УДК 532.59

О.Г. Гоман, В.А. Катан

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОЛОЖЕНИЯ ЗОНЫ ОТРЫВА ТЕЧЕНИЯ ПРИ УДАРНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА И ЖИДКОСТИ

Задача об определении положения зоны отрыва течения при ударном взаимодействии твердого тела и жидкости сведена к решению трансцендентного уравнения относительно координаты начальной точки отрыва с использованием формул Адамара – Манглера для полученных расходящихся интегралов. Для случая удара вертикальной пластинки проведено сравнение с аналитическим решением поставленной задачи.

Ключевые слова: отрыв течения, удар, трансцендентное уравнение, формулы Адамара – Манглера, вертикальная пластинка.

Задачу про визначення положення зони відриву течії за умов ударної взаємодії твердого тіла та рідини зведено до розв'язання трансцендентного рівняння відносно координати початкової точки відриву із застосуванням формул Адамара – Манглера для отриманих розбіжних інтегралів. Для випадку удару вертикальної пластини проведено порівняння з аналітичним розв'язком поставленої задачі.

Ключові слова: відрив течії, удар, трансцендентне рівняння, формули Адамара – Манглера, вертикальна пластина.

In this paper the problem of determining the position of the flow separation zone at the impact interaction of a solid and a liquid is reduced to the solution of the transcendental equation for the coordinates of the starting point of separation using Hadamard – Manglera formulas for obtained divergent integrals. The case of impact of vertical plate compared with the analytical solution of the problem.

Key words: separation of flow, impact, transcendental equation, Hadamard – Manglera formulas, vertical plate.

Введение. Пусть вертикальная пластина ширины b плавает на свободной поверхности несжимаемой идеальной жидкости, находящейся в покое и занимающей нижнее полупространство. Ось Oy системы декартовых координат направим по нормали к невозмущенной свободной поверхности жидкости внутрь последней вдоль пластинки, а ось Ox – вдоль свободной поверхности перпендикулярно плоскости пластинки (рис.1).

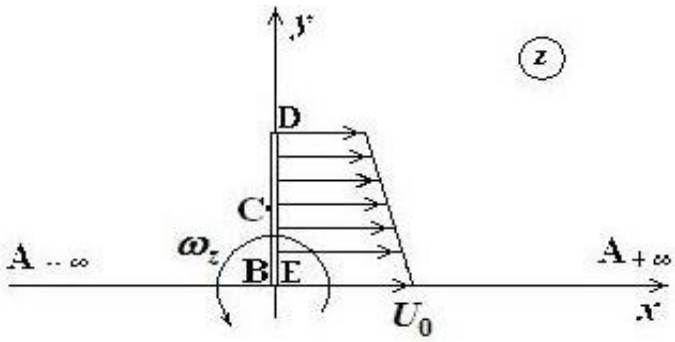

Рис. 1. Схема к постановке задачи удара пластинки с отрывом

© О.Г. Гоман, В.А. Катан, 2015

Предполагается, что ударные импульсы подействовали так, что после удара пластинка получает только компоненту скорости вдоль оси *Ox*, а также угловую скорость вокруг оси, перпендикулярной плоскости *Oxy*, и на задней стороне пластинки BD образуется зона отрыва BC, которая распространяется от точки B на свободной поверхности сзади пластинки до некоторой точки C (положение которой заранее неизвестно).

Возникшее в результате удара течение жидкости будет потенциальным и его можно описать комплексным потенциалом

$$w = \varphi(z) + i\psi(z),$$

где $\varphi(z)$ – потенциал течения; $\psi(z)$ – функция тока.

В результате удара тело приобретает скорость

$$\overline{V} = (V_0 + \omega_z x)\overline{j},$$

где V_0 – поступательная скорость; ω_z – угловая скорость тела.

В предположении о наличии отрыва условие безотрывности течения распространяется только на участок контура EDC и имеет вид

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{EDC} = \overline{V}\cdot\overline{n}, \text{ или } v_x = v_0 - \omega_z y.$$

Таким образом, на участках ED и DC

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = v_x = U_0 - \omega_z y,$$

откуда

$$\psi = U_0 y - \omega_z \frac{y^2}{2} + C_0,$$

причем несущественную константу C_0 положим равную нулю. На свободных границах – участках $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$ оси *Ox*, а также на участке отрыва CB – имеем условие равенство нулю импульсного давления, то есть

$$\varphi = 0.$$

Постановка математической задачи. Как показано в [5], поставленная задача сводится к краевой задаче теории аналитических функций, решение которой может быть представлено в виде квадратур

$$\chi(t) = \frac{1}{\pi i} Z(t) \int_{-q}^{b} Z^{-1}(\xi) \frac{f(\xi)}{\xi - t} d\xi,$$

где $Z(t) = \sqrt{(t+q)(t-b)}$ и $Z(\xi) = i\sqrt{(\xi+q)(b-\xi)}$.

Следовательно, решение задачи сводится к вычислению интеграла

$$I(t) = \int_{-q}^{b} Z^{-1}(\xi) \frac{f(\xi)}{\xi - t} d\xi = -i \int_{-q}^{b} \frac{1}{\sqrt{(q+\xi)(b-\xi)}} \frac{U_0\sqrt{b^2-\xi^2} - \omega_z \dfrac{b^2-\xi^2}{2}}{\xi - t} d\xi.$$

Представим этот интеграл в виде

$$I(t) = -iJ(t),$$

где $J(t) = U_0 J_1(t) - \frac{\omega_z}{2} J_2(t)$ и введены обозначения

$$J_1(t) = \int_{-q}^{b} \sqrt{\frac{b+\xi}{q+\xi}} \frac{d\xi}{\xi - t}, \qquad J_2(t) = \int_{-q}^{b} \frac{b^2 - \xi^2}{\sqrt{(q+\xi)(b-\xi)}} \frac{d\xi}{\xi - t}.$$

Тогда

$$J(t) = U_0 J_1(t) - \frac{\omega_z}{2} J_2(t).$$

Как известно, эта задача допускает аналитическое решение [5].

Аналитическое исследование. Предполагая наличие только одной зоны отрыва, найдем ее положение по принципу Огазо [6] с использованием сингулярных интегралов в смысле Адамара [3;4]. Для определения положения отрыва – координаты q – согласно принципу Огазо необходимо определить потенциал течения $\varphi(t)$ на участке безотрывного обтекания $t = \xi + i0,\ \xi \in (-q, 1)$. Интегралы $J_1(t)$ и $J_2(t)$ являются интегралами типа Коши по отрезку действительной оси $\xi \in (-q, 1)$. По формулам Племеля – Сохоцкого при переходе из верхней полуплоскости в точку ξ_0 на отрезке $(-q, 1)$ получим

$$J_1^+(\xi_0) = \pi i \frac{(\xi_0 + 1)^{1/2}}{(\xi_0 + q)^{\frac{1}{2}}} + J_1(\xi_0), \tag{1}$$

$$J_2^+(\xi_0) = \pi i \frac{(\xi_0 + 1)}{(\xi_0 + q)^{\frac{1}{2}}} + J_2(\xi_0), \tag{2}$$

где $J_1(\xi_0)$ и $J_2(\xi_0)$ – особые интегралы в смысле главного значения Коши. Выделяя действительные и мнимые части в решении $\chi(t)$, приходим к следующим выражениям для функции тока и потенциала течения на смоченной части пластинки:

$$\psi(\xi_0) = (\xi_0 + 1)^{1/2} (1 - \xi_0)^{1/2} \left[bU_0 - \frac{\omega_z b^2}{2} (\xi_0 + 1)^{1/2} (1 - \xi_0)^{1/2} \right], \tag{3}$$

$$\varphi(\xi_0) = \frac{1}{\pi} \sqrt{(\xi_0 + q)(1 - \xi_0)} \left[bU_0 J_1(\xi_0) - \frac{\omega_z b^2}{2} J_2(\xi_0) \right]. \tag{4}$$

Формула (3), как и следовало ожидать, представляет граничное условие на участке $(-q < \xi_0 < 1)$.

Согласно принципу Огазо положение точки отрыва q находим из условия

$$\lim_{\xi_0 \to -q+0} \frac{\partial \varphi(\xi_0)}{\partial q} = 0 \cdot$$

Из (4) имеем

$$\frac{\partial \varphi(\xi_0)}{\partial q} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1-\xi_0}{\xi_0+q}}\left[bU_0 J_1(\xi_0) - \frac{\omega_z b^2}{2} J_2(\xi_0)\right] +$$

$$+\frac{1}{\pi}\sqrt{(\xi_0+q)(1-\xi_0)}\left[bU_0 \frac{\partial J_1(\xi_0)}{\partial q} - \frac{\omega_z b^2}{2}\frac{\partial J_2(\xi_0)}{\partial q}\right].$$

Переходя к пределу $\xi_0 \to -q+0$, приходим к следующему уравнению для определения параметра q:

$$bU_0 J_1(-q) - \frac{\omega_z b^2}{2} J_2(-q) = 0, \tag{5}$$

(в предположении, что интегралы $\frac{\partial J_k}{\partial q}(\xi_0), \quad k = 1,2$ при $\xi_0 \to -q+0$ ограничены или возрастают не быстрее, чем $\frac{1}{(\xi_0+q)^{\frac{1}{2}}}$, что будет показано в дальнейшем).

При этом при непосредственной подстановке $\xi_0 = -q$ в выражения для интегралов $J_k(\xi_0), \quad k = 1,2$ они превращаются в сингулярные интегралы вида

$$J_1(-q) = \int_{-q}^{1} \frac{(\xi+1)^{1/2}}{(\xi+q)^{\frac{3}{2}}} d\xi \qquad \text{и} \qquad J_2(-q) = \int_{-q}^{1} \frac{(\xi+1)}{(\xi+q)^{\frac{3}{2}}} d\xi, \tag{6}$$

которые являются расходящимися, и их будем понимать в смысле конечной части по Адамару.

Уравнение для определения q (5) может быть записано в виде зависимости

кинематического параметра Λ_n от неизвестного q:

$$\Lambda_n = \frac{\omega_z b}{U_n} = \frac{2J_1(-q)}{J_2(-q)}. \tag{7}$$

При помощи преобразований, описанных в [6], для интегралов $J_k(-q), \quad k = 1,2$ будем иметь формулы

$$J_k(-q) = \frac{2}{(1+q)^{1-k/2}} JJ_k(-q), \quad k = 1,2, \tag{8}$$

где

$$JJ_1(-q) = \int_{\varepsilon}^{1} \frac{\left(1+t^2 - q\left(1-t^2\right)\right)^{1/2} - (1-q)^{1/2}}{t^2} dt +$$

$$+ (1-q)^{1/2}\left[\frac{1}{2}(1+q)\varepsilon - (1-q)\right],$$

$$JJ_2(-q) = \int_{\varepsilon}^{1} \frac{\left(1+t^2 - q\left(1-t^2\right)\right) - (1-q)}{t^2} dt + \left[\frac{1}{2}(1+3q)\varepsilon - (1-q)\right],$$

а ε – малая величина.

Следовательно, зависимость кинематического параметра от неизвестного параметра q имеет вид

$$\mathrm{K} = \frac{U_0}{\omega_z b} = \frac{(1+q)^{1/2}}{2} \frac{JJ_2(-q)}{JJ_1(-q)}. \tag{9}$$

По приведенным формулам была построена зависимость кинематического параметра $\mathrm{K} = \frac{U_0}{\omega_z b}$ от положения начальной точки отрыва q. Проведено сравнение для случая горизонтального удара с вращением вертикальной пластины. Аналитические решения и решения, полученные через интегралы в смысле Адамара, сравнивались по зависимости кинематического параметра $\mathrm{K} = \frac{U_0}{\omega_z b}$ от положения начальной точки отрыва q/b. Результаты расчетов для вертикальной пластинки представлены в виде графика зависимости кинематического параметра $\Lambda = \frac{\omega_z b}{U_0} = \frac{1}{\mathrm{K}}$ от безразмерного геометрического параметра q (рис. 2). Совпадение результатов хорошее.

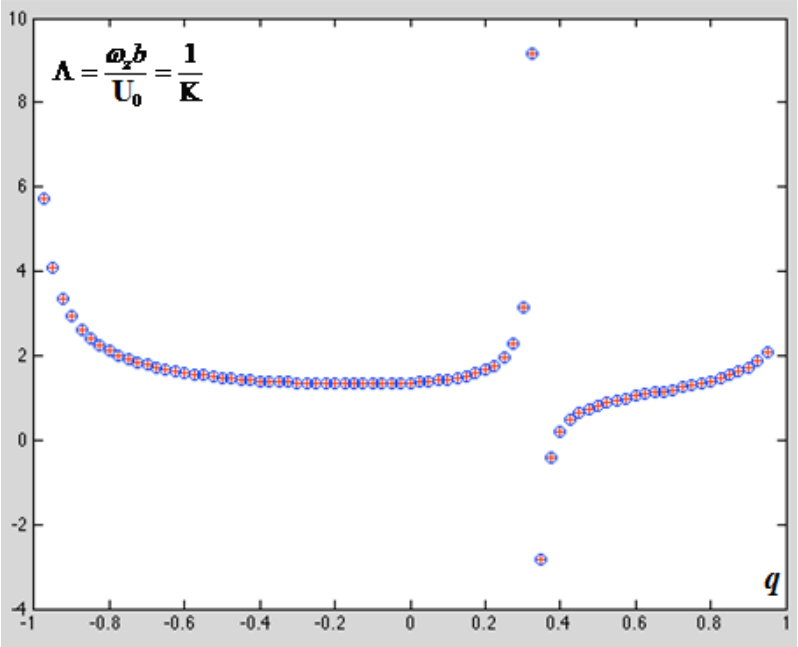

Рис. 2. Зависимость кинематического параметра от положения точки отрыва для горизонтального удара с вращением вертикальной пластинки:
«+» – расчет по формулам Адамара – Манглера (ε=0.001);
«о» – аналитическое решение

Выводы. Хорошее совпадение данных аналитического решения и решения, полученного через интегралы в смысле Адамара, позволяет сделать вывод о применимости данного подхода к определению характеристик отрывных зон при ударном взаимодействии твердого тела и жидкости.

Библиографические ссылки

1. **Седов, Л. И.** Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики [Текст]/ Л.И. Седов. – М.: Наука,1980. – 448 с.

2. **Мусхелишвили, Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости [Текст]/ Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука,1966. – 707с.

3. Общая теория аэродинамики больших скоростей [Текст]/ под ред. У.Р. Сирса. – М.: Воениздат, 1962. – 300 с.

4. **Адамар, Ж.** Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа [Текст]/ Ж. Адамар. – М.: Наука, 1978. – 352 с.

5. **Гоман, О. Г.** Математическое моделирование взаимодействия несжимаемой жидкости и вертикальной пластины, плавающей на ее поверхности при ударе с вращением в условиях отрыва [Текст]/ О. Г. Гоман, В. А. Катан // Вісн. ДНУ. Сер.: Механіка. – 2012. – № 5 (20). – Вип. 16, Т.1. – С. 87 – 93.

6. **Гоман, О. Г.** Ударное взаимодействие несжимаемой жидкости и вертикальной пластины, плавающей на ее поверхности, в условиях образования одной зоны отрыва и наличии вращения [Текст]/ О. Г. Гоман, В. А. Катан // Вісн. ДНУ. Сер.: Механіка. – 2013. – № 5(21). – Вип. 17, Т.1. – С. 191 – 205.

Надійшла до редколегії 14.05.2015