ALGORITMI DE MODELARE A TIMPULUI DE AŞTEPTARE ÎN CAZUL SISTEMULUI DE AŞTEPTARE GENERALIZAT, APLICAȚI ÎN PORTUL MARITIM CONSTANȚA

Rodica Ionela ȚICU

Universitatea Maritimă din Constanța, România

Lucrarea de față contribuie cu rezultate inovatoare cu privire la aplicarea teoriei aşteptării şi, implicit, a modelelor de aşteptare în Portul Maritim Constanța. Ținând cont de specificul modelelor de aşteptare şi de realitatea din port, rezultatele cercetării contribuie la eficientizarea calității şi cantității operărilor din cadrul unui terminal maritim.

Datorită dezvoltării rapide a Portului Maritim Constanța, precum şi a sistemelor, a apărut necesitatea aplicării unor sisteme îmbunătățite de aşteptare care necesită crearea unor noi modele matematice de aşteptare.

Cuvinte-cheie: *transformata Laplace-Stieltjes, modele generalizate de aşteptare, timp de aşteptare, variabile aleatoare, teoria aşteptării, port maritim, funcție de repartiție.*

WAITING TIME MODELING ALGORITHMS IN THE CASE OF GENERALIZED QUEUING SYSTEM APPLIED IN CONSTANTA SEA PORT

This paper contributes with innovative results on applying the *queuing* theory and thus waiting models in the Constanta sea port. Considering the waiting models specific and the reality of the Sea Port, the research results contribute to efficient operations over the quality and quantity within a marine terminal.

Through the rapid development of Constantsa Sea Port improved waiting systems that require the creation of new mathematical waiting models was necessary.

Keywords: *Laplace-Stieltjes transforms, generalized waiting models, waiting time, random variables, queuing theory, Sea Port, distribution function.*

Introducere

Modelul M/G/1 cu intrări în grup

Vom prezenta pe larg modelul M/G/1; ne vom limita aici la a prezenta pe scurt unele rezultate mai importante. Menționăm că Gaver în [1] face un studiu detaliat al sistemului pe care îl avem aici în vedere.

Aşadar, să presupunem că în sistemul M/G/1 intrările au loc în grup şi să notăm cu τ_n intervalul de timp dintre momentele sosirii a două grupe consecutive (a n-a şi a $(n+1)$-a). Avem:

$F(x) = P(\tau_n \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}, 0 < \lambda < \infty, x > 0$

Dacă în a n-a grupă (grupele fiind numerotate în ordinea intrărilor în sistem) sunt r_n unități, fie

$$P\{r_n = j\} = \pi_j, n \in N, \tag{1}$$

atunci numărul de unități care sosesc în intervalul de timp $0, t$, $t > 0$ este egal cu $\sum r_i$, unde $i \in N$ ia acele valori pentru care $0 < \sum_{\alpha=1}^{i} \tau_\alpha < t$. (Amintim că $\sum_{\alpha=1}^{n} \tau_\alpha$ reprezintă momentul în care intră în sistem a n-a grupă). Stările sistemului sunt determinate prin numărul de unități în sistem în momentul t_n^* al plecării celei de a n-a unități şi prin momentul t_n^* în care părăseşte sistemul (după servire) a n-a unitate. Aşa cum am văzut, şirul acestor stări formează un lanț Markov. Fie $\xi(t_0)$ numărul de unități în sistem la momentul $t_0 (t_0 \geq 0)$ şi $\xi(t_n^* + 0) = \xi_n^*$ numărul unităților din sistem imediat după plecarea celei de a n-a unități. Să notăm prin

$$P_{ij}^{(n)}(t) = P\{\xi_n^* = j, t_n^* > t_0 + t | \xi(t_0) = i\} \; i, j \in N$$

în ipoteza că sistemul nu s-a eliberat niciodată în intervalul $(t_0, t_n^*]$. Probabilitatea $P_{ij}^{(n)}(t)$ satisface ecuația Chapman-Kolmogorov

$$P_{ij}^{(n+1)}(t) = \sum_{k=-1}^{j-1} \int_0^t P_{ij-k}^{(n)}(t-u) P_{k+1}(u) dH(u) \tag{2}$$

unde H este funcția de repartiție a serviciilor, $P_n(t) = P\{\sum r_i = n\}, \left(0 < \sum_{\alpha=1}^{i} \tau_\alpha < t\right)$

Soluția ecuației (2) se determină folosind transformata Laplace-Stieltjes şi funcția generatoare. Se calculează apoi caracteristicile modelului [2]. Găsim că lungimea medie a perioadei de ocupare $E[\theta]$ este egală cu $E[\theta]=\frac{b}{1-\lambda b E[r_n]}$, unde $0\le b=E[s_n]<\infty$ este valoarea medie a timpului de servire s_n a celei de a n-a unități. Obținem de asemenea $D^2[\theta]=\frac{D^2[s_n]+\lambda b E[r_n^2]E[s_n^2]}{1-\lambda b E[r_n]}$. Numărul mediu de unități U_Γ servite în perioada de ocupare şi dispersia $\sigma^2_{U_\Gamma}$ a acestuia sunt date, respectiv, prin relațiile

$$U_\Gamma=\frac{1}{1-\lambda b E[r_n]}\,\sigma^2_{U_\Gamma}=\frac{\lambda b\{E[r_n^2]+\lambda b D^2[s_n]\}}{\{1-\lambda b E[r_n]\}^3}$$

Găsim că funcția generatoare a probabilității $p_j=\lim_{t\to\infty}P_{ij}(t)=\lim_{t\to\infty}P\{\xi(t)=j|\xi(0)=i\}$ pentru $\lambda b E[r_n]<1$, are expresia

$$G(u)=\sum_{j=0}^{\infty}p_j u^j=\frac{(1-u)\{1-\lambda b E[r_n]\}\tilde{H}\{\lambda[1-\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j u^j]\}}{\tilde{H}\{\lambda[1-\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j u^j]\}-u}, \tag{3}$$

unde probabilitatea π_j este definită prin (1), iar $|u|<1$. Ca de obicei, am notat prin $\tilde{H}(s)$ $(Re(s)\ge 0)$ transformata Laplace-Stieltjes a funcției de repartiție H.

Folosind (3), pot fi determinate caracteristicile modelului, în cazul echilibrului statistic.

M/G/1 în cadrul terminalelor maritime

În cadrul acestui sistem de aşteptare vom studia timpul de aşteptare dat în [2].

Servire în ordine inversă (LIFO) [2,3]:

$$w(s)=(1-a\beta_1)+\frac{a(1-\pi(s))}{s+a-a\pi(s)},$$

unde transformata Laplace-Stieltjes a funcției de repartiție a perioadei de ocupare $\pi(s)$ se determină numeric din ecuația funcțională Kendall $\pi(s)=\beta(s+a-a\pi(s))$.

Funcții comune utilizate în algoritmul din C++:

```
function fnPi(s, a)
    precizie ← 0.000001
    pi_curent ← 0
    repeat
          pi_precedent ← pi_curent
          pi_curent ← fnBeta(s + a -a·pi_precedent)
    until |pi_curent-pi_precedent| < precizie
    return pi_curent
end function

function p(valoare)
    return 1 / squareroot(valoare) · e^(-1/valoare)
end function

function fnInv(valoare)
    rezultat ← 0
    n ← 8
    n2 ← n/2
    g[0] ← 1
    for i = 1 to n
          g[i] ← g[i-1] · i
    repeat
    h[1] ← 2/g[n2-1]
```

```
for i=2 to n2
        h[i] ← e^(n2·ln(i))·g[2·i]/(g[n2-i]·g[i]·g[i-1])
repeat
semn ← -1
for i = 1 to n
        v[i] ← 0
        jmin ← (i+1)/2
        if i<n2 then
                jmax ← i
        else
                jmax ← n2
        end if
        for j = jmin to jmax
                v[i] ← v[i] + h[j]/(g[i-j]·g[2·j-i])
        repeat
        v[i] ← semn · v[i]
        semn ← -semn
repeat
for i = 1 to n
        rezultat ← rezultat + v[i] · p(i·ln(2)/valoare)
repeat
        return rezultat · ln(2)/valoare
end function
```

Funcţia de repartiţie a timpului de aşteptare $W(x)$ se calculează prin inversarea numerică a lui $w(x)$ prin transformata Laplace-Stieltjes. Astfel, stabilim valori concrete ale funcţiei $W(x)$ folosind câţiva algoritmi de inversare numerică. În cazul repartiţiilor uniforme şi exponenţiale, pentru a afla parametrii utilizaţi în modelări am aplicat metoda Pearson numită şi *metoda momentelor* [4,5]. Utilizând această metodă, am aflat estimaţiile pentru funcţiile de repartiţie. Acestea sunt:

Momentul iniţial (empiric) de ordin k, aflat din formula:

$$v_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k,$$

unde $X_1, X_2, \dots, X_n$ este o selecţie de ordinul n, din repartiţia teoretică Poisson cu parametrul a.

$$v_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{4}$$

În acest caz estimaţia este estimaţie statică şi putem spune că estimaţia (4) este nedeplasată, deoarece parametrul fluxului de intrare este dat de:

$$M(v_1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i) = a \tag{5}$$

Observaţie. Estimaţia (4) este suficientă, deoarece converge în probabilitate către parametrul a din legea numerelor mari (I.Cebişev). Rezultă [6,7]:

$P\{|v_1 - a| < \varepsilon\} \to 1$ pentru $n \to \infty$

Pentru a estima parametrul fluxului de intrare a, am folosit pentru repartiţia uniformă următoarea formulă:

$$a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

unde $X_i (X_1, X_2, \dots, X_n)$ sunt momentele sosirii în port a n nave într-un interval de timp.

În cazul repartiţiei exponenţiale am utilizat formula:

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{6}$$

unde X_i este timpul de servire a navei i. Astfel se determină parametrul b.

1. Dacă timpul de așteptare a mesajelor este repartizat exponențial, atunci funcția de repartiție $B(x) = 1 - e^{-bx}$ are momentul de ordinul $1 \cdot \beta_1 = M(x) = \frac{1}{b}$ și transformata Laplace-Stieltjes $\beta(s) = \frac{b}{s+b}$ [2].

Algoritmul de calcul utilizat în C++:
Program principal

```
read a*, b, x, a, s
PI ← fnPi(s, a)
omega ← (1-a·fnBeta1() + a(1-PI)/(s+a·PI)
OMEGA ← fnInv(omega)
write s, a*, b, a, x, omega, OMEGA
```

Funcții specifice utilizate

```
function fnBeta(valoare)
    return b/(valoare + b)
end function

function fnBeta1()
    return 1/b
end function
```

Tabelul 1

Dependența de parametrul b din repartiția exponențială

Nr.crt.	b	s	x	a	$w(s)$	$W(x)$
1.	10	1	2	16	0,2783011	0,5275267
2.	11	1	2	16	0,4116243	0,2495373
3.	12	1	2	16	0,5190001	0,1015047
4.	13	1	2	16	0,6059155	0,0100826
5.	9	1	2	16	0,1111112	1,3303402

Tabelul 2

Dependența de paramentrul s din determinarea timpului de așteptare

Nr.crt.	b	s	x	a	$w(s)$	$W(x)$
1.	10	1	2	12	0,6000005	0,0156847
2.	10	2	2	12	0,5101022	0,1120998
3.	10	3	2	12	0,4479205	0,1940898
4.	10	4	2	12	0,4000001	0,2687076
5.	10	5	2	12	0,3610134	0,3388641

2. Repartiția Erlang

Timpul de așteptare este repartizat după repartiția Erlang de ordinul k [4].

$$B(x) = \int_0^x \lambda \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda x} dx$$

$$\beta_1 = \frac{k}{\lambda}$$

$$\beta(s) = \left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^k$$

Algoritmul de calcul utilizat în C++:
Program principal

```
read a*, b, x, a, s, lambda, k
PI ← fnPi(s, a)
omega ← (1-a·fnBeta1() + a(1-PI)/(s+a·PI)
OMEGA ← fnInv(omega)
write s, lambda, k, a*, b, a, x, omega, OMEGA
```

Funcţii specifice utilizate

```
function fnBeta(valoare)
    return (lambda/(lambda+valoare))^k
end function

function fnBeta1()
    return k/lambda
end function
```

Tabelul 3

Dependenţa de parametrul λ, k, a al funcţiei de repartiţie

Nr.crt.	s	x	λ	k	a	$w(s)$	$W(x)$
1.	1	2	5	10	0,4	0,4669491	0,1674063
2.	1	2	6	9	0,5	0,5490760	0,0675159
3.	1	2	3	7	0,3	0,5155945	0,1055294
4.	1	2	2	6	0,2	0,5581094	0,0578230
5.	1	2	4	8	0,6	0,1576327	0,9962254

Tabelul 4

Dependenţa de paramentrul s din determinarea timpului de aşteptare

Nr.crt.	s	x	λ	k	a	$w(s)$	$W(x)$
1.	1	2	5	8	0,5	0,5023799	0,1215079
2.	2	2	5	8	0,5	0,3935715	0,2796331
3.	3	2	5	8	0,5	0,3410862	0,3787289
4.	4	2	5	8	0,5	0,3105277	0,4462189
5.	5	2	5	8	0,5	0,2906903	0,4948783

3. Repartiţia Gamma

Timpul de aşteptare este repartizat după repartiţia Gamma [8,2,3]:

$$B(x) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}\, dx$$

$$\beta_1 = \frac{\alpha}{x}$$

$$\beta(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)^{\alpha}$$

Algoritmul de calcul utilizat în C++:
Program principal

```
read a*, b, x, a, s, lambda, alfa
PI ← fnPi(s, a)
Omega ← (1-a·fnBeta1() + a(1-PI)/(s+a·PI)
OMEGA ← fnInv(omega)
write s, lambda, alfa, a*, b, a, x, omega, OMEGA
```

Funcţii specifice utilizate

```
function fnBeta(valoare)
    return (lambda/(lambda+valoare))^alfa
end function

function fnBeta1()
    return alfa/x
end function
```

Tabelul 5

Dependenţa de paramentrul s din determinarea timpului de aşteptare

Nr.crt.	s	x	λ	α	a	$w(s)$	$W(x)$
1.	1	2	3	1	2	0,4226499	0,2320152
2.	2	2	3	1	2	0,3333334	0,3950776
3.	3	2	3	1	2	0,2792408	0,5249843
4.	4	2	3	1	2	0,2416943	0,6362661
5.	5	2	3	1	2	0,2137004	0,7350787

Tabelul 6

Dependenţa de parametrul x din funcţia de repartiţie

Nr.crt.	s	x	λ	α	a	$w(s)$	$W(x)$
1.	1	2	3	1	2	0,4226499	0,2320152
2.	1	3	6	1	2	0,6046200	0,0113026
3.	1	2	6	1	2	0,2712866	0,5468648
4.	1	4	6	1	5	0,3417520	0,3773476
5.	1	5	6	1	5	0,5917520	0,0236349

Pentru elaborarea acestor calcule în cadrul modelului matematic M/G/1 am elaborat un algoritm de programare în C++, cu ajutorul căruia am calculat timpii de aşteptare, precum şi inversele acestor funcţii prin transformata Laplace-Stieltjes.

În urma cercetărilor realizate atât în cadrul Portului Maritim Constanţa, unde am analizat buletinele informative pentru activitatea navelor în cadrul terminalelor maritime în interval de o lună (februarie 2016), cât şi în simulările făcute în lucrare, am constatat că timpul de aşteptare al unei nave se poate reduce considerabil, cea mai indicată repartiţie fiind cea exponenţială.

Concluzii

1. Folosind modelul matematic M/G/1 şi patru funcţii de repartiţie din cadrul acestui model, au fost validate unele cazuri concrete care se încadrează în activitatea portuară din cadrul terminalelor maritime.
2. Pentru aceasta au fost elaborate programe care vizează simularea statistică a timpului de aşteptare realizat cu servire în ordine inversă (LIFO) pentru repartiţia exponenţială, repartiţia Gamma şi repartiţia Erlang.
3. Caracteristicile principale de performanţă sunt obţinute astfel:
   a) Perioada de ocupare;
   b) Repartiţia şirului de aşteptare (lungimea cozii);
   c) Repartiţia timpului de aşteptare a începutului servirii (uniform, exponenţial, Erlang şi Gamma).

Aceste caracteristici de performanţă au fost aplicate în cadrul modelului matematic M/G/1 cu timp necesar pentru a începe servirea, deoarece este necesar un timp pentru operaţiuni auxiliare până la începutul servirii.

Referinţe:

1. DOIG, A.A. Bibliography on the theory of queues. In: *Biometrika,* 1957, 44, 3-4, p.490-514.
2. MIŞCOI, Gh., ŢICU, R.I. Metode de colorare şi aplicarea ei in cercetarea modelelor fenomenelor de aşteptare. În: Academia de Transporturi, Informatică şi Comunicaţii. *Materialele Conferinţei internaţionale „Modelare matematică, optimizare şi tehnologii informaţionale".* Chişinău, 2012, p.99-106. ISBN 978-9975-941-88-4
3. MIŞCOI, Gh., COSTEA, A., ŢICU, R.I. Aplicarea sistemului de aşteptare cu o singură linie în portul maritim. În: Academia de Transporturi, Informatică şi Comunicaţii. *Materialele Conferinţei internaţionale „Modelare matematică, optimizare şi tehnologii informaţionale".* Chişinău, 2014, p.142-146. ISBN 978-9975-62-365-0
4. MIŞCOI, Gh., ŢICU, R.I., COSTEA, A., POMAZAN, C. Evaluation algorithms of the waiting time of ships in a seaport. In: *International Scientific Conference Mathematics & IT: Research and Education,* Chişinău, 2016, p.45-46.
5. MISHKOY, Gh., BEJENARI, D., MITEV, L., ŢICU, I. Numerical solutions of Kendall and Pollaczek-Khintchin equations for ehhaustive Polling systems with semi- Markov delays. In: *Computer Science Jounal of Moldova*, 2016, vol.24, no2(71), p.255-272.
6. ŢICU, R.I. Queuing models in the port activity. In: *Proceedings of the Third Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova dedicated to the 50th anniversary of the foundation of Institute of Mathematics and Computer Science „IMCS-50"*, Chişinău, 19-23 august 2014, p.414-417.
7. ŢICU, R.I. Mathematical models with S queueing stations in series. In: *International Scientific Conference Mathematics & IT: Research and Education,* Chişinău, 2015, p.83-84.
8. CONOLLY, B.W. The busy period in relation to the single server queueing system with general independent arrivals and Erlangian service times. In: J. *Roy, Statist. Soc.*, 1960, 22, p.89-96.

Prezentat la 22.05.2016