which is used to obtain exact solutions of piezo-thermo-elastic consoles gradually coupled evaluated under different loads. These solutions are used to identify the piezoelectric parameter and thermal coefficients of the materials. In addition, numerical results are obtained for the analysis of the loaded console by two different types of loading. In this study we show also that changing the linear thermal parameters of the material does not affect the distribution of the stress and the induction of the beam. However it affects the components of the deformation, electric field, the displacement and the electric potential of the console.

\* Corresponding author Tel.: +213790351763.

b\_hamza\_2005@yahoo.fr

## 1 INTRODUCTION

Dès la découverte de l'effet de la piézoélectricité en 1880 par les frères Curie, les matériaux piézoélectriques font l'objet d'une large application dans la technologie, tels que les recherches sur les moteurs piézoélectriques ultrasoniques, le contrôle de la vibration de différents types de structures [1], actionneur [2-4], etc. Les applications dans la technologie, les matériaux piézoélectriques sont conçus souvent en monocouche ou bicouche, sont mécaniquement collées par une couche adhésive [5, 6]. Sirohi et Chopra [7] ont présenté une discussion détaillée sur les mesures de déformation dans les piezo-céramiques (PZT) et les capteurs en piézo-film (PVDF) comparés avec des déformations conventionnelles. Les principales faiblesses de ces dispositifs en sandwich sont que la couche adhésive peut se fissurer à basse température et se décoller à haute température, ce qui réduira la durée de vie et la fiabilité de ces dispositifs piézoélectriques. Parfois, le chargement thermique est loin d'être la raison principale de la rupture de ces structures intelligentes. Par conséquent, les effets du chargement thermique ont attiré une attention particulière ces dernières années. Par exemple, Schult et al. [8] ont discuté sur les propriétés et la modélisation des matériaux piézoélectriques à des températures modérément élevées. Raja et al. [9] ont présenté une formulation généralisée des éléments finis en piezo-thermo-élastique d'une poutre stratifiée avec des matériaux piézoélectriques composés de capteurs/actionneur distribués. Birman [10] a étudié les effets de la température sur les capteurs piézoélectriques et un substrat en composite, et il a constaté que même les fluctuations modérées de la température (environ 200°C) peuvent changer d'une manière significative la lecture de la tension à partir d'un capteur piézoélectrique. Tian et Shen [11] ont achevé une analyse numérique du comportement thermomécanique des structures piézoélectriques sous des déformations finies. Pour améliorer la durabilité des structures piézoélectriques, les matériaux piézoélectriques à gradient évaluée (FGPM) ont été développés et utilisés pour produire des dispositifs, tel que les capteurs et les actionneurs [12, 13]. Lorsque les matériaux piézoélectriques sont conçus avec une variation graduelle dans le matériau considéré dans une ou deux dimensions, ils peuvent surmonter le décollement et la fissuration de la couche adhésive et en même temps réduire la contrainte mécanique. En se basant sur un modèle analytique simple, Hauke et al. [14] ont étudié un type d'actionneur piézoélectrique multi morphe et ont prédit le comportement des actionneurs en matériau à gradient évalué (FGM). En utilisant la théorie de l'élasticité classique, Kouvatov et al. [15] ont donné non seulement quelques solutions pour une poutre console avec des propriétés variant graduellement mais aussi une synthèse succincte de la conception et de la modélisation pour les micros actionneurs en console. Corr et Clark [1] ont comparé le comportement en flexion des actionneurs bimorphes et polymorphes en se basant sur une analyse par éléments finis. En général, plusieurs types de consoles piézoélectriques figurent dans la littérature parmi eux : il y a une fonction potentielle pour les forces de surface [16], le paramètre piézoélectrique ( $g_{31}$ ) change linéairement [17] et en dernier le paramètre élastique ( $S_{33}$ ) et les forces de surface changent simultanément [18], les analyses élastiques sont fournies et des solutions fondamentales sont obtenues.

### 1.1 Les équations de base pour les matériaux piezo-thermo-élastique en déformation plane

La poutre console utilisée comme modèle pour l'analyse des capteurs et des actionneurs piézoélectriques [19], montrée dans la figure 1, est étudiée. Les surfaces supérieures et inférieures de la poutre sont collées d'une façon continue aux électrodes. Pour décrire les équations de base du problème, un système de coordonnées cartésiennes ( $x, z$ ) est introduit dans la présente analyse.  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$ ,  $D_i$ ,  $E_i$  représentent respectivement, les composantes de déformation, contrainte, induction, et le champ électrique du milieu piézoélectrique. Les équations constitutives pour un matériau piezo-thermo-élastique en déformation plane sont exprimées comme suit [20]

$$\begin{cases} \varepsilon_x = S_{11}\sigma_x + S_{13}\sigma_z + g_{31}D_z - \mu_{11}\theta \\ \varepsilon_z = S_{13}\sigma_x + S_{33}\sigma_z + g_{33}D_z - \mu_{33}\theta \\ \gamma_{xz} = S_{44}\tau_{xz} + g_{15}D_x \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} E_x = -g_{15}\tau_{xz} + \xi_{11}D_x \\ E_z = -g_{31}\sigma_x - g_{33}\sigma_z + \xi_{33}D_z - q_3\theta \end{cases} \quad (2)$$

Où  $S_{ij}$ ,  $g_{ij}$  et  $\xi_{ij}$  sont respectivement les coefficients de souplesse, piézoélectrique et l'imperméabilité diélectrique ;  $\theta$  est la température ;  $\mu_{ii}$  et  $q_3$  sont respectivement la déformation thermique et le coefficient pyroélectrique du matériau. Sans la considération des forces de volume, les équations d'équilibre peuvent s'écrire comme suit

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_{11} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_{33} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = 0 \quad (5)$$

A partir de l'équation (2), on dérive la première équation du système d'équation (2) par rapport à  $x$  et la deuxième par rapport à  $z$  et on fait la soustraction entre les deux équations, on aura

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = 0 \quad (6)$$

Après simplification on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_{11} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_{33} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = 0 \quad (7)$$

C'est-à-dire après l'élimination de tous les termes qui dépendent du système d'équation (2) et (3), ou

$$k_{11} = \frac{(-g_{33}S_{13} + g_{31}S_{33})q_3}{2S_{13}g_{31}g_{33} - g_{31}^2S_{33} + S_{13}^2\xi_{33} - g_{33}^2S_{11} - S_{11}S_{33}\xi_{33}} + \frac{(g_{33}g_{31}\mu_{33} - \mu_{11}S_{33}\xi_{33} + \mu_{33}S_{13}\xi_{33} - g_{33}^2\mu_{11})}{2S_{13}g_{31}g_{33} - g_{31}^2S_{33} + S_{13}^2\xi_{33} - g_{33}^2S_{11} - S_{11}S_{33}\xi_{33}} \quad (8)$$

$$k_{33} = -\frac{(-g_{33}S_{11} + g_{31}S_{13})q_3}{2S_{13}g_{31}g_{33} - g_{31}^2S_{33} + S_{13}^2\xi_{33} - g_{33}^2S_{11} - S_{11}S_{33}\xi_{33}} - \frac{(g_{31}^2\mu_{33} - \mu_{11}S_{13}\xi_{33} + \mu_{33}S_{11}\xi_{33} - g_{31}g_{33}\mu_{11})}{2S_{13}g_{31}g_{33} - g_{31}^2S_{33} + S_{13}^2\xi_{33} - g_{33}^2S_{11} - S_{11}S_{33}\xi_{33}} \quad (9)$$

Où  $k_{ij}$  est le coefficient de conductivité thermique. Les composants de déformation et le champ électrique sont reliés au déplacement ( $u, w$ ) et au potentiel électrique  $\varphi$  par les équations suivantes

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{cases} \quad (10)$$

Il est vérifié que le paramètre piézoélectrique ( $g_{31}$ ) joue un rôle important dans le jugement du comportement des matériaux piézoélectriques et les performances des produits piézoélectriques. Plusieurs recherches [14, 19, 21] ont été faites sur les propriétés des matériaux piézoélectriques avec différentes valeurs de  $g_{31}$ .

Dans le présent travail, on s'intéresse aux solutions exactes des poutres consoles piezo-thermo-élastiques. La propriété du gradient du paramètre piézoélectrique ( $g_{31}$ ) est prise en considération, alors que d'autres paramètres matériels sont supposés être constants. Parmi eux la propriété du gradient du paramètre piézoélectrique ( $g_{31}$ ) est supposée comme suit

$$g_{31} = r_1 z + r_2 \quad (11)$$

Où  $r_1$  et  $r_2$  sont des constantes matérielles. Les équations (1) - (3) ainsi que des conditions aux limites appropriées peuvent être utilisé pour étudier le problème en question.

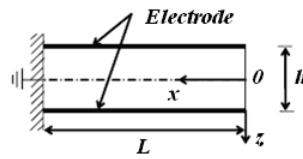


Fig. 1 console piézoélectrique

En substitution les équations (1) et (2) dans l'équation (3), on aura les équations suivantes en termes de contraintes  $\sigma_x, \sigma_z$  et d'induction  $D_x, D_z$

$$\begin{cases} [S_{11} \frac{\partial}{\partial z^2} + (S_{13} + \frac{S_{44}}{2}) \frac{\partial^2}{\partial x^2}] \sigma_x + [S_{33} \frac{\partial}{\partial x^2} + (S_{13} + \frac{S_{44}}{2}) \frac{\partial^2}{\partial z^2}] \sigma_z + (r_1 z + r_2) \frac{\partial^2 D_z}{\partial z^2} \\ + g_{33} \frac{\partial^2 D_z}{\partial x^2} + 2r_1 \frac{\partial D_z}{\partial z} - g_{15} \frac{\partial^2 D_x}{\partial x \partial z} - \mu_{11} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \mu_{33} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0 \\ (r_1 z + r_2 + g_{15}) \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + g_{33} \frac{\partial \sigma_z}{\partial x} + \xi_{11} \frac{\partial D_x}{\partial z} - \xi_{33} \frac{\partial D_z}{\partial x} + q_3 \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Pour l'équation (5), on remplace les équations (1), (2) dans (3), on utilise l'équation de compatibilité suivante

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \quad (13)$$

et à partir du système (2), on dérive la première équation du système (3) par rapport à  $x$  et la deuxième par rapport à  $z$  et on fait l'addition, on déduira l'expression suivantes

$$\frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x \partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} \right) \quad (14)$$

Pour la deuxième équation du système (5), on dérive l'équation (5) par rapport à  $(z)$  et on aura

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (15)$$

et l'équation (5) par rapport à  $(z)$

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (16)$$

Et on fait  $E_x - E_z = 0$  on obtient la deuxième équation du système (5). En effet, l'équation (5) est l'équation de compatibilité qui permet de trouver le déplacement et le potentiel électrique quand la contrainte et l'induction sont déjà obtenues.

## 2 Les solutions exactes d'une console piezo-thermo-élastique sous chargements couplés

Pour une console piézoélectrique (figure 1), soumise à des charges couplées (thermiques et mécaniques/électriques), les solutions exactes peuvent être déterminées en se basant sur la théorie de l'élasticité, le champ de la température peut être facilement obtenu.

### 2.1 Champ de la température

Supposons que la console piézoélectrique est chauffée homogènement sur la surface supérieure, la température aux surfaces supérieure et inférieure de la poutre est supposée constante et égale respectivement à  $\theta_0$  et 0. Ceci signifie que nous avons les conditions aux limites thermiques suivantes :

$$\theta(x, \frac{h}{2}) = 0 \quad , \quad \theta(x, -\frac{h}{2}) = \theta_0 \quad (17)$$

Dans ce cas, l'équation (2) deviendra

$$k_{33} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0 \quad (18)$$

Pour l'équation (8), on fait la solution de l'équation différentielle (7). Ainsi le champ de la température de la console peut être facilement obtenue comme suit

$$\theta = A + Bz \quad (19)$$

Après l'utilisation des conditions aux limites (6) les valeurs de  $A$  et  $B$  s'expriment comme suit

$$A = \theta_0 / 2, \quad B = -\theta_0 / h \quad (20)$$

## 2.2 Champs mécaniques et électriques

En utilisant l'équation (8), l'équation de compatibilité (5) peut être réécrite comme suit

$$\begin{cases} [S_{11} \frac{\partial}{\partial z^2} + (S_{13} + \frac{S_{44}}{2}) \frac{\partial^2}{\partial x^2}] \sigma_x + [S_{33} \frac{\partial}{\partial x^2} + (S_{13} + \frac{S_{44}}{2}) \frac{\partial^2}{\partial z^2}] \sigma_z + (r_1 z + r_2) \frac{\partial^2 D_z}{\partial z^2} \\ + g_{33} \frac{\partial^2 D_z}{\partial x^2} + 2r_1 \frac{\partial D_z}{\partial z} - g_{15} \frac{\partial^2 D_x}{\partial x \partial z} = 0 \\ (r_1 z + r_2 + g_{15}) \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + g_{33} \frac{\partial \sigma_z}{\partial x} + \xi_{11} \frac{\partial D_x}{\partial z} - \xi_{33} \frac{\partial D_z}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (21)$$

Pour trouver les champs mécaniques et électriques de la console piézoélectrique, la fonction d'Airy est utilisée. La fonction de contrainte ( $\phi$ ) et la fonction d'induction ( $\psi$ ) sont introduites. Les composantes de la contrainte et de l'induction peuvent être exprimées comme suit

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}, \quad \sigma_z = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}, \quad D_x = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad D_z = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (22)$$

Pour trouver les solutions, les deux types de chargements couplés précités sont considérés séparément.

### Cas I : console soumise aux chargements thermiques et électriques

En plus du chargement thermique, la console piézoélectrique est soumise aussi à une charge électrique (figure 2), c'est-à-dire, il y a une différence de potentiel électrique entre la surface supérieure et inférieure de la console

$$\varphi(x, -\frac{h}{2}) - \varphi(x, \frac{h}{2}) = V_0 \quad (23)$$

Dans ce cas, la fonction de contrainte et la fonction d'induction peuvent être supposées comme suit

$$\phi = 0, \quad \psi = bx \quad (24)$$

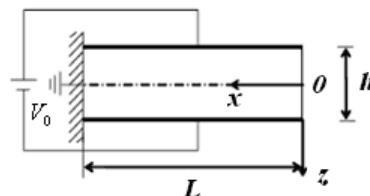


Fig. 2 console soumise à un chargement thermique et champs électrique

Où  $b$  est une constante inconnue à déterminer. Substituant l'équation (12) dans l'équation (10), les expressions de la contrainte et l'induction peuvent être obtenues par

$$\sigma_x = \sigma_z = \tau_{xz} = D_x = 0 \quad \text{et} \quad D_z = -b \quad (25)$$

Il est évident que l'équation de compatibilité (9) soit automatiquement satisfaite dans ce cas. En outre, la contrainte et l'induction satisfaisant aussi toutes les conditions aux limites suivantes.

Conditions aux limites mécaniques

$$\tau_{xz} = \sigma_z = 0 \quad \text{à} \quad z = \pm h/2 \quad , \quad \tau_{xz} = \sigma_x = 0 \quad \text{à} \quad x = 0 \quad (26)$$

Conditions aux limites électriques

$$D_x = 0 \quad x = 0, L \quad (27)$$

En utilisant l'équation (1), les composants de déformation et le champ électrique peuvent être obtenus par

$$\begin{cases} \varepsilon_x = -(r_1 z + r_2)b - \mu_{11}(A + Bz) \\ \varepsilon_z = -g_{33}b - \mu_{33}(A + Bz) \\ \gamma_{xz} = 0 \end{cases} \quad (28)$$

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_z = -\xi_{33}b - q_3(A + Bz) \end{cases} \quad (29)$$

Pour déterminer le déplacement et le potentiel électrique de la console, les conditions aux limites suivantes sont considérées

$$u(L, 0) = 0, \quad w(L, 0) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(L, 0) = 0, \quad \varphi(L, 0) = 0 \quad (30)$$

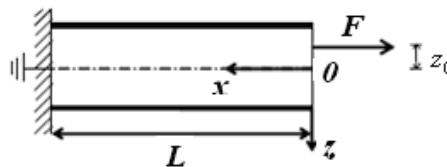
En intégrant l'équation (3), et en utilisant les conditions aux limites mentionnées ci-dessus et l'équation (11), les composantes du déplacement et le potentiel électrique ainsi que la constante inconnue  $b$  peuvent être déterminés par

$$\begin{cases} u = (r_1 z + r_2)b(L - x) + \mu_{11}(A + Bz)(L - x) \\ w = -g_{33}b - \mu_{33}\left(Az + \frac{B}{2}z^2\right) + \frac{1}{2}(r_1 b + B\mu_{11})(x^2 - 2xL + L^2) \end{cases} \quad (31)$$

$$\varphi = \xi_{33}bz - q_3\left(Az + \frac{B}{2}z^2\right) \quad (32)$$

Avec

$$b = -\frac{q_3 Ah + V_0}{\xi_{33} h} \quad (33)$$



**Fig. 3 console soumise à un chargement thermique et une charge excentrée**

L'analyse et les solutions ci-dessus montrent que les chargements couplés thermiques et électriques n'aboutissent pas à des composantes de contrainte dans les consoles à gradient évalué. Cette conclusion montre que la proposition est correcte. Pour une distribution du potentiel électrique sur n'importe quelle section transversale de la poutre, une expression quadratique est trouvée.

**Cas II :** console soumise à une charge thermique et mécanique

Pour la console piézoélectrique montrée en figure 3, et en plus du chargement thermique, une charge excentrique  $F$  est également appliquée à l'extrémité libre. Dans ce cas, la fonction de contrainte et la fonction d'induction peuvent être supposées suivant les expressions

$$\phi = -az^3 - cz^2, \psi = 0 \quad (34)$$

Où  $a$  et  $c$  sont des constantes inconnues à déterminer. Ensuite les composantes de la contrainte et de l'induction sont obtenus en utilisant l'équation (10)

$$\sigma_x = -6az - 2cz \quad \sigma_z = \tau_{xz} = D_x = D_z = 0 \quad (35)$$

Il est évident que l'équation de compatibilité (9) est satisfaite. En outre, des conditions aux limites mécaniques et électriques sont aussi vérifiées automatiquement telles que

$$\begin{cases} \sigma_z = \tau_{xz} = D_x = D_z = 0 & z = \pm h/2 \\ D_x = 0 & x = 0, L \end{cases} \quad (36)$$

Pour satisfaire les conditions aux limites mécaniques à l'extrémité libre de la console, le principe de Saint-Venant est introduit

$$\tau_{xz} = 0, \quad \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz = F, \quad \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = -Fz_0 \quad x = 0 \quad (37)$$

En substituant l'équation (20) dans l'équation (22), nous obtenons

$$a = \frac{2Fz_0}{h^3}, \quad c = -\frac{F}{2h} \quad (38)$$

En utilisant l'équation (1), les composantes de la déformation et du champ électrique peuvent être obtenues par

$$\begin{cases} \varepsilon_x = -2S_{11}c - \mu_{11}A - (6S_{11}a - B\mu_{11})z \\ \varepsilon_z = -2S_{13}c - \mu_{33}A - (6S_{13}a - B\mu_{33})z \\ \gamma_{xz} = 0 \end{cases} \quad (39)$$

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_z = 6ar_1z^2 + (2cr_1 + 6ar_2 - q_3B)z + 2cr_2 - q_3A \end{cases} \quad (40)$$

En outre, le déplacement et le potentiel électrique peuvent être obtenus respectivement comme suit

$$\begin{cases} u = (2S_{11}c + \mu_{11}A)(L-x) + (6S_{11}a + B\mu_{11})(L-x)z \\ w = -\frac{1}{2}(6S_{13}a + \mu_{33}B)z^2 - (2S_{13}c + A\mu_{33})z + \frac{1}{2}(6S_{11}a + \mu_{11}B)(x^2 - 2xL + L^2) \end{cases} \quad (41)$$

$$\varphi = -2ar_1z^3 - \frac{1}{2}(2cr_1 + 6ar_2 - q_3B)z^2 - (2cr_2 - q_3A)z \quad (42)$$

Il peut être déterminé à partir de cette solution que toutes les composantes de la contrainte à l'exception de  $\sigma_x$  sont nulles quand la console est soumise à une charge excentrée  $F$  et à un chargement thermique. Une expression cubique pour la distribution du potentiel électrique sur n'importe quelle section transversale de la console est également déterminée.

### 3 Identification des paramètres

L'identification des paramètres joue un rôle très important en décrivant avec précision le comportement interne d'un matériau de type FGM. Pour un matériau gradué, il est très difficile de traiter un spécimen homogène pour mesurer les propriétés d'un point matériel considéré en utilisant une méthode générale introduite par Marcus [22]. Beaucoup d'attention a été accordée pour identifier un matériau non homogène. Ashida et Tauchert [23] ont déterminé le champ de la température d'un corps entrant en contact en utilisant une approche de fonction potentielle comprenant trois potentiels de déplacement et deux potentiels électriques. Liu et Shi [17] ont présenté un procédé inverse informatique pour la

caractérisation des propriétés matérielles de FGMs utilisant la réponse du déplacement surfacique de la plaque. Franke et al. [24] ont mesuré les variations de la température des parties réelles et imaginaires du coefficient  $S_{11}^E$  en utilisant la méthode de résonance piézoélectrique. Fan et al. [25] ont développé une technique simple pour caractériser les modules élastiques des couches minces de n'importe quelle épaisseur. La méthode pour identifier les paramètres matériels pour les matériaux piezo-thermo-élastique fonctionnellement gradué est étudiée par plusieurs auteurs.

#### 4 Identification du paramètre piézoélectrique ( $g_{31}$ )

Se basant sur les résultats obtenus ci-dessus, le paramètre piézoélectrique ( $g_{31}$ ) peut être identifié. Pour déterminer les paramètres inconnus ( $r_1$  et  $r_2$ ) dans L'équation (4), une console chargé axialement par une force concentrée ( $F$ ) à l'extrémité libre, suivant les indications de la figure (4). Ignorant la température de la poutre, le potentiel électrique de la poutre peut être obtenu à partir de l'équation (25) comme

$$\varphi = \frac{F}{2h} r_1 z^2 + \frac{F}{2h} r_2 z \quad (43)$$

Les  $\varphi_U$  et  $\varphi_L$  indiquent respectivement le potentiel électrique sur les surfaces supérieures et inférieures de la poutre. Alors les paramètres ( $r_1$  et  $r_2$ ) peuvent être trouvés

$$r_1 = \frac{4(\varphi_U - \varphi_L)}{Fh}, \quad r_2 = \frac{\varphi_U + \varphi_L}{F} \quad (44)$$

Pour les paramètres  $r_1, r_2$ , on a  $\varphi_L = \varphi(h/2)$  et  $\varphi_U = \varphi(-h/2)$  c'est-à-dire

$$\varphi_L = \frac{F}{2h} r_1 \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{F}{2h} r_2 \frac{h}{2} \quad (45)$$

donc

$$\varphi_L = \frac{Fh}{8} r_1 + \frac{F}{2} r_2 \quad (46)$$

et

$$\varphi_U = \frac{F}{2h} r_1 \left(-\frac{h}{2}\right)^2 - \frac{F}{2h} r_2 \frac{h}{2} \quad (47)$$

donc

$$\varphi_L = \frac{Fh}{8} r_1 - \frac{F}{2} r_2 \quad (48)$$

en effet

$$\varphi_L + \varphi_U = \frac{Fh}{4} r_1 \quad (49)$$

qui donne

$$r_1 = \frac{4(\varphi_L + \varphi_U)}{Fh} \quad (50)$$

et

$$\varphi_L - \varphi_U = Fr_2 \quad (51)$$

qui donne aussi

$$r_2 = \frac{\varphi_L - \varphi_U}{F} \quad (52)$$

Qui nous donne l'équation (27). Les formules ci-dessus démontrent une fois le potentiel électrique sur les surfaces supérieures et inférieures de la console ont été obtenues à partir des essais, le paramètre piézoélectrique ( $g_{31}$ ) peut être identifié.

#### 5 Identification du coefficient de pyroélectrique ( $q_3$ )

Pour le cas où la console est chargée simultanément par une température élevée et une force concentrée, voir figure 4, le potentiel électrique de la console peut être déduit de l'équation (25) comme suit



$$\varphi = \left(\frac{B}{2}z^2 + Az\right)q_3 - (r_1z^2 + 2r_2z)c \quad (53)$$

De plus, si le symbole ( $\varphi_{LFT}$ ) est utilisé pour dénoter le potentiel électrique sur la surface supérieure de la poutre sous chargements couplés thermiques et mécaniques, le coefficient pyroélectrique ( $q_3$ ) peut être identifié

$$q_3 = \frac{8\varphi_{LFT} + (2r_1h^2 + 8r_2h)c}{h^2B + 4hA} = \frac{8\varphi_{LFT} + (2r_1h^2 + 8r_2h)c}{h\theta_0} \quad (54)$$

Pour l'équation (29), on prend l'équation (28) et on remplace  $z$  par  $h/2$  et  $\varphi = \varphi_{LFT}$ , La solution de (28) par rapport ( $q_3$ ) nous donne l'équation (29). Si la console est chargée par un chargement thermique seulement, alors nous avons

$$q_3 = \frac{8\varphi_{LT}}{h\theta_0} \quad (55)$$

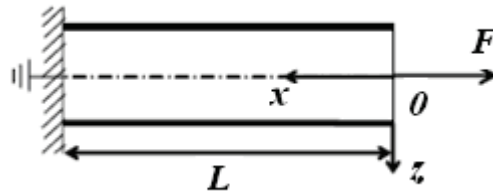


Fig. 4 console soumise à une charge concentrée

Là où le symbole ( $\varphi_{LT}$ ) dénote le potentiel électrique détecté sur la surface inférieure de la console, dans ce cas de chargement. L'équation (30) prouve qu'une fois que le potentiel électrique sur la surface inférieure est détecté quand la température fournie est seulement sur la surface supérieure de la console, dans ce cas là le coefficient pyroélectrique ( $q_3$ ) peut être identifié.

## 6 Cas spéciaux de chargement et comparaisons

En outre pour identifier les paramètres matériaux, on utilise les résultats obtenus ci-dessus qui peuvent être également utilisés à quelques cas spéciaux de chargement qui nous mènent à des résultats simples. Dans cette partie, les deux cas spéciaux de chargement sont étudiés par Hauke et al. [14]. Les paramètres géométriques de la console étudiés dans cette recherche sont choisis, c.-à-d.,  $L = 16\text{ mm}$  et  $h = 1.32\text{ mm}$ . Quelques changements des quantités physiques de la console sous le chargement thermique sont obtenus.

En outre, les résultats obtenus dans ce travail sont comparés à ceux obtenus dans les recherches théoriques et expérimentales

## 7 Console soumise seulement au chargement thermique

Si la console est soumise seulement à une température élevée, les solutions pourraient être directement déduites des résultats obtenus pour le cas I en assumant que  $V_0 = 0$  et  $\xi_{33} \rightarrow \infty$  ou dans le cas II en assumant que  $F = 0$ . En détail, nous pouvons obtenir les expressions simples suivantes

### Composantes de la contrainte et de l'induction

$$\sigma_x = \sigma_z = \tau_{xz} = D_x = D_z = 0 \quad (56)$$

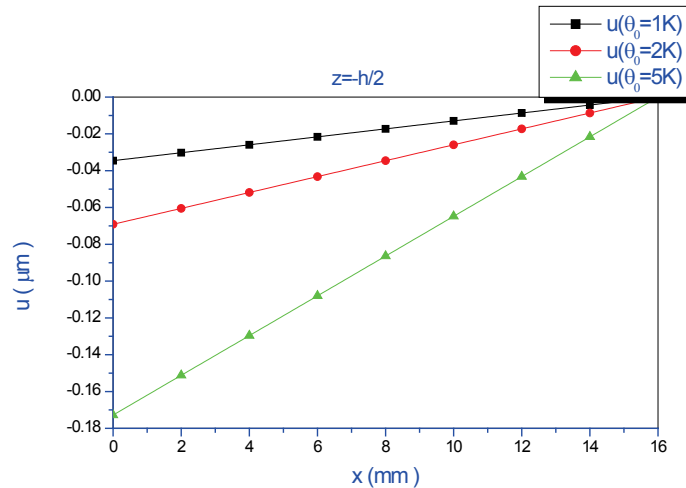
**Composantes de la déformation et du champ électrique**

$$\begin{cases} \varepsilon_x = -\mu_{11}(A + Bz) \\ \varepsilon_z = -\mu_{33}(A + Bz) \\ \gamma_{xz} = 0 \\ E_z = -q_3(A + Bz) \\ E_x = 0 \end{cases} \quad (57)$$

**Composantes du déplacement et potentiel électrique**

$$\begin{cases} u = \mu_{11}\left(\frac{1}{2} - \frac{z}{h}\right)(L - x)\theta_0 \\ w = -\frac{\mu_{33}}{2}\left(z + \frac{z^2}{h}\right)\theta_0 - \frac{\mu_{33}}{2h}(x^2 - 2xL + L^2)\theta_0 \\ \varphi = \frac{q_3}{2}\left(z + \frac{z^2}{h}\right)\theta_0 \end{cases} \quad (58)$$

Pour une console en cadmium sélénium et polarisée dans la direction de l'épaisseur, les paramètres matériau suivants  $\mu_{11} = -2.16 \times 10^{-6} 1/K$ ,  $\mu_{33} = -1.76 \times 10^{-6} 1/K$  et  $q_3 = 2.95 \times 10^4 N/(KC)$  sont utilisés dans la présente étude [26]. Les déplacements longitudinaux et transversaux de chaque point sur la surface supérieure d'actionneurs sont présentés sur les figures 5 et 6, respectivement, pour les différentes températures 1, 2 et 5 K. La figure 7 montre la distribution du potentiel électrique à n'importe quelle section transversale de la poutre sous différentes températures. Ces résultats sont compatibles avec les résultats obtenus par Kapuria et al. [26]. Pour une poutre cylindrique axisymétrique piezo-thermo-élastique transversalement isotrope fini.



**Fig. 5 le déplacement longitudinale  $u$  a  $z = h/2$**

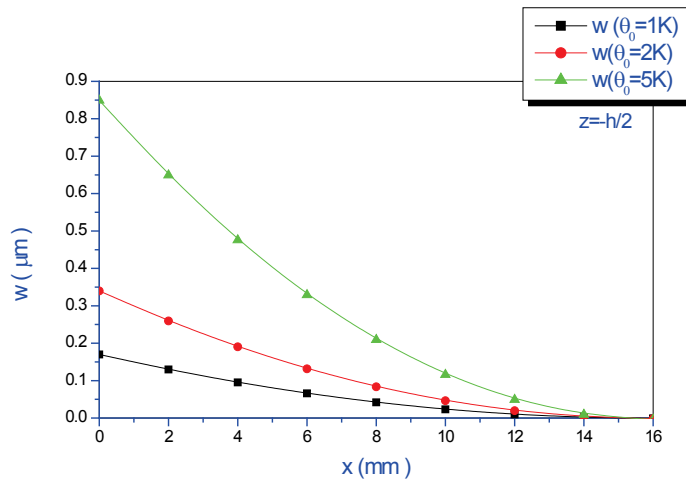


Fig. 6 le déplacement transversale w a z=-h/2

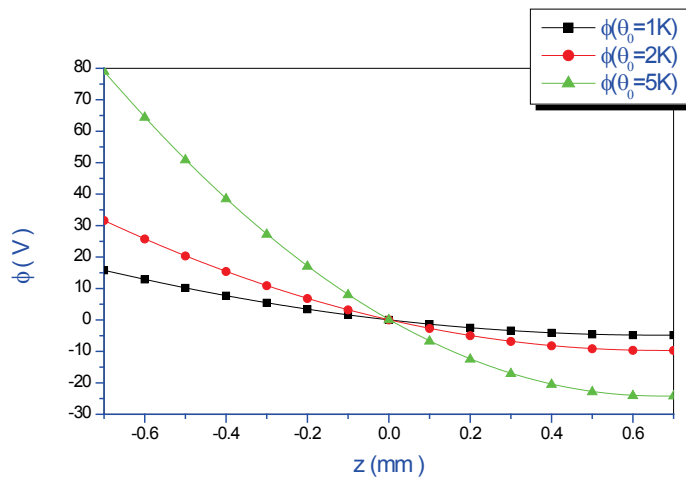


Fig. 7 la distribution du potentiel électrique à une section transversale de la console

**Console soumise seulement au champ électrique**

Si la console est soumise seulement à un champ électrique, les solutions peuvent être directement déduites des résultats obtenus au cas I en supposant  $\theta_0 = 0$  par

**Composantes de la contrainte et de l'induction**

$$\sigma_x = \sigma_z = \tau_{xz} = D_x = 0 \quad D_z = \frac{V_0}{h\xi_{33}} \tag{59}$$

**Composantes de la déformation et du champ électrique**

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{V_0}{h\xi_{33}}(r_1z + r_2)(L - x) \\ \varepsilon_z = \frac{V_0g_{33}}{h\xi_{33}} \\ \gamma_{xz} = 0 \\ E_z = \frac{V_0}{h} \\ E_x = 0 \end{cases} \quad (60)$$

**Composantes du déplacement et du potentiel électrique**

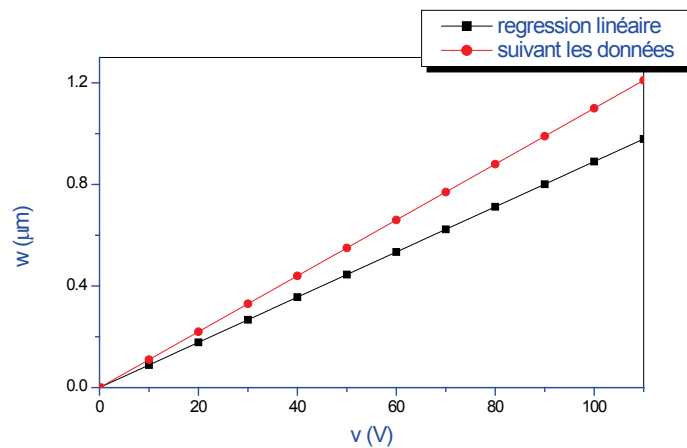
$$\begin{cases} u = -\frac{V_0}{h\xi_{33}}(r_1z + r_2)(L - x) \\ w = \frac{V_0}{h\xi_{33}}[g_{33}z - \frac{1}{2}r_1(x^2 - 2xL + L^2)] \\ \varphi = -\frac{V_0}{h}z \end{cases} \quad (61)$$

Maintenant, nous comparons les résultats obtenus dans cette étude à quelques résultats expérimentaux et théoriques obtenus par Hauke et al. [14]. Ainsi, la flexion transversale de la console exprimée seulement par un chargement de tension électrique est réécrite comme suit

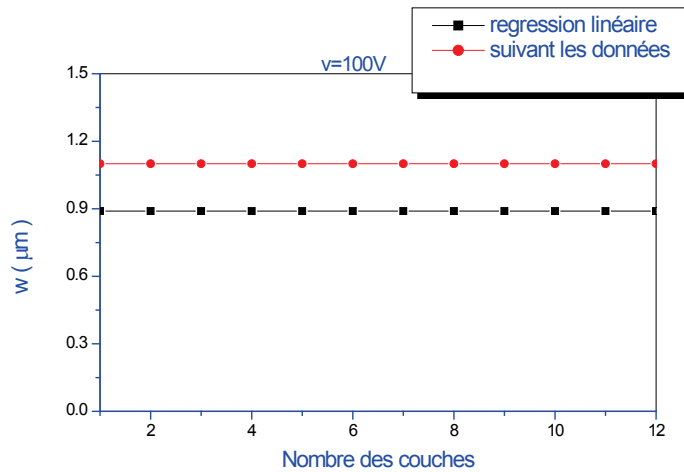
$$w = \frac{V_0}{h\xi_{33}}[g_{33}z - \frac{1}{2}r_1(x^2 - 2xL + L^2)] \quad (62)$$

Se basant sur la théorie de l'élasticité et après le procédé présenté par Marcus [21], on obtient la flexion ( $\delta$ ) à l'extrémité libre de l'actionneur par

$$\delta(N) = \frac{E_3L^2d_{31}^{max}}{h}(\frac{N+1}{N}) \quad (63)$$



**Fig. 8** la dépendance de la flexion lors de l'application de la tension



**Fig. 9 Flexion d'un actionneur basé sur différents modèles analytiques à  $V=100v$**

Où  $E_3$  est le champ électrique appliqué,  $d_{31}^{max}$  est le paramètre piézoélectrique de la couche inférieure de la poutre. Dans la recherche de Hauke et al. [14]. Sur la flexion des actionneurs de BaTiO<sub>3</sub>-céramiques, les spécimens de FGM sont composés de  $N$  couches avec différentes propriétés piézoélectriques. Pour la simplicité, le diélectrique ( $\epsilon_{33}^T = 2000F/m$ ) et d'autres paramètres matériau sont constants pour toutes les couches. En outre, chaque couche a la même épaisseur, indiquée par la formule  $t_L = h/N$  avec  $h = 1.32mm$  et une surface de  $16 \times 4mm^2$ . En se basant sur les relations des paramètres piézoélectriques, tous les paramètres matériaux utilisés dans la présente étude y compris la distribution du paramètre gradient ( $g_{31}$ ) peut être déterminé pour BaTiO<sub>3</sub>-céramiques. Nous avons  $g_{31} = 45.5zVpm/N$  ( $-h/2 \leq z \leq h/2$ ),  $g_{33} = 0.08Vpm/N$  et  $\xi_{33} = 0.0005m/F$  selon l'équation (37), la flexion  $\delta = w(0, -h/2)$  liée à la tension appliquée est montrée sur la figure 8. Celle-ci donne une pente de  $m = \frac{\partial w}{\partial V} = 0.0089 \mu m/V$ .

Pour comparer ses résultats, la régression expérimentale linéaire des données de Hauke et al. [14], l'actionneur trimorphe est également présenté dans la même figure. La régression de Hauke et al. [14] donne une pente de  $m = 0.011 \mu m/V$ . La figure 9 montre le rapport entre la flexion et le nombre de couches de l'actionneur à  $V = 100v$  (correspondant à un champ efficace de  $0.75kV/cm$ ) selon le modèle analytique et les résultats expérimentaux de Marcus [21], et selon l'équation (37), la flexion déterminée par la présente étude est de  $0.89 \mu m$ , qui est également présentée sur la figure 9.

On peut voir que les flexions obtenues expérimentalement et par le modèle analytique de  $N$ -morph diminuent avec l'augmentation du nombre de couches, et la flexion obtenue dans la présente étude est légèrement plus petite que celle donnée par une autre recherche basée sur le modèle  $N$ -morph. Il est clair que plus le nombre de couches augmente, plus la flexion revenant au résultat donné par l'équation (37) augmente, et ce, pour des actionneurs de FGM.

Dans l'analyse décrite ci-dessus, on considère que tous les coefficients matériaux thermiques sont constants. Les coefficients matériaux thermiques avec ces propriétés de gradient sont analysés. Les paramètres matériaux thermiques ( $\mu_{11}$ ,  $\mu_{33}$  et  $q_3$ ) varient linéairement le long de la direction  $z$ , qui est suffisante pour la plupart des applications dans la technologie, c'est-à-dire

$$\mu_{11} = m_1 z + m_2 \quad \mu_{33} = n_1 z + n_2 \quad q_3 = t_1 z + t_2 \quad (64)$$

Combinant les équations (1), (4), et (39), l'équation de compatibilité peut être réécrite

$$\begin{cases} [S_{11} \frac{\partial}{\partial z^2} + (S_{13} + \frac{S_{44}}{2}) \frac{\partial^2}{\partial x^2}] \sigma_x + [S_{33} \frac{\partial}{\partial x^2} + (S_{13} + \frac{S_{44}}{2}) \frac{\partial^2}{\partial z^2}] \sigma_z + (r_1 z + r_2) \frac{\partial^2 D_z}{\partial z^2} \\ + g_{33} \frac{\partial^2 D_z}{\partial x^2} + 2r_1 \frac{\partial D_z}{\partial z} - g_{15} \frac{\partial^2 D_x}{\partial x \partial z} - (m_1 z + m_2) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - (n_1 z + n_2) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0 \\ (r_1 z + r_2 + g_{15}) \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + g_{33} \frac{\partial \sigma_z}{\partial x} + \xi_{11} \frac{\partial D_x}{\partial z} - \xi_{33} \frac{\partial D_z}{\partial x} + (t_1 z + t_2) \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (65)$$

## 8 Conclusion

Il est évident que les composantes de la contrainte et de l'induction aussi bien que le champ de température obtenus dans cette étude pour chaque cas de chargement considéré satisfassent l'équation (40). En d'autres termes, le changement linéaire des paramètres matériaux thermiques ( $\mu_{11}$ ,  $\mu_{33}$  et  $q_3$ ) n'influent pas sur la distribution de la contrainte et l'induction pour cette console. Mais ils influent énormément sur la distribution de la contrainte, la force du champ électrique, et les composantes des déplacements aussi bien que le potentiel électrique de la console. En se basant sur la théorie de l'élasticité, l'analyse actuelle fournit quelques solutions exactes pour les consoles piezo-thermo-élastiques fonctionnellement graduées sous certains cas de chargements couplées. Comme problème inverse, les solutions obtenues dans cette présente étude ont été utilisées pour déterminer le profil de gradient pour le paramètre piézoélectrique ( $g_{31}$ ). Dans l'analyse actuelle, le paramètre piézoélectrique ( $g_{31}$ ) et le coefficient matériau thermique ( $q_3$ ) sont identifiés en se basant sur les résultats de la console sous un chargement électrique. Il est compréhensible que les paramètres puissent également être identifiés en termes de composantes du déplacement de la console. Le déplacement longitudinal  $u$  change linéairement avec la coordonnée  $x$  sous le chargement électrique et la température. Le plan de la section transversale avant le chargement reste le même après chargement pour les deux cas de chargement considérés. Le déplacement transversal  $w$  provoqué par le chargement électrique ou de la température est quadratique avec la coordonnée  $x$ . Le potentiel électrique change linéairement avec  $z$  à la section transversale quand le chargement électrique est appliqué, la distribution sera quadratique quand la température est fournie. La flexion de l'actionneur avec le comportement du gradient est légèrement plus petite que celui du modèle N-morph. Plus le nombre de couches du modèle N-morph augmente, plus la flexion diminue par rapport au résultat donné pour des actionneurs FGM.

## REFERENCES

- [1]- L.R. Corr, W.W. Clark, Energy Dissipation Analysis of Piezoceramic Semi-Active Vibration Control, J. Intel. Mat. Sys. Str. 12(2001) 729-736.
- [2]- P.W. Alexander, D. Brei, Piezoceramic Telescopic Actuator Quasi-static Experimental Characterization, J. Intel. Mat. Sys. Str. 14(10) (2003) 643–655.
- [3]- J. Sirohi, I. Chopra, Design and Development of a High Pumping Frequency Piezoelectric-hydraulic Hybrid Actuator, J. Intell. Mat. Sys. Str., 14(3) (2003) 135–147.
- [4]- J. Vendlinski, D. Brei, Dynamic Behavior of Telescopic Actuators, J. Intell. Mat. Sys. Str. 14(9) (2003) 577–585.
- [5]- J. Pritchard, C.R. Bowen, Characterisation of Mulyi-layer Actuators, Ferroelectrics, 273(2002) 255–260.
- [6]- M.T-K Hou, R. Chen, Effect of Width on the Stress-induced Bending of Micromachined Bilayer Cantilevers, J. Micromech. Microeng., 13(1) (2003) 141–148.
- [7]- J. Sirohi, I. Chopra, Fundamental Behavior of Piezoceramic Sheet Actuators, J. Intell. Mat. Sys. Str., 11(1) (2000) 47–61.
- [8]- M.J. Schult, M.J. Sundaresan, J. Mcmichael, D. Clayton, R. Sadler, B. Nagel, Piezoelectric Materials at Elevated Temperature, J. Intell. Mat. Sys. Str. 14(11) (2003)693–705.
- [9]- S. Raja, K. Rohwer, M. Rose, Piezothermoelastic Modeling and Active Vibration Control of Laminated Composite Beams, J. Intell. Mat. Sys. Str. 10(11) (1999) 890–899.
- [10]- V. Birman, Thermal Effects on Measurements of Dynamic Processes in Composite Structures using Piezoelectric Sensors, Smart Mater. Struct. 5(4) (1996) 379–385.
- [11]- X.G. Tian, Y.P. Shen, Finite Element Analysis of Thermo-mechanical Behaviour of Piezoelectric Structures under Finite Deformation, Acta mech. solida sin. 24(2) (2003) 169–178.
- [12]- X.H. Zhu, Q. Wang, Z.Y. Meng, A Functionally Gradient Piezoelectric Actuator Prepared by Powder

- Metallurgical Process in PNN-PZ-PT System. *Journal of Materials Science Letters*, 14(7) (1995) 516–518.
- [13]- P. Bouchilloux, K. Uchino, Combined Finite Element Analysis – Genetic Algorithm Method for the Design of Ultrasonic Motors, *J. Intell. Mat. Sys. Str.* 14(10) (2003) 657–667.
- [14]- T. Hauke, A. Kouvatov, R. Steinhausen, W. Seifert, H. Beige, H.T. Langhammer, H.P. Abicht, Bending Behavior of Functionally Gradient Materials, *Ferroelectrics* 238(2000) 195–202.
- [15]- A. Kouvatov, R. Steinhausen, W. Seifert, T. Hauke, H.T. Langhammer, H. Beige, H. Abicht, Comparison between Bimorphic and Polymorphic Bending Devices, *J. Eur. Ceram. Soc.* 19(6–7) (1999) 1153–1156.
- [16]- Z.F. Shi, General Solution of a Density Functionally Gradient Piezoelectric Cantilever and its Applications, *Smart Mater. Struct.* 11(1) (2002) 122–129.
- [17]- T.T. Liu, Z.F. Shi, Bending Behavior of Functionally Gradient Piezoelectric Cantilever, *Ferroelectrics*, 308:43–51.
- [18]- Z.F. Shi, Y. Chen, Functionally Graded Piezoelectric Cantilever Beam Under Load. *Arch. Appl. Mech.* 74(3–4) (2004) 237–247.
- [19]- A. Kruusing, Analysis and Optimization of Loaded Cantilever Beam Microactuators, *Smart Mater. Struct.* 9(2) (2000) 186–196.
- [20]- Z.Z.S. Ertao, Three Dimensional Exact Analysis of Functionally Gradient Piezothermoelectric Material Rectangular Plate, *Acta mech. sinica* 35(5) (2003) 542–552.
- [21]- M.A. Marcus, Performance Characteristics of Piezoelectric Polymer Flexure Mode Devices, *Ferroelectrics* 57(1984) 203–220.
- [22]- H.D. Bui, *Introduction Aux Problemes Inverses en Mécanique des Matériaux*, Editions EYROLLES, Paris, 1993.
- [23]- F. Ashida, T.R. Tauchert, Temperature Determination for a Contacting Body based on an Inverse Piezothermoelastic Problem, *Int. J. Solids Struct.* 34(20)(1997) 2549–2561.
- [24]- I. Franke, K. Roleder, S. Miga, A. Maillard, G. Kugel, Determination of the Elastic Properties of a Li<sub>2</sub>B<sub>4</sub>O<sub>7</sub> Single Crystal from the Piezoelectric Resonance, *Ferroelectrics*, 273(2002) 285–290.
- [25]- Z. Fan, P. Tsakiroopoulos, A.P. Miodownik, A generalized law of mixtures, *J. Mater. Sci.* 29(1994) 141-150.
- [26]- S. Kapuria, P.C. Dumir, S. Sengupta, Exact Piezothermoelastic Axisymmetric Solution of a Finite Transversely Isotropic Cylindrical Shell, *Comput. Struct.* 61(6) (1996) 1085–1099.