STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2015, nr.7(87)
Seria "Ştiinţe exacte şi economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.40-59

CRITERII DE CONTINUITATE ŞI CALCULAREA NORMELOR OPERATORILOR INTEGRALI SINGULARI

Vasile NEAGU
Universitatea de Stat din Moldova

În prezenta lucrare sunt stabilite criterii de continuitate pentru operatorii integrali singulari în diferite spaţii cu ponderi, fiind sistematizate şi generalizate anumite rezultate în cazul în care conturul de integrare Γ este nemărginit şi cu puncte unghiulare. Se arată că normele esenţiale ale operatorilor singulari depind nu doar de spaţiu, ci şi de mărimile unghiurilor formate de conturul de integrare în punctele sale unghiulare.
Cuvinte-cheie: *operator integral singular, operator noetherian, simbol.*

CRITERIA OF CONTINUITY AND CALCULATION OF NORMS FOR SINGULAR INTEGRAL OPERATORS

In this paper criteria of continuity for singular integral operators in different spaces with weights are established, some results when the contour of integration is unbounded and has angular points are systematized and generalized. It is shown that essential norms of singular operators depend not only on the space but also on the measures of the angles, formed by the contour of integration in its angular points.
Keywords: *singular integral operator, noetherian operator, symbol.*

Fie Γ un contur orientat în planul complex $\mathbb{C}$ şi S operatorul integral singular cu nucleu Cauchy

$$(S_\Gamma\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau \quad (t \in \Gamma). \tag{1}$$

Notăm prin $L_p(\Gamma,\rho)$ mulţimea tuturor funcţiilor φ definite şi măsurabile pe Γ care satisfac condiţia

$$\int_\Gamma |\varphi(t)|^p \rho(t)|dt| < \infty,\ (1 < p < \infty), \tag{2}$$

unde $\rho(t)$ este o funcţie măsurabilă şi nenegativă. Dacă în această mulţime se defineşte norma aşa cum urmează,

$$\|\varphi\| = \left(\int_\Gamma |\varphi(t)|^p \rho(t)|dt|\right)^{1/p},$$

atunci $L_p(\Gamma,\rho)$ devine un spaţiu liniar normat şi complet.

În teoria ecuaţiilor integrale singulare este bine cunoscută următoarea teoremă.

Teorema 1. *Fie Γ un contur simplu de tip Leapunov pe porţiuni şi*

$$\rho(t) = \prod_{k=1}^{n}|t - t_k|^{\beta_k},\quad t_k \in \Gamma,\ t_k \neq t_j \text{ dacă } k \neq j,\ -1 < \beta_k < p-1, \tag{3}$$

atunci operatorul S_Γ este mărginit în spaţiul $L_p(\Gamma,\rho)$.

Pentru Γ de tip Leapunov această teoremă a fost demonstrată de către B.Hvedelidze, pentru Γ de tip Leapunov pe porţiuni – de către E.Gordadze, iar pentru $\Gamma = (-\infty,\infty)$ şi $\rho(t) = |t|^\beta$ – de către M.Riesz, G.Hardy, J.Littwoold şi K.Babenko.

În prezenta lucrare sunt demonstrate necesităţile condiţiilor (3). Rezultatele obţinute au permis să stabilim criterii de continuitate pentru operatorii de forma $H = \prod(t - t_k)^{\alpha_k} S \prod(t - t_k)^{-\alpha_k} I$, care apar în studiul ecuaţiilor integrale singulare cu translaţii pe axa reală. S-a demonstrat că aceşti operatori prezintă perturbaţii admisibile pentru ecuaţiile integrale singulare cu coeficienţi continui pe porţiuni. Această concluzie a fost făcută în rezultatul determinării, studiului şi comparării simbolurilor operatorilor singulari cu ale celor

STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2015, nr.7(87)
Seria "Ştiinţe exacte şi economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.40-59

perturbaţi. Tot cu ajutorul simbolului s-a reuşit şi calculul normelor esenţiale ale operatorilor S_Γ S_Γ , $P_\Gamma = 1/2(I + S_\Gamma)$ şi $Q_\Gamma = I - P_\Gamma$. Se arată că aceste mărimi depind nu doar de spaţiu, ci şi de mărimile unghiurilor formate de conturul de integrare în punctele sale unghiulare.

I. Criterii de continuitate a operatorului S_Γ

Vom demonstra necesitatea condiţiilor din teorema 1 despre continuitatea operatorului S în spaţiul $L_p(\Gamma,\rho)$. În plus, vom studia şi cazul în care conturul de integrare Γ este o curbă nemărginită, în particular Γ este axa reală $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

1.1. Cazul conturului de tip Leapunov

Teorema 1.1. *Fie Γ un contur simplu de tip Leapunov şi*

$$\rho(t) = \prod_{k=1}^{n} |t - t_k|^{\beta_k}, \quad t_k \in \Gamma, \ \beta_k \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Operatorul S_Γ este mărginit în spaţiul $L_p(\Gamma,\rho)$ dacă şi numai dacă sunt îndeplinite condiţiile

$$-1 < \beta_k < p - 1 \ (k = 1, 2, \dots, n). \tag{1.2}$$

Demonstraţie. Suficienţa condiţiilor (1.2) este demonstrată în lucrarea lui B.Hvedelidze [9]. Vom demonstra necesitatea acestor condiţii. În primul rând să observăm că un operator A este mărginit în $L_p(\Gamma,\rho)$ dacă şi numai dacă operatorul $\rho^{\frac{1}{p}} A \rho^{-\frac{1}{p}} I$ este mărginit în spaţiul $L_p(\Gamma)$. În plus, are loc egalitatea

$$\|A\|_{p,\rho} = \left\| \rho^{\frac{1}{p}} A \rho^{-\frac{1}{p}} I \right\|_p ,$$

unde prin $\| \ \|_{p,\rho}$ şi $\| \ \|_p$ este notată norma în spaţiul $L_p(\Gamma)$ şi, respectiv, în $L_p(\Gamma,\rho)$. Într-adevăr,

$$\|A\|_{p,\rho} = \sup_{\|\varphi\|_{p,\rho}=1} \|A\varphi\|_{p,\rho} = \sup_{\|\varphi\cdot\rho^{1/p}\|_p=1} \left\|A(\rho^{-1/p}\cdot\varphi\cdot\rho^{1/p})\right\|_{p,\rho} =$$

$$\sup_{\|\varphi\cdot\rho^{1/p}\|_p=1} \left\|\rho^{1/p}A(\rho^{-1/p}\cdot\varphi\cdot\rho^{1/p})\right\|_p = \left\|\rho^{1/p}A\rho^{-1/p}I\right\|_p .$$

Fie operatorul S_Γ mărginit în spaţiul $L_p(\Gamma,\rho)$ cu ponderea de forma (1.1). Vom demonstra că numerele $\beta_k \ (k = 1, 2, \dots, n)$ verifică condiţiile (1.2). Notăm cu R operatorul $(R\varphi)(t) = t\varphi(t)$ care, evident, este mărginit în spaţiul $L_p(\Gamma,\rho)$. Atunci, în baza observaţiei de mai sus, operatorul

$$K = \pi i \rho^{\frac{1}{p}} (S_\Gamma R - R S_\Gamma) \rho^{-\frac{1}{p}} I$$

este mărginit în $L_p(\Gamma)$. Însă,

$$(K\varphi)(t) = \rho^{\frac{1}{p}}(t) \int_\Gamma \rho^{-\frac{1}{p}}(\tau)\varphi(\tau)d\tau .$$

Din ultima egalitate rezultă că $\rho^{\frac{1}{p}} \in L_p(\Gamma)$. Din această egalitate şi din teorema lui Riesz despre forma generală a funcţionalei în spaţiul $L_p(\Gamma)$ rezultă că $\rho^{-\frac{1}{p}} \in L_q(\Gamma)$. Adică,

$$\int_\Gamma \left|\rho^{1/p}(t)\right|^p |dt| = \int_\Gamma \prod_{k=1}^{n} |t - t_k|^{\beta_k} |dt| < \infty \ \text{şi} \ \int_\Gamma \left|\rho^{-1/p}(t)\right|^q |dt| = \int_\Gamma \prod_{k=1}^{n} |t - t_k|^{-\frac{\beta_k q}{p}} |dt| < \infty . \tag{1.3}$$

STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2015, nr.7(87)
Seria "Ştiinţe exacte şi economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.40-59

Din prima inegalitate din (1.3) obţinem că $\beta_k > -1$, iar din a doua rezultă că

$$-\frac{\beta_k q}{p} = -\frac{\beta_k}{p-1} > -1.$$

Aşadar, $-1 < \beta_k < p-1 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$ şi teorema este demonstrată.

1.2. Cazul axei reale

Vom considera cazul în care conturul Γ este nemărginit. Vom începe cu cazul particular, însă foarte important, în care Γ este axa reală R. În calitate de pondere vom considera funcţia

$$\rho_0(x) = |x-i|^{\beta} \prod_{k=1}^{n} |x-x_k|^{\beta_k}, \tag{1.4}$$

unde $x_1, x_1, \dots, x_n$ sunt puncte diferite din R, iar $\beta, \beta_1, \beta_1, \dots, \beta_n$ sunt nişte numere reale.

Teorema 1.2. *Operatorul*

$$(S\varphi)(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y-x} dy,$$

este mărginit în spaţiul $L_p(\mathrm{R}, \rho_0)$ $(1 < p < \infty)$ *dacă şi numai dacă numerele* $\beta, \beta_1, \beta_1, \dots, \beta_n$ *satisfac condiţiile*

$$-1 < \beta_k < p-1 \quad (k = 1, 2, \dots, n), \ -1 < \beta + \sum_{k=1}^{n} \beta_k < p-1. \tag{1.5}$$

Demonstraţie. Fie Γ_0 cercul unitate,

$$t_k = (x_k + i)(x_k - i)^{-1} \ (k = 1, 2, \dots, n), \ t_0 = 1, \ \beta_0 = p - 2 - \beta - \sum_{k=1}^{n} \beta_k \ \text{şi}$$

$$\rho(t) = \prod_{k=0}^{n} |t - t_k|^{\beta_k}. \tag{1.6}$$

Vom arăta că operatorul B, definit de egalitatea

$$(B\varphi)(t) = \frac{1}{t-1} \varphi\left(i \frac{t+1}{t-1}\right),$$

este liniar şi mărginit din $L_p(\mathrm{R}, \rho_0)$ în $L_p(\Gamma_0, \rho)$. Într-adevăr, fie $\varphi \in L_p(\mathrm{R}, \rho_0)$, atunci

$$\|B\varphi\|^p_{L_p(\Gamma_0, \rho)} = \int_{\Gamma_0} \left|\varphi\left(i\frac{t+1}{t-1}\right)\right|^p \rho_0(t) |t - t_0|^{-p} |dt| =$$

$$c_1 \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^p \prod_{k=1}^{n} \left|\frac{x+i}{x-i} - \frac{x_k+i}{x_k-i}\right|^{\beta_k} \left|\frac{x+i}{x-i} - 1\right|^{\beta_k - p} \frac{dx}{|x-i|^2} = c_2 \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^p \rho_0(x) dx = c_2 \|\varphi\|^p_{L_p(R, \rho_0)}, \tag{1.7}$$

unde c_1 şi c_2 sunt nişte constante. Operatorul B este inversabil. Se verifică uşor că

$$(B^{-1}\psi)(t) = \frac{2i}{x-i} \psi\left(\frac{x+i}{x-i}\right). \tag{1.8}$$

Fie $\varphi : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ orice funcţie finită şi derivabilă. Atunci

$$(B^{-1} S_0 B\varphi)(x) = \frac{2}{\pi(x-i)} \int_{\Gamma_0} \frac{\varphi\left(i\frac{\tau+1}{\tau-1}\right)}{(\tau-1)\left(\tau - \frac{x+i}{x-i}\right)} d\tau = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(y)}{y-x} dy = (S_R\varphi)(x). \tag{1.9}$$

Remarcăm că funcţia $\varphi\left(i\frac{\tau+1}{\tau-1}\right)$ se anulează într-o vecinătate a punctului $\tau = 1$. Aşadar, $S = B^{-1} S_0 B$ pe mulţimea funcţiilor finite şi derivabile. Aşa cum această mulţime este densă în $L_p(\mathrm{R}, \rho_0)$, rezultă că egalitatea $S = B^{-1}S_0B$ are loc pe tot spaţiul $L_\rho(\mathrm{R}, \rho_0)$ şi din ea rezultă că operatorul S este mărginit în spaţiul $L_\rho(\mathrm{R}, \rho_0)$ dacă şi numai dacă operatorul S_0 este mărginit în $L_p(\Gamma_0, \rho)$. În baza teoremei 1.1 aceasta se întâmplă dacă şi numai dacă sunt verificate condiţiile

$$-1 < \beta_k < p-1 \quad (k = 0, 1, 2, ..., n). \tag{1.10}$$

Relaţiile (1.5) sunt echivalente cu (1.10). Teorema este demonstrată.

Din teorema demonstrată mai rezultă că operatorul S este mărginit în spaţiul $L_p(\Gamma, \rho_0)$, unde Γ este o parte (un interval) a axei reale.

1.3. Cazul conturului compus

Definiţie. *Un contur* Γ, *format dintr-un număr finit de arce orientate* $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_n$, *care au un număr finit de puncte de intersecţie, se numeşte compus* [1]. *Punctele de intersecţie se numesc puncte singulare.*

Dacă arcele Γ_j *şi* Γ_k au un punct comun, vom presupune că curba $\Gamma_j \cup \Gamma_k$ este de tip Leapunov sau că în acest punct tangentele la arce nu coincid. Ultima condiţie înseamnă că conturul Γ are puncte *unghiulare*, însă fără puncte de *întoarcere*.

Fie Γ un contur compus. Conturul Γ poate fi reprezentat sub forma de reuniune a unui număr finit de arce $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_n$ care satisfac următoarele condiţii. Orice pereche de arce Γ_j şi Γ_k au nu mai mult de un singur punct comun şi acest punct nu este interior nici pentru Γ_j şi nici pentru Γ_k. Dacă $\Gamma_j \bigcup \Gamma_k$ nu este de tip Leapunov, atunci vom presupune că tangentele în punctul comun $t_{jk} = \Gamma_j \bigcup \Gamma_k$ la Γ_j şi Γ_k nu coincid. Ultima condiţie exclude conturul cu arce Γ_j şi Γ_k indicate în Figura 1 (cu puncte de *întoarcere)*.

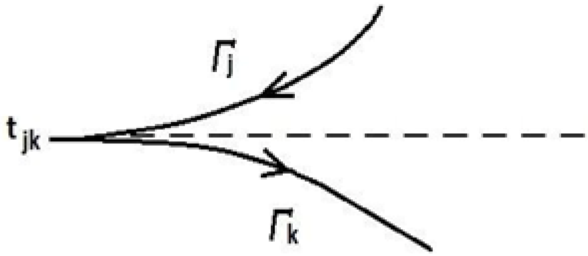

Fig.1.

De exemplu, pentru a reprezenta conturul Γ din Figura 2

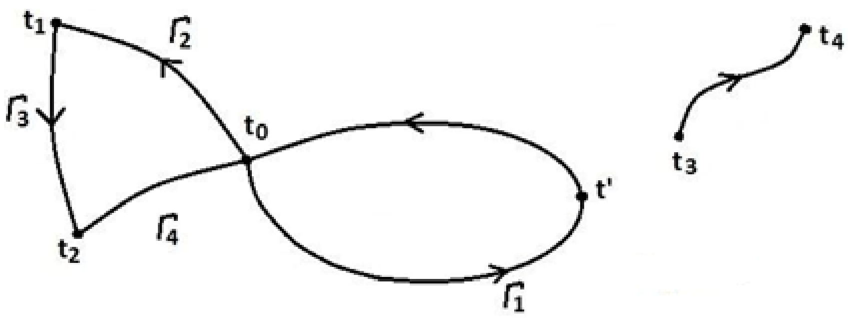

Fig.2.

în modul stabilit mai sus considerăm pe linia Γ_1 un punct arbitrar t' şi o reprezentăm în forma $\Gamma_1 = \Gamma_1' \bigcup \Gamma_1''$, unde Γ_1' este arcul care uneşte t_0 cu t', iar Γ_1'' arcul care uneşte t' cu t_0. Atunci,

$$\Gamma = \Gamma_1' \bigcup \Gamma_1'' \bigcup \Gamma_2 \bigcup \Gamma_3 \bigcup \Gamma_4 \bigcup \Gamma_5.$$

Punctele singulare t', t_1, t_2 le vom numi şi puncte ***unghiulare***, t_0 – ***nod,*** iar t_3, t_4 – ***capetele*** conturului Γ. Conturul compus poate avea mai multe noduri şi capete.

Teorema 1.3. *Fie* Γ *compus și*

$$\rho(t)=\prod_{k=0}^{n}\left|t-t_k\right|^{\beta_k}.$$

Operatorul S_Γ *este mărginit în spațiul* $L_p(\Gamma_0,\rho)$ *dacă și numai dacă numerele* β_k *verifică condițiile*

$$-1<\beta_k<p-1 \quad (k=1,2,\ldots,n).$$

În prealabil vom demonstra următoarele leme.

Lema 1.1. *Fie* Γ *o linie frântă, formată din două segmente* Γ_1 *și* Γ_2 *care au un punct comun* z_0. *Atunci operatorul*

$$(S_{\Gamma_1\Gamma_2}\varphi)(x)=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau \quad (t\in\Gamma_2)$$

este liniar și mărginit din spațiul $L_p(\Gamma_1,\left|t-z_0\right|^{\beta})$ *în spațiul* $L_p(\Gamma_2,\left|t-z_0\right|^{\beta})$ *dacă și numai dacă* $-1<\beta<p-1$.

Demonstrație. Fie $-1<\beta<p-1$. Considerăm două funcții $\varphi\in L_p(\Gamma_1,\left|t-z_0\right|^{\beta})$ și $\psi\in L_q(\Gamma_2,\left|t-z_0\right|^{\beta(1-p)})$, unde $p^{-1}+q^{-1}=1$. Vom nota prin φ și ψ prelungirea prin zero a acestor funcții pe razele ce ies din punctul z_0 și conțin segmentele Γ_1 și Γ_2. Fără a diminua generalitatea, putem considera că $z_0=0$ și $\Gamma_1\subset[0,\infty]$ (Fig.3).

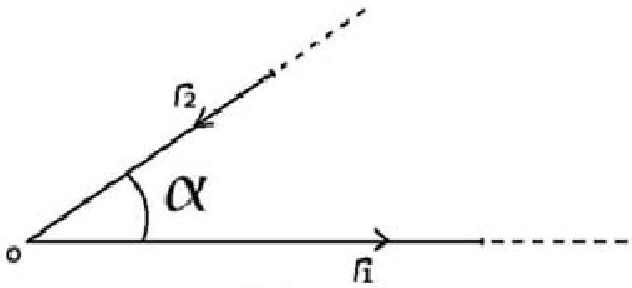

Fig.3.

Alegem un număr complex σ, astfel încât raza $\{\sigma y\}(0\le y\le\infty)$ să conțină segmentul Γ_2. În cazul Figurii 3 avem $\sigma=\omega e^{i\alpha}$ $(\omega>0)$. Atunci

$$\left|\int_{\Gamma_2}\overline{\psi}(t)|dt|\int_{\Gamma_1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau\right|\le|\sigma|\int_0^\infty dy\int_0^\infty\frac{|\psi(\sigma y)||\varphi(x)|}{|x-\sigma y|}dx=|\sigma|\int_0^\infty dy\int_0^\infty\frac{|\psi(\sigma y)||\varphi(sy)|}{|s-\sigma|}ds=$$

$$|\sigma|\int_0^\infty\frac{ds}{|s-\sigma|}\int_0^\infty|\psi(\sigma y)||\varphi(sy)|dy=|\sigma|\int_0^\infty\frac{ds}{|s-\sigma|}\int_0^\infty|\psi(\sigma y)||y|^{\beta/p}|\varphi(sy)||y|^{-\beta/p}dy$$

Aplicăm inegalitatea lui Holder și obținem:

$$\left|\int_{\Gamma_2}\overline{\psi}(t)|dt|\int_{\Gamma_1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau\right|\le|\sigma|\int_0^\infty\frac{ds}{|s-\sigma|}\left(\int_0^\infty|\psi(\sigma y)|^q|y|^{-\beta q/p}dy\right)^{1/q}\cdot\left(\int_0^\infty|\varphi(sy)|^p|y|^{\beta}dy\right)^{1/p}=$$

$$|\sigma|^{1+\beta/p}\int_0^\infty\frac{ds}{|s|^{1+\beta/p}|s-\sigma|}\left(\int_{\Gamma_2}|\psi(t)|^q|t|^{\beta(1-q)}|dt|\right)^{1/q}\cdot\left(\int_{\Gamma_1}|\varphi(t)|^p|t|^{\beta}|dt|\right)^{1/p}=c\cdot\|\psi\|_{L_q(\Gamma_2,|t|^{\beta(1-q)})}\|\varphi\|_{L_p(\Gamma_1,|t|^{\beta})},$$

unde

$$c=|\sigma|^{(1+\beta)/p}\int_0^\infty\frac{ds}{|s|^{(1+\beta)/p}|s-\sigma|}.$$

Din condițiile $-1<\beta<p-1$ rezultă că $c<\infty$.

Prin urmare,

$$\left|\int_{\Gamma_2}\overline{\psi}(t)\cdot(S_{\Gamma_1\Gamma_2}\varphi)(t)dt\right|\le c\cdot\|\psi\|_{L_q(\Gamma_2)}\cdot\|\varphi\|_{L_p(\Gamma_1)}.$$

Suficiența este demonstrată. Necesitatea se demonstrează ca și necesitatea teoremei 1.1. Lema este demonstrată.

Lema 1.2. *Fie Γ_1 și Γ_2 au un singur punct comun z_0 (care nu este punct interior nici pentru Γ_1, nici pentru Γ_2) și tangentele la Γ_1 și Γ_2 în z_0 nu coincid. Operatorul*

$$(S_{\Gamma_1\Gamma_2}\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau \qquad (t\in\Gamma_2)$$

ce acționează din $L_p(\Gamma_1,|t-z_0|^\beta)$ în $L_p(\Gamma_2,|t-z_0|^\beta)$ este mărginit dacă și numai dacă $-1<\beta<p-1$.

Demonstrație. Fie γ_1 și γ_2 două segmente ale tangentelor la Γ_1 și Γ_2 în punctul z_0 (Fig.4).

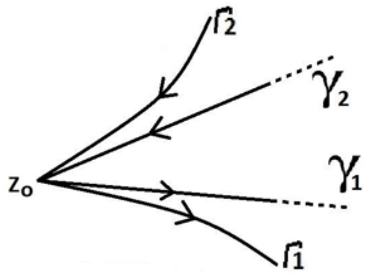

Fig.4.

Notăm cu $t=\beta(z)$ funcția bijectivă a frântei $\gamma=\gamma_1\bigcup\gamma_2$ pe conturul $\Gamma=\Gamma_1\bigcup\Gamma_2$. Așa cum Γ_1 și Γ_2 sunt de tip Leapunov, atunci funcția β poate fi aleasă astfel încât derivata ei β' să satisfacă condițiile lui Holder pe γ. Fie $B_k:L_p(\Gamma_k,|t-z_0|^\beta)\to L_p(\gamma_k,|t-z_0|^\beta),(k=1,2),$ operatorul definit de relația $(B_k\varphi)(z)=\varphi(\beta_k(z))$. Nucleul operatorului integral $K=B_2S_{\Gamma_1\Gamma_2}B_1^{-1}-S_{\gamma_1\gamma_2}$ are forma

$$k(\xi,z)=\frac{1}{\pi i}\left(\frac{\beta'(\xi)}{\beta(\xi)-\beta(z)}-\frac{1}{\xi-z}\right)(z\in\gamma_2,\ \xi\in\gamma_1)$$

și are singularitate slabă. Prin urmare, operatorul K este compact din $L_p(\gamma_1,|t-z_0|^\beta)$ în $L_p(\gamma_2,|t-z_0|^\beta)$ [1]. Atunci, aplicând lema 1.1, continuitatea operatorului $S_{\Gamma_1\Gamma_2}$ rezultă din egalitatea

$$S_{\Gamma_1\Gamma_2}=B_2^{-1}(K+S_{\gamma_1\gamma_2})B_1, \tag{1.11}$$

Lema este demonstrată.

Demonstrația teoremei. Descompunem conturul compus Γ în reuniune de arce simple $\Gamma_1,\Gamma_2,\dots,\Gamma_n$ care satisfac condițiile enumerate mai sus. Vom demonstra că operatorul

$$(S_{\Gamma_k\Gamma_j}\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_j}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau \qquad (t\in\Gamma_k)$$

este mărginit din $L_p(\Gamma_j,\rho)$ în $L_p(\Gamma_k,\rho)$.

Dacă $j=k$, atunci continuitatea operatorului $S_{\Gamma_k\Gamma_j}$ rezultă din teorema lui B.Hvedelidze. Dacă Γ_j și Γ_k au un punct comun și arcul $\Gamma_{jk}=\Gamma_j\bigcup\Gamma_k$ nu este de tip Leapunov, adică tangentele la Γ_j și Γ_k în punctul lor comun nu coincid, atunci în baza lemei 1.2 operatorul $S_{\Gamma_k\Gamma_j}$ este mărginit. Fie Γ_{jk} de tip Leapunov, atunci continuitatea lui $S_{\Gamma_k\Gamma_j}$ în spaţiul $L_p(\Gamma_{jk},\rho)$ de asemenea rezultă din teorema lui B.Hvedelidze. Fie $\varphi\in L_p(\Gamma_j,\rho)$. Notăm prin $\widetilde{\varphi}\in L_p(\Gamma_{jk},\rho)$ funcţia

$$\widetilde{\varphi}(t)=\begin{cases}\varphi(t)\,, & t\in\Gamma_j\\ 0, & t\in\Gamma_k\end{cases}.$$

Evident $\|\widetilde{\varphi}\|_{L_p(\Gamma,\rho)}=\|\widetilde{\varphi}\|_{L_p(\Gamma_j,\rho)}$. Atunci

$$\left\|S_{\Gamma_j\Gamma_k}\varphi\right\|_{L_p(\Gamma_k,\rho)}\le\left\|S_{\Gamma_j\Gamma_k}\widetilde{\varphi}\right\|_{L_p(\Gamma_{jk},\rho)}\le\left\|S_{\Gamma_j\Gamma_k}\right\|\|\varphi\|_{L_p(\Gamma_j,\rho)}.$$

Aşadar, şi în acest caz $S_{\Gamma_j\Gamma_k}$ este mărginit din $L_p(\Gamma_j,\rho)$ în spaţiul $L_p(\Gamma_k,\rho)$. În sfârşit, dacă $\Gamma_j\bigcap\Gamma_k=\emptyset$, atunci nucleul operatorului $S_{\Gamma_j\Gamma_k}$ este o funcţie continuă şi, prin urmare, el este mărginit. Fie χ_j funcţia caracteristică a arcului Γ_j, atunci din cele demonstrate mai sus avem:

$$\left\|\chi_j S_\Gamma \chi_k\varphi\right\|_{L_p(\Gamma,\rho)}\le\left\|S_{\Gamma_j\Gamma_k}\right\|\|\varphi\|_{L_p(\Gamma,\rho)}.$$

Deci, operatorii $\chi_j S_\Gamma\chi_k I\ (j,k=1,2,...,n)$ sunt mărginiţi în $L_p(\Gamma,\rho)$. Aşa cum

$$S_\Gamma=\sum_{j,k=1}^{n}\chi_j S_\Gamma\chi_k I\ ,$$

atunci S_Γ este mărginit în spaţiul $L_p(\Gamma,\rho)$. Teorema este demonstrată.

1.4. Cazul conturului admisibil

Considerăm cazul mai general, în care Γ este un contur format dintr-un număr finit de linii $\Gamma_1,\Gamma_2,...,\Gamma_n$, mărginite şi nemărginite. Aplicaţia $t=(z-z_0)^{-1}\ (z_0\notin\Gamma)$ transformă fiecare linie $\Gamma_j\ \ (j=1,2,...,n)$ într-o linie mărginită γ_j. Notăm $\gamma=\bigcup_{j=1}^{n}\gamma_j$. Vom numi conturul Γ ***admisibil*** dacă γ este un contur ***compus***. Fără a restrânge generalitatea, presupunem că $0\notin\Gamma$ şi $z_0=0$.

Teorema 1.4. *Fie Γ un contur admisibil, $z_1,z_2,...,z_n$ puncte diferite pe Γ şi*

$$\rho_0(z)=|z|^{\beta}\prod_{k=1}^{n}|z-z_k|^{\beta_k}.$$

Operatorul S_Γ este mărginit în spaţiul $L_p(\Gamma,\rho_0)$ dacă şi numai dacă numerele β_k verifică condiţiile

$$-1<\beta_k<p-1\quad(k=1,2,...,n),\ -1<\beta+\sum_{k=1}^{n}\beta_k<p-1. \tag{1.11}$$

Demonstraţie. Fie γ imaginea lui Γ în rezultatul aplicaţiei $t=z^{-1}$. Notăm cu

$$t_k=z_k^{-1}\quad(k=1,2,...,n),\ t_0=0,\ \beta_0=p-2-\beta-\sum_{k=1}^{n}\beta_k,\ \ \rho(t)=\prod_{k=0}^{n}|t-t_k|^{\beta_k}.$$

Se arată fără dificultăţi că operatorul

$$(B\varphi)(t)=\frac{1}{t}\varphi(\frac{1}{t})\quad(t\in\gamma)$$

este liniar, mărginit şi inversabil din $L_p(\Gamma,\rho_0)$ în $L_p(\gamma,\rho)$. Calcule simple arată că $S_\Gamma=B^{-1}S_\gamma B$, apoi raţionamentele continuă ca în teorema 1.2. Teorema este demonstrată.

STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2015, nr.7(87)
Seria "Ştiinţe exacte şi economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.40-59

II. Continuitatea şi simbolul operatorilor de forma $(t-t_k)^{\delta_k} S_\Gamma (t-t_k)^{-\delta_k} I$

Fie $t_1, t_2, \dots, t_n$ puncte fixe şi distincte pe conturul închis Γ şi $L_p(\Gamma,\rho)$ spaţiul cu ponderea (1.1) şi cu condiţiile (1.2). Notăm cu Ω mulţimea funcţiilor de forma $h(t)=\prod_{k=1}^{n}(t-t_k)^{\delta_k}$, unde δ_k sunt numere reale, iar cu $CP(\Gamma)$ – mulţimea tuturor funcţiilor definite pe Γ şi continue pe porţiuni.

Teorema 2.1. *Operatorul* $h(t)S_\Gamma h^{-1}(t)I$ *este mărginit în* $L_p(\Gamma,\rho)$ *dacă şi numai dacă numerele* δ_k *verifică condiţiile*

$$-\frac{1+\beta_k}{p}<\delta_k<1-\frac{1+\beta_k}{p} \quad (k=1,2,\dots,n). \tag{2.1}$$

Demonstraţie. Din observaţia la teorema 1.1 rezultă că operatorul $h(t)S_\Gamma h^{-1}(t)I$ este mărginit în spaţiul $L_p(\Gamma,\rho)$ dacă şi numai dacă este mărginit operatorul S_Γ în spaţiul $L_p(\Gamma,\rho_1)$, unde

$$\rho_1(t)=|h(t)|^p\cdot\rho(t)=\prod_{k=1}^{n}|t-t_k|^{\beta_k+p\delta_k}.$$

Astfel, condiţiile (2.1) decurg din condiţiile (1.2). Teorema este demonstrată.

Vom presupune în continuare că numerele δ_k din definiţia funcţiilor din mulţimea Ω verifică condiţiile (2.1). Prin urmare, operatorul $H=h(t)S_\Gamma h^{-1}(t)I$ este liniar şi mărginit în spaţiul $L_p(\Gamma,\rho)$. Asociem operatorului H matricea de funcţii $H(t,\mu)$ $(t\in\Gamma,\ 0\le\mu\le1)$ (a se vedea [2]), definită după cum urmează:

$$H(t,\mu)=\begin{Vmatrix}1 & u(t,\mu)\\ 0 & -1\end{Vmatrix}, \tag{2.2}$$

unde

$$u(t,\mu)=\begin{cases}\dfrac{4\nu(t_k,\mu)cos(\pi\delta_k)exp(\pi i\delta_k)}{2l(t_k,\mu)cos(\pi\delta_k)exp(\pi i\delta_k)+1}, & dacă\ t=t_k\quad(k=1,2,\dots,n),\\ 0, & dacă\ t\in\Gamma\setminus t_k\quad(k=1,2,\dots,n)\end{cases},$$

$$\theta(t)=\begin{cases}\pi-2\pi(1+\beta_k)/p, & dacă\ t=t_k\quad(k=1,2,\dots,n)\\ \pi-2\pi/p, & dacă\ t\in\Gamma\setminus t_k\quad(k=1,2,\dots,n)\end{cases},$$

$$l(t,\mu)=\begin{cases}\dfrac{sin\,\theta\mu\cdot exp(i\theta\mu)}{sin\,\theta\cdot exp(i\theta)}, & dacă\quad \theta\neq0,\\ \mu, & dacă\quad \theta=0\end{cases}$$

şi $\nu(t,\mu)=\sqrt{l(t,\mu)(1-l(t,\mu))}$.

Teorema 2.2. *Fie*

$$A=a_0(t)+\sum_{j=1}^{m}a_j(t)h_j(t)S_\Gamma h_j^{-1}(t)b_j(t)I, \tag{2.3}$$

unde $a_j, b_j\in CP(\Gamma)$, $h_j\in\Omega$. *Atunci, operatorul* A *aparţine algebrei* $\Sigma(\Gamma,\rho)$ *generate de operatorii integrali singulari cu coeficienţi din* $CP(\Gamma)$ *şi simbolul său are forma*

$$A(t,\mu)=a_0(t,\mu)+\sum_{j=1}^{m}a_j(t,\mu)H_j(t,\mu)b_j(t,\mu), \tag{2.4}$$

unde $a_j(t,\mu)$ *şi* $b_j(t,\mu)$ *sunt simbolurile operatorilor* $a_j(t)I$ *şi* $b_j(t)I$, *iar* $H_j(t,\mu)$ *sunt matrice de funcţii de forma (2.2), care corespund operatorilor* $H_j=h_j(t)S_\Gamma h_j^{-1}(t)I$.

STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2015, nr.7(87)
Seria "Științe exacte și economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.40-59

Amintim că simbolul $A_0(t,\mu)$ al operatorului $A_0 = aP + bQ,$ unde $a,b \in CP(\Gamma),$ $P = 1/2(I+S)$ şi $Q = I - P,$ se defineşte (a se vedea [2]) în felul următor:

$$A_0(t,\mu) = \begin{Vmatrix} l(t,\mu)a(t+0)+(1-l(t,\mu))a(t) & \nu(t,\mu)(b(t+0)-b(t)) \\ \nu(t,\mu)(a(t+0)-a(t)) & l(t,\mu)b(t)+(1-l(t,\mu))b(t+0) \end{Vmatrix}. \quad (2.5)$$

Demonstrația teoremei 2.2. Este evident că teorema va fi demonstrată dacă o vom demonstra pentru operatorul $H = h(t)S_\Gamma h^{-1}(t)I$, unde $h(t) \in \Omega$. Fie $h(t) = \prod_{k=1}^{n}(t-t_k)^{\delta_k}$, unde numerele δ_k verifică condițiile (2.1). Notăm prin $f_k(t)$ funcția $f_k(t) = t^{-\delta_k}$, continuă (*se presupune că* $0 \in F^+$) în orice punct de pe conturul Γ cu excepția, posibil, în punctul t_k, iar prin $f(t)$ notăm funcția $f(t) = \prod_{k=1}^{n} f_k(t).$ Prin calcule directe se verifică următoarea egalitate:

$$\left[h(t)P(h(t)f(t))^{-1}I + Q\right](PfP+Q)\varphi = (PfP+Q)\left[h(t)P(h(t)f(t))^{-1}I + Q\right]\varphi = \varphi$$

valabilă pentru orice funcție φ, care verifică condițiile lui Holder pe conturul Γ. Aşa cum operatorul $h(t)Ph^{-1}(t)I$ este mărginit în spațiul $L_p(\Gamma,\rho),$ atunci $hP(hf)^{-1}I + Q = (PfP+Q)^{-1}$. De aici rezultă că $PhPh^{-1}I = P(PfP+Q)^{-1}fI.$ Este adevărată şi egalitatea $PhPh^{-1}I = hPh^{-1}I$ şi, prin urmare, $hPh^{-1}I = P(PfP+Q)^{-1}fI.$ Astfel,

$$H = 2P(PfP+Q)^{-1}fI - I. \quad (2.6)$$

Din această egalitate rezultă că operatorul $H = h(t)S_\Gamma h^{-1}(t)I$ aparține algebrei $\sum(\Gamma,\rho).$ Din (2.6), prin calcule directe (la detalii nu ne oprim), ne convingem că simbolul operatorului H reprezintă matricea de funcții

$$H(t,\mu) = \begin{Vmatrix} 1 & \dfrac{2\nu(t,\mu)(f(t+0)-f(t))}{l(t,\mu)(f(t+0)-f(t))+1} \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Ținând cont de faptul că $(f(t_k+0)/(f(t_k) = exp(2\pi i\delta_k),$ uşor se arată că simbolul operatorului H coincide cu relația (2.2). Teorema este demonstrată.

Din teorema demonstrată (2.2) rezultă mai multe concluzii, în particular din ea urmează

Teorema 2.3. *Operatorul A, definit de egalitatea (2.3), este noetherian în spațiul $L_p(\Gamma,\rho)$ dacă şi numai dacă simbolul său $A(t,\mu)$, definit de egalitatea (2.4), îndeplineşte condiția*

$$det\, A(t,\mu) \neq 0 \quad (t \in \Gamma, 0 \le \mu \le 1). \quad (2.6)$$

Dacă condiția (2.6) este verificată şi $A(t,\mu) = \left\| \delta_{ij}(t,\mu) \right\|_{i,j=1}^{2}$, *atunci*

$$Ind A = -\frac{1}{2\pi}\left\{ arg \frac{det\, A(t,\mu)}{\delta_{22}(t,0)\delta_{22}(t,1)} \right\}_{(t,\mu)\in\Gamma\times[0,1]}.$$

III. Inversarea operatorului S^+

În spațiul $L_p(\mathbb{R},|t|^\beta)$, $(-1 < \beta < p-1)$, considerăm operatorul integral singular $A = cI + dS$, unde

$$(S\varphi)(x) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(y)}{y-x}dy,\ c(t) = \begin{cases} c_1 & pentru\ -\infty < t < 0, \\ c_2 & pentru\ 0 < t < \infty, \end{cases}$$

$$d(t) = \begin{cases} d_1 & pentru\ -\infty < t < 0, \\ d_2 & pentru\ 0 < t < \infty, \end{cases} \quad (c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{C}).$$

STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2015, nr.7(87)
Seria "Ştiinţe exacte şi economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.40-59

Utilizând rezultatele din [1], deducem că operatorul A este inversabil în $L_p(\mathbb{R},|t|^{\beta})$ dacă şi numai dacă arcul (sau segmentul)

$$l((c_2+d_2)(c_1-d_1),(c_2-d_2)(c_1+d_1);2\pi(1+\beta)/p)$$

nu trece prin punctul $z=0$. În acest paragraf se expune o metodă [1] de determinare a inversului operatorului A şi, implicit, a operatorului S^+,

$$(S^+\varphi)(x)=\frac{1}{\pi i}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(y)}{y-x}dy \quad (y\in\mathbb{R}^+),$$

bazată pe un şir de transformări funcţionale.

Fie $\nu: L_p(\mathbb{R},|t|^{\beta})\to L_p(\mathbb{R}^+,t^{\beta})\dotplus L_p(\mathbb{R}^+,t^{\beta})$ aplicaţia definită de egalitatea $(\nu\varphi)(t)=(\varphi(t),\varphi(-t))$ $(t>0)$. Operatorul $\nu A\nu^{-1}$, care acţionează în spaţiul $L_p^2(\mathbb{R}^+,t^{\beta})$, poate fi exprimat sub formă de matrice de ordinul doi:

$$\nu A\nu^{-1}=\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{Vmatrix},$$

unde $A_{jk}\in L(L_p(\mathbb{R}^+,t^{\beta}))$. Să determinăm operatorii A_{jk}. Fie $\varphi\in L_p(\mathbb{R},|t|^{\beta})$ şi $A\varphi=\psi$. Ultima egalitate poate fi scrisă sub forma

$$c_2\varphi(t)+\frac{d_2}{\pi i}\int_{-\infty}^{0}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau+\frac{d_2}{\pi i}\int_0^{\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=\psi(t) \quad (t>0),$$

$$c_1\varphi(-t)+\frac{d_1}{\pi i}\int_{-\infty}^{0}\frac{\varphi(\tau)}{\tau+t}d\tau+\frac{d_1}{\pi i}\int_0^{\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau+t}d\tau=\psi(-t) \quad (t>0),$$

sau

$$\begin{cases} c_2\varphi_1+d_2S^+\varphi_1-d_2N\varphi_2=\psi_1 & (t>0),\\ c_1N\varphi_1+d_1\varphi_2-d_1S^+\varphi_2=\psi_2 & (t>0),\end{cases}$$

unde $\varphi_1=\varphi(t),\varphi_2=\varphi(-t)\ (t>0)$,

$$(S^+f)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{x-t}dx\ (0\le t\le\infty),\ (Nf)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{x+t}dx\ (0<t<\infty).$$

Astfel,

$$\nu A\nu^{-1}=\begin{Vmatrix} c_2I+d_2S^+ & -d_2N\\ d_1N & c_1I-d_1S^+\end{Vmatrix}. \tag{3.1}$$

Notăm prin W_{γ} operatorul ce acţionează izometric din spaţiul $L_p(\mathbb{R}^+,t^{\beta})$ în spaţiul $L_p(\mathbb{R}^+,t^{-1})$ şi definit prin egalitatea

$$(W_{\gamma}h)(t)=t^{\gamma}h(t) \quad (\gamma=(1+\beta)/p).$$

Atunci

$$(W_{\lambda}S^+W_{\gamma}^{-1}\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)t^{\gamma}}{(x-t)x^{\gamma}}dx=\frac{1}{\pi i}\int_0^{+\infty}\varphi(x)\frac{(tx^{-1})^{\gamma}}{1-tx^{-1}}\frac{dx}{x} \tag{3.2}$$

şi

$$(W_{\lambda}NW_{\gamma}^{-1}\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_0^{+\infty}\varphi(x)\frac{(tx^{-1})^{\gamma}}{1+tx^{-1}}\frac{dx}{x}. \tag{3.3}$$

Semiaxa pozitivă $\mathbb{R}^+$ o vom considera ca un grup abelian (în raport cu înmulţirea) cu măsura lui Haar dx/x. Atunci integralele din partea dreaptă a egalităţilor (3.2) şi (3.3) reprezintă convoluţii:

$$(W_{\lambda}SW_{\gamma}^{-1}\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\frac{t^{\gamma}}{1-t}*\varphi(t), \qquad (W_{\lambda}NW_{\gamma}^{-1}\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\frac{t^{\gamma}}{1+t}*\varphi(t).$$

STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2015, nr.7(87)
Seria "Ştiinţe exacte şi economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.40-59

Fie F transformata lui Fourier pe grupul $\mathbb{R}^+$,

$$(F\varphi)(\xi)=\int_0^\infty \varphi(t)t^{-i\xi}\frac{dt}{t}\ (-\infty<\xi<\infty).$$

Notăm cu $s^+(\xi)$ şi $n(\xi)$ transformatele Fourier ale funcţiilor $\frac{1}{\pi i}\frac{t^\gamma}{1-t}$ şi, respectiv, $\frac{1}{\pi i}\frac{t^\gamma}{1+t}$, iar $M=FW_\gamma\nu$. Atunci operatorul MAM^{-1} reprezintă un operator de multiplicare la matricea de funcţii

$$\left\|\begin{matrix} c_2+d_2s^+(\xi) & -d_2\,n(\xi) \\ d_1\,n(\xi) & c_1-d_1s^+(\xi)\end{matrix}\right\|.$$

Determinăm funcţiile $n(\xi)$ şi $s^+(\xi)$:

$$n(\xi)=\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \frac{t^{\gamma-i\xi-1}}{1+t}dt=\frac{2e^{\pi(\xi+i\gamma)}}{e^{2\pi(\xi+i\gamma)}-1},$$

Un calcul direct ne dă

$$s^+(\xi)=\frac{e^{2\pi(\xi+i\gamma)}+1}{e^{2\pi(\xi+i\gamma)}-1}. \tag{3.4}$$

Această formulă poate fi obţinută şi în felul următor. Deoarece $S^2=I$ şi

$$MSM^{-1}=\left\|\begin{matrix} s^+(\xi) & -n(\xi) \\ n(\xi) & -s^+(\xi)\end{matrix}\right\|,$$

atunci

$$\left\|\begin{matrix} s^2-n^2 & 0 \\ 0 & s^2-n^2\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{matrix}\right\|,\ \text{prin urmare } s^2(\xi)=1+n^2(\xi). \tag{3.5}$$

În plus, cunoaştem că spectrul operatorului S^+ în spaţiul $L_\rho(\mathbb{R}^+,t^\beta)$ (a se vedea [1]) coincide cu arcul $l(-1,1;2\pi\gamma)$. Aşa cum mulţimea valorilor funcţiei $s^+(\xi)$ se conţine în spectrul operatorului S^+, urmează

$$Im s^+(\xi)>0\ pentru\,\gamma>1/2;\ Im s^+(\xi)<0\ pentru\,\gamma<1/2. \tag{3.6}$$

Condiţiile (3.5) şi (3.6) determină în mod univoc funcţia $s^+(\xi)$. Notăm $s^+(\xi)$ prin ς, atunci $n(\xi)=\sqrt{\varsigma^2-1}$, unde prin $\sqrt{\varsigma^2-1}$ este notată ramura univocă, care capătă valoarea $1/i\sin\pi\gamma$ în punctul $\varsigma=-ictg(\pi\gamma/2)$. Astfel, operatorul MAM^{-1} reprezintă un operator de multiplicare la matricea de funcţii

$$A(\varsigma)=\left\|\begin{matrix} c_2+d_2\varsigma & -d_2\sqrt{\varsigma^2-1} \\ d_1\sqrt{\varsigma^2-1} & c_1-d_1\varsigma\end{matrix}\right\|,$$

unde variabila $\varsigma=s^+(\xi)$ parcurge arcul $l(-1,1;2\pi\gamma)$.

Vom analiza următorul exemplu. În [1] a fost arătat că operatorul S^+ este inversabil în spaţiul $L_\rho(\mathbb{R}^+)$ $(1<\rho<\infty)$ dacă şi numai dacă $p\neq 2$. Să determinăm inversul operatorului S^+. Fie $M_0=FW_{1/p}$, unde F şi $W_{1/p}$ sunt operatorii definiţi mai sus, $\varphi\in L_\rho(\mathbb{R}^+)$, $\psi=S^+\varphi$ şi $\hat\varphi=M_0\varphi$. Atunci $M_0S^+M_0^{-1}\varphi=\hat\psi$ şi, în baza celor demonstrate mai sus, avem $s^+(\xi)\hat\varphi(\xi)=\hat\psi(\xi)$. Aşadar,

$$\hat\psi(\xi)=\frac{e^{2\pi(\xi+i\gamma)}+1}{e^{2\pi(\xi+i\gamma)}-1}\hat\varphi(\xi),$$

unde $\gamma = 1/p$. Egalitatea (2.4) a fost obţinută pentru $0 < \gamma < 1$. Ţinând cont de această condiţie, transcriem funcţia $\hat{\psi}(\xi)$ în felul următor:

$$\hat{\psi}(\xi) = \frac{e^{2\pi(\xi + i\gamma - i/2)} + 1}{e^{2\pi(\xi + i\gamma - i/2)} - 1}\hat{\varphi}(\xi), \; pentru \; p > 2$$

şi

$$\hat{\psi}(\xi) = \frac{e^{2\pi(\xi + i\gamma + i/2)} + 1}{e^{2\pi(\xi + i\gamma + i/2)} - 1}\hat{\varphi}(\xi), \; pentru \; p < 2.$$

Efectuăm transformarea inversă a lui Fourier, ţinând cont de faptul că $(W_{1/p}f)(t) = f(t)t^{1/p}$. Fie $2 < p < \infty$, atunci

$$t^{1/p}\psi(t) == \int_0^\infty \varphi(\tau)\tau^{1/p} \frac{(t\tau^{-1})^{1/p - 1/2}}{1 - t\tau^{-1}} \frac{d\tau}{\tau} \;,$$

prin urmare,

$$\psi(t) == \int_0^\infty \sqrt{\tau/t} \; \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \;.$$

De aici rezultă că pentru $p > 2$ avem

$$((S^+)^{-1}\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \sqrt{\tau/t} \; \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \;. \tag{3.7}$$

Pentru $1 < p < 2$, în mod similar, obţinem:

$$((S^+)^{-1}\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \sqrt{t/\tau} \; \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \;. \tag{3.8}$$

Observaţie. Operatorul definit de partea dreaptă a egalităţii (3.7) este inversul operatorului S^+ şi în spaţiul $L_p(\mathrm{R}^+, t^\beta)$ pentru $2(1+\beta) < p$, iar operatorul definit de partea dreaptă a relaţiei (3.8) este inversul lui S^+ pentru $2(1+\beta) > p$. Pentru $2(1+\beta) = p$ operatorul S^+ nu este inversabil. Aceasta rezultă din teorema 1.4, deoarece pentru $2(1+\beta) = p$, $\beta = \frac{p}{2} - 1$, operatorii $t^{\pm 1/2} S t^{\mp 1/2} I$ nu sunt mărginiţi în $L_p(\mathrm{R}^+, t^\beta)$.

IV. Calcularea normelor operatorilor singulari P, Q şi S în cazul conturului de tip Leapunov

În [1] a fost demonstrat că norma $\|S\|$ a operatorului integral singular

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \;\; (\Gamma_0 = \{t : |t| = 1;\}, t \in \Gamma_0)$$

este egală cu $\nu(p)$, unde

$$\nu(p) = \begin{cases} ctg\pi/2p, & pentru \;\; p = 2^n, \\ tg\pi/2p, & pentru \;\; p = \dfrac{2^n}{2^n - 1}. \end{cases}$$

După publicarea acestor rezultate au apărut un şir de lucrări (a se vedea bibliografia din [1]), în care au fost evaluate şi calculate normele operatorilor singulari în diferite spaţii. În [4] a fost calculată norma operatorului

$$(C\varphi)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(y) ctg \frac{y - t}{2} dy.$$

S-a arătat că şi norma (în spaţiul $L_p(0,2\pi)$ acestui operator verifică egalitatea $\|C\| = \nu(p)$. Acest rezultat, la rândul său, a permis să fie demonstrat că egalitatea $\|S\| = \nu(p)$ are loc pentru orice $p \in (1,\infty)$. Cazul în care conturul de integrare are puncte unghiulare a fost considerat în [6], iar cazul conturului cu puncte de autointersecţie – în [7]. S-a stabilit că în aceste cazuri are loc inegalitatea $\|S\| > \nu(p)$ şi că norma $\|S\|$ mai depinde şi de mărimea unghiurilor formate de contur în punctele sale unghiulare.

În acest paragraf sunt calculate normele operatorilor de proiecţie $P = \frac{1}{2}(I + S)$ şi $Q = I - P$ în spaţiile $L_p(\Gamma_0)$ $(1 < p < \infty)$, precum şi normele esenţiale ale acestor operatori pentru orice contur de tip Leapunov. Menţionăm că evaluările inferioare pentru aceste norme au fost stabilite în [1,2] şi tot acolo a fost formulată ipoteza că aceste evaluări sunt exacte.

Pentru început vom demonstra următoarea teoremă.

Teorema 4.1. Fie $f(t) = \sum_{k=-n}^{n} f_k t^k$ *un polinom trigonometric cu coeficienţii* $f_k \in \mathbb{C}$ *care verifică condiţiile* $f_{-k} = \overline{f_k}$. *Atunci norma funcţiei*

$$h(t) = 2\sum_{k=-n}^{n} f_k t^k - f_0 \tag{4.1}$$

în spaţiul $L_p(\Gamma_0)$ $(1 < p < 2)$ *admite evaluarea*

$$\|h\| \le \frac{2}{\sin \pi/p}\|f\|.$$

Pentru a demonstra această teoremă vom avea nevoie de următoarele două leme:

Lema 4.1. *Pentru* $|x| < \frac{\pi}{2}$, $0 < y < \pi$ *şi* $1 < p \le 2$ *are loc relaţia*

$$\frac{2^p \cos^p x}{\sin^p \pi/p} - \alpha(p)\sin py - \beta(p)\cos px \ge 1, \tag{4.2}$$

unde $\alpha(p) = \dfrac{1}{\sin \pi/2p} - 1$ *şi* $\beta(p) = \dfrac{1}{\sin^{p-1} \pi/2p \cos \pi/2p}$.

Demonstraţie. În dreptunghiul $D = \left\{ (x,y) : |x| \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \pi \right\}$ vom cerceta la extremum funcţia

$$F(x,y) = \frac{2^p \cos^p x}{\sin^p \pi/p} - \alpha(p)\sin py - \beta(p)\cos px \; . \; 0 \le y \le \pi,$$

Obţinem că în punctul $x = y = \frac{\pi}{2p}$ funcţia $F(x,y)$ are un minim. Aşa cum $F\left(\frac{\pi}{2p}, \frac{\pi}{2p}\right) = 1$, rezultă că $F(x,y) \ge 1$ pentru orice x şi y din dreptunghiul D. Astfel, inegalitatea (4.2) este demonstrată.

Amintim că o funcţie reală u continuă într-un domeniu G se numeşte subarmonică (a se vedea [8]) dacă pentru orice cerc închis $C \subset G$ cu centrul în punctul z_0 şi cu raza r are loc relaţia

$$u(z_0) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})d\theta. \tag{4.3}$$

Se ştie (a se vedea [8]) că u este funcţie subarmonică dacă şi numai dacă pentru orice punct $z \in G$ relaţia (4.3) este îndeplinită pentru r destul de mici.

Lema 4.2*. Funcțiile* $g_1, g_2 : \mathbb{C} \to \mathrm{R}$, *definite de relațiile* $g_1(z) = |z|^p \cos(p\alpha_1(z))$, $g_2(z) = |z|^p \sin(p\alpha_2(z))$, *unde*

$$\alpha_1(x+iy) = \operatorname{arctg} y/|x|,\ \alpha_2(x+iy) = \operatorname{arctg} x/|y|,\ p \in (1,2),$$

sunt funcții subarmonice în $\mathbb{C}$.

Demonstrație. Proprietatea că funcția g_1 este subarmonică poate fi obținută din [4]. Vom demonstra că funcția g_2 este subarmonică în $\mathbb{C}$; vom verifica că în orice punct $z \in \mathbb{C}$ funcția g_2 îndeplineşte condiția (4.3). Observăm că funcția g_2 coincide în semiplanul de sus $\operatorname{Im} z \geq o$ cu funcția armonică $Im\, z^p$ $(0 < \arg z < \pi)$, iar în semiplanul de jos cu funcția armonică $\operatorname{Im}(-z)^p$ $(-\pi < \arg z < 0)$. Prin urmare, pentru orice z, $\operatorname{Im} z \neq 0$, şi pentru r destul de mici relația (4.3) este verificată. Fie $z = 0$, atunci pentru orice număr pozitiv r vom avea

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_2(re^{i\varphi})d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} r^p \sin(p\varphi)d\varphi = \frac{r^p}{p\pi}(1 - \cos p\pi) \geq 0 = g_2(o).$$

Deci, relația (4.3) este verificată şi pentru $z = 0$.

A mai rămas să considerăm punctele $z = x$, unde x este orice număr real diferit de zero. Fie $h_2(z) = Im\, z^p$ $(z \neq 0, 0 \leq \arg z \leq \pi, -\pi \leq \arg z < -\pi/2, -\pi/2 < \arg z \leq 0)$. Funcțiile h_2 şi g_2 coincid în semiplanul de sus. Vom arăta că în punctele semiplanului de jos, pentru care $\operatorname{Im} z \leq 0$, diferența $g_2 - h_2$ este nenegativă. Fie $z = re^{i\theta}$ $(r > 0, -\pi \leq \theta < -\pi/2)$, atunci

$$g_2(z) - h_2(z) = r^p(\sin p(\theta + \pi) - \sin p\theta) = 2r^p \sin p(\theta + \pi/2)\cos \pi p/2 \geq 0.$$

Dacă însă $z = re^{i\theta}$ $(r > 0, -\pi/2 \leq \theta \leq 0)$, atunci

$$g_2(z) - h_2(z) = r^\rho(\sin(-\rho\theta) - \sin \rho\theta) = -2r^\rho \sin \rho\theta \geq 0.$$

Prin urmare, $g_2 - h_2 \geq 0$. Aşa cum, în plus, funcția h_2 este armonică în planul complex cu tăietura de-a lungul dreptei $\operatorname{Im} z = 0$, atunci pentru orice număr r $(0 < r < |x|)$ obținem următoarea relație:

$$g_2(x) = h_2(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h_2(x + re^{i\varphi})\,d\varphi \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_2(x + re^{i\varphi})\,d\varphi.$$

Aşadar, relația (4.3) este verificată. Lema este demonstrată.

Demonstrația teoremei. Punem

$$g(z) = i\left(\sum_{k=-n}^{-1} f_k t^k - \sum_{k=1}^{n} f_k t^k\right).$$

Uşor se observă că pe cercul Γ_0 avem $f = Re\, h$ şi $g = Im\, h$, adică $f + ig = h$. Notăm cu f_1 şi f_2 funcțiile $f_1(z) = g_1(h(z))$, respectiv, $f_2(z) = g_2(h(z))$, unde g_1 şi g_2 sunt funcțiile subarmonice din lema 4.2. Aşa cum funcția h este olomorfă în $\mathbb{C}$, iar g_1 şi g_2 sunt subarmonice, rezultă că f_1 şi f_2 sunt, de asemenea, subarmonice. Fie $\psi_1(z) = \alpha_1(h(z))$ şi $\psi_2(z) = \alpha_2(h(z))$, unde

$$\alpha_1(x + iy) = \operatorname{arctg}\ y/|x|,\quad \alpha_2(x + iy) = \operatorname{arctg}\ |y|/x.$$

Funcțiile ψ_1 şi ψ_2 sunt definite în punctele z, în care $h(z) \neq 0$. Prelungim aceste funcții în mod arbitrar în punctele z, în care $h(z) = 0$; atunci, funcțiile f_1 şi f_2 pot fi reprezentate sub forma

$$f_1 = |h|^p \cos(p\psi_1(z)),\ f_2 = |h|^p \sin(p\psi_2(z)).$$

Se verifică că pentru $|z| = 1$ au loc egalitățile

$$|f(z)| = |h(z)|\cos\psi_1(z),\ |g(z)| = |h(z)|\sin\psi_2(z). \tag{4.4}$$

Din lema 4.1 rezultă că

$$\int_{\Gamma_0}|h(z)|^p|dz| \le \frac{2^p}{\sin^p \pi/p}\int_{\Gamma_0}|h(z)|^p \cos^p\psi_1(z)|dz| + \alpha(p)\int_{\Gamma_0}|h(z)|^p \sin p\psi_2(z)|dz| -$$

$$\beta(p)\int_{\Gamma_0}|h(z)|^p \cos p\psi_1(z|dz| . \qquad (4.5)$$

Vom arăta că ultimele două integrale din partea dreaptă a relaţiei (4.5) sunt nenegative. Aşa cum f este funcţie reală, atunci $Im\, h(0)=0$, adică $g(0)=0$. De aici rezultă că în cazul în care $h(0)\neq 0$, avem $\psi_2(0)=0$ şi, prin urmare, $f_1(0)=|h(0)|^p$, iar $f_2(0)=0$. Din faptul că f_1 şi f_2 sunt funcţii subarmonice deducem că

$$\begin{aligned} 0 \le f_1(0) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(e^{i\varphi})d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_0}|h(z)|^p \cos(p\psi_1(z))|dz|,\\ 0 \le f_2(0) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_2(e^{i\varphi})d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_0}|h(z)|^p \sin(p\psi_2(z))|dz|. \end{aligned} \qquad (4.6)$$

Din (4.4 –4.6) rezultă că

$$\int_{\Gamma_0}|h(t)|^p|dt| \le \frac{2^p}{\sin^p \pi/p}\int_{\Gamma_0}|f(t)|^p|dt|.$$

Teorema este demonstrată.

Teorema 4.1 are o semnificaţie importantă. Fie $L_p^R(\Gamma_0)$ spaţiul real L_p pe conturul Γ_0 şi A operatorul

$$A\left(\sum_{k=-n}^{n} f_k t^k\right) = 2\sum_{k=0}^{n} f_k t^k - f_0 \ (|t|=1)$$

definit pe mulţimea polinoamelor trigonometrice reale. Observăm că operatorul A diferă de operatorul $2P = I - S$ numai cu un termen compact.

Teorema 4.2. *Pentru norma esenţială a operatorului P are loc egalitatea*

$$|P| = \inf_{T\in\mathfrak{T}}\|P+T\| = \frac{1}{\sin \pi/p} \qquad (1<p<\infty),$$

unde T *înseamnă mulţimea tuturor operatorilor compacţi în spaţiul $L_p^R(\Gamma_0)$.*

Demonstraţie. Relaţia

$$|P| \le \frac{1}{\sin \pi/p}$$

pentru 1 <*p*< 2 rezultă din teorema 1, iar pentru $2 \le p < \infty$ poate fi obţinută trecând la operatorul adjunct. Semnul egalităţii se realizează în baza rezultatelor din [1]. Teorema este demonstrată.

Consecinţa 4.1. *Din relaţia* $\left\|P - \frac{K}{2}\right\| = \left\|Q + \frac{K}{2}\right\|$, *unde* $Q = I - P$ şi $(Kf)(t) = f_0$, *obţinem* $|Q| = \frac{1}{\sin \pi/p}$.

Consecinţa 4.2. *Fie* Γ *orice contur închis de tip Leapunov,* S_Γ, P_Γ *şi* Q_Γ *operatorii respectivi în spaţiul* $L_p(\Gamma)$. *Atunci* $|P_\Gamma| = |Q_\Gamma| = \frac{1}{\sin \pi/p}$ *şi* $\|S_\Gamma\| = \nu(p)$.

V. Calcularea normelor esenţiale ale operatorilor singulari P, Q şi S în cazul conturului cu puncte unghiulare

În acest paragraf este abordată problema determinării normelor esenţiale ale operatorilor integrali singulari în cazul conturului Leapunov pe porţiuni, folosind simbolul acestor operatori, precum şi unele rezultate clasice din analiza funcţională referitoare la norma operatorului în spaţii Hilbert. Formulele obţinute pentru normele esenţiale demonstrează că ele depind de prezenţa punctelor unghiulare pe conturul de integrare.

Fie Γ un contur închis Leapunov pe porţiuni. Notăm prin $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$ toate punctele unghiulare pe Γ cu unghiurile $\pi\alpha_k$ $(0<\alpha_k<1)$ $(k=1,2,...,n)$ şi

$$\rho(t)=\prod_{k=1}^{m}\left|t-t_k\right|^{\beta_k},\ (-1<\beta_k<p-1,\ m\geq n),$$

unde $t_k=\tau_k\,(k=1,2,...,n)$. Fie $CP(\Gamma)$ mulţimea funcţiilor definite pe Γ şi continue pe porţiuni, iar $\sum(\Gamma,\rho)(\subset L(L_p(\Gamma,\rho)))$ – algebra generată de operatorii $(H\varphi)(t)=h(t)\varphi(t)$ $(h\in CP(\Gamma))$ şi operatorul S_Γ. Menţionăm că $\mathrm{T}\subset\sum(\Gamma,\rho)$. Amintim definiţia simbolului operatorilor din $\sum(\Gamma,\rho)$ (a se vedea [3,5]). Pentru aceasta este suficientă cunoaşterea simbolurilor operatorilor H şi S_Γ. Simbolul $H(t,\xi)$ al operatorului H este definit în felul următor:

$$H(t,\xi)=\begin{Vmatrix} h(t+0) & 0\\ 0 & h(t-0)\end{Vmatrix}\ (t\in\Gamma). \tag{5.1}$$

Simbolul $S(t,\xi)$ $(t\in\Gamma,\xi\in\mathrm{R})$ al operatorului S_Γ este definit de egalitatea

$$S(t,\xi)=\begin{Vmatrix} cth\pi(\xi+i\gamma(t)) & -\dfrac{exp(\alpha(t)-1)\pi(\xi+i\gamma(t))}{sh\pi(\xi+i\gamma(t))}\\ \dfrac{exp(1-\alpha(t))\pi(\xi+i\gamma(t))}{sh\pi(\xi+i\gamma(t))} & -cth\pi(\xi+i\gamma(t))\end{Vmatrix}, \tag{5.2}$$

unde $\alpha(t)=\alpha_k(t)$ pentru $t=\tau_k\,(k=1,2,...,n)$, $\alpha(t)=1$ pentru $t\in\Gamma\setminus\{\tau_1,\tau_2,....,\tau_n\}$, $\gamma(t)=\dfrac{1+\beta_k}{p}$ pentru $t=t_k\,(k=1,2,...,m)$ şi $\gamma(t)=\dfrac{1}{p}$ pentru $t\in\Gamma\setminus\{t_1,t_2,....,t_m\}$.

Teorema 5.1. *Fie $A\in\sum(\Gamma,\rho)$ şi $A(t,\xi)$ simbolul lui. Operatorul A este noetherian în spaţiul $L_p(\Gamma,\rho)$ dacă şi numai dacă*

$$det\,A(t,\xi)\neq 0\quad (t\in\Gamma,\xi\in\overline{\mathrm{R}}). \tag{5.3}$$

Fie $A\in L(\mathrm{B})$ şi $\mathrm{T}(\mathrm{B})$ idealul bilateral, format de operatorii compacţi în B. Amintim că norma esenţială a operatorului A este definită de relaţia

$$|A|=\inf_{T\in\mathrm{T}(\mathrm{B})}\left\|A+T\right\|. \tag{5.4}$$

Acest paragraf este consacrat calculului normelor esenţiale ale operatorilor S, P, Q.

Vom începe cu cazuri particulare. Fie Γ_α $(0<\alpha\leq 1)$ un contur format din două semidrepte ce pornesc din punctul $z=0$. Presupunem că $\mathrm{R}^+\subset\Gamma_\alpha$. Notăm prin $K_{\alpha\beta}\left(\subset L(L_2(\Gamma_\alpha,|t|^\beta)),\ -1<\beta<1\right)$ algebra generată de operatorii $S_\alpha\,(=S_{\Gamma_\alpha})$ şi S_α^*, iar prin $\left|S_\alpha\right|_\beta$ notăm norma esenţială a operatorului S_α în spaţiul $L_2(\Gamma_\alpha,|t|^\beta)$. Dacă $\beta=0$, atunci punem $\left|S_\alpha\right|_0=\left|S_\alpha\right|$.

Este cunoscut faptul (a se vedea [2]) că în cazul în care conturul Γ satisface condițiile lui Leapunov $(\alpha=1)$ $|S_\Gamma|_\beta$ depinde de numărul β și nu depinde de conturul Γ. În particular, pentru $\beta=0$ avem $|S_\Gamma|=1$ pentru orice contur închis de tip Leapunov. Vom vedea că această proprietate devine falsă în cazul în care conturul Γ are puncte unghiulare.

Amintim că pentru orice operator A dintr-o algebră Σ cu simbol simetric are loc egalitatea

$$\inf_{T\in \mathrm{T}(\Sigma)}\|A+T\| = \max_x s_1(A(x)), \tag{5.5}$$

unde $A(x)$ este simbolul operatorului A, iar $s_1^2(A(x))$ înseamnă cea mai mare valoare proprie a matricei $A(x)(A(x))^*$. Notăm prin $\hat{\sigma}(AA^*)$ spectrul clasei adiacente $\{AA^*+T\}$ în algebra cât $\Sigma/\mathrm{T}(\Sigma)$. Atunci relația (5.5) poate fi scrisă sub forma

$$\inf_{T\in \mathrm{T}(\Sigma)}\|A+T\|^2 = \max_{\lambda\in\hat{\sigma}(AA^*)} \lambda.$$

Remarcăm că mulțimea $\hat{\sigma}(AA^*)$ coincide cu mulțimea valorilor λ pentru care operatorul $AA^*-\lambda I$ nu este noetherian. Notăm cu $M(\lambda,t,\xi)$ simbolul operatorului $M=AA^*-\lambda I$. Atunci, spectrul esențial $\hat{\sigma}(AA^*)$ al operatorului AA^* coincide cu valorile $\lambda\in\mathbb{C}$, pentru care $\det M(\lambda,t,\xi)$ se anulează într-un punct $(t,\xi)\in\Gamma\times\overline{\mathbb{R}}$. Prin urmare, $|A|^2$ coincide cu valoarea maximală a rădăcinilor ecuației $\det M(\lambda,t,\xi)=0$.

În formula (5.2), pentru simbolul operatorului S_Γ, definit de formula (5.2), înlocuim ξ prin $\xi/2\pi$. Atunci, aplicând cele menționate anterior pentru operatorul S_α, obținem:

$$|S_\alpha|_\beta^2 = \max_{-\infty\le\xi\le\infty}\left(f_{\alpha,\beta}(\xi)+\sqrt{f_{\alpha,\beta}^2(\xi)-1}\right), \tag{5.6}$$

unde

$$f_{\alpha,\beta}(\xi)=\frac{1-\cos\pi\beta\cdot e^{\xi}+e^{2\xi}+2e^{(2-\alpha)\xi}+2e^{\alpha\xi}}{1+2\cos\pi\beta\cdot e^{\xi}+e^{2\xi}}.$$

În particular, dacă $\alpha=\pi$, adică $\Gamma_\alpha=\mathbb{R}$, atunci din egalitatea (5.6) obținem:

$$|S_{\mathbb{R}}|_{L_2(\mathbb{R},|x|^\beta)} = ctg\frac{\pi(1-|\beta|)}{4}. \tag{5.7}$$

Fie $\beta=0$ și notăm prin $z=(1-e^{\xi})/(1+e^{\xi})$. Atunci

$$|S_\alpha| = ctg\frac{\theta(\alpha)}{2}, \tag{5.8}$$

unde

$$ctg\theta(\alpha)=\frac{1}{2}\max_{-1\le z\le 1}\left|(1+z)\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\alpha/2}-(1-z)\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha/2}\right|. \tag{5.9}$$

În particular,

$$\left|S_{1/3}\right| = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ și } \left|S_{1/2}\right| = \sqrt{2}.$$

În mod similar pentru operatorii $P_\alpha=\frac{1}{2}(I+S_\alpha)$ și $Q_\alpha=I-P_\alpha$, se obține

$$|P_\alpha|=|Q_\alpha|=(\sin\theta(\alpha))^{-1}.$$

Aceste relații sunt în concordanță cu rezultatele din [2].

Teorema 5.2. *Norma esențială a operatorului S_α în $L_2(\Gamma_\alpha)$ este o funcție continuă și monoton descrescătoare pe intervalul $(0,1]$ și*

$$1\le |S_\alpha|_{L_2(\Gamma_\alpha)} \le 1+\sqrt{2}.$$

STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2015, nr.7(87)
Seria "Ştiinţe exacte şi economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.40-59

Afirmaţia teoremei rezultă fără dificultate din relaţia (5.8), de aceea demonstraţia va fi neglijată.

În cele ce urmează considerăm cazul general. Fie Γ un contur închis Leapunov pe porţiuni. Notăm prin $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$ toate punctele unghiulare cu unghiurile $\alpha_k (k = 1,...,n)$. În spaţiul $L_2(\Gamma, \rho)$ considerăm operatorul

$$A = S_\Gamma \cdot S_\Gamma^* - \lambda I.$$

Simbolul operatorului A are forma

$$A(t,\xi) = S(t,\xi)(S(t,\xi))^* - \lambda E_2,$$

unde E_2 este matricea unitate de ordinul doi. În punctele $t \in \Gamma \setminus \{\tau_1,...,\tau_n\}$ avem $A(t,\xi) = (1-\lambda)E_2$. Conform teoremei 5.1, operatorul A este noetherian dacă şi numai dacă $det A(t,\xi) \neq 0$.

Teorema 5.3. *Pentru normele esenţiale ale operatorilor S_Γ, P_Γ şi Q_Γ sunt adevărate următoarele relaţii*

$$|S_\Gamma|_{L_2(\Gamma,\rho)} = \max_{1\le k\le n} |S_{\alpha_k}|_{L_2(\Gamma_{\alpha_k}, |t|^{\beta_k})}. \tag{5.10}$$

Fie $min(\alpha_1,...,\alpha_n) = \alpha_{k_0} (1 \le k_0 \le n)$. Dacă $\alpha_{k_0} = 1$ (conturul este de tip Leapunov), atunci

$$|S_\Gamma|_{L_2(\Gamma,\rho)} = \max_{1\le k\le n} ctg \frac{\pi(1-|\beta_k|)}{4}. \tag{5.11}$$

Dacă $\rho(t) \equiv 1$, atunci

$$|S_\Gamma|_{L_2(\Gamma)} = ctg \frac{\theta(\alpha_{k_0})}{2}, \tag{5.12}$$

unde $\theta(\alpha)$ este definită de (5.9). Pentru operatorii P_Γ şi Q_Γ are loc egalitatea

$$|P_\Gamma| = |Q_\Gamma| = \frac{|S_\Gamma|^2_{L_2(\Gamma,\rho)} + 1}{2|S_\Gamma|_{L_2(\Gamma,\rho)}}. \tag{5.13}$$

Demonstraţie. Într-adevăr,

$$|S_\Gamma|^2_{L_2(\Gamma,\rho)} = \max_\lambda det(S(t,\xi)(S(t,\xi))^* - \lambda E_2) = 0.$$

Pentru $t \in \Gamma \setminus \{\tau_1,...,\tau_n\}$ avem

$$det(S(t,\xi)(S(t,\xi))^* - \lambda E_2) = (1-\lambda)^2$$

Pentru $t = \tau_k$ din teorema 5.1 rezultă

$$\max_\lambda det(S(t,\xi)(S(t,\xi))^* - \lambda E_2) = \max_{1\le k\le n} |S_{\alpha_k}|^2_{\beta_k}.$$

Prin urmare, $|S_\Gamma| = max(1, \max_k |S_{\alpha_k}|_{\beta_k}) = \max_k |S_{\alpha_k}|_{\beta_k}$ şi (5.10) este demonstrată.

Relaţiile (5.11), (5.12) şi (5.13) rezultă din (5.7), respectiv, din (5.8), dacă se repetă raţionamentele făcute la demonstrarea relaţiei (5.11).

Teorema este demonstrată.

Corolarul 5.1. $|S_\Gamma| = 1$ *dacă şi numai dacă conturul Γ este de tip Leapunov.*

Teorema 5.4. *Dacă $\sum_{k=1}^n \alpha_k \neq n$, atunci operatorul S_Γ^* nu aparţine algebrei Σ_0 generate de operatorul S_Γ şi de operatorii de multiplicare la toate funcţiile din $C(\Gamma)$.*

Demonstraţie. Aşa cum $\sum_{k=1}^n \alpha_k \neq n$, rezultă că există un $\alpha_{k_0} \neq 1$. Să admitem că $S_\Gamma^* \in \Sigma_0$. Deoarece algebra cât $\hat{\Sigma}_0 = \Sigma_0 / T(\Sigma_0)$ este comutativă, atunci din teorema lui I.Ghelfand rezultă că pe algebra Σ_0 există un simbol scalar $\{\gamma_M\}$. Notăm prin R_λ operatorul

$$R_\lambda = \lambda I - (S_\Gamma S_\Gamma^* - S_\Gamma^* S_\Gamma).$$

Din relaţia $\gamma_M(R_\lambda) = \lambda$, valabilă pentru orice ideal maximal M, rezultă că operatorul R_λ este noetherian pentru orice $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Prin urmare, din teorema 5.1 deducem că

$$det\left[\lambda E_2 - S(t,\xi)(S(t,\xi))^* + (S(t,\xi))^* S(t,\xi)\right] \neq 0$$

pentru orice $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ şi orice $(t,\xi) \in \Gamma \times \mathbb{R}$. Însă, aceasta este cu neputinţă, deoarece

$$det\left[\lambda E_2 - S(\tau_{k_0},\xi)(S(\tau_{k_0},\xi))^* + (S(\tau_{k_0},\xi))^* S(\tau_{k_0},\xi)\right]$$

se anulează pentru o mulţime de valori $\lambda = \lambda(\xi)$ de puterea continuumului.

Teorema este demonstrată.

Corolarul 5.2. *Operatorul $S_\Gamma - S_\Gamma^*$ este compact dacă şi numai dacă conturul Γ este de tip Leapunov.*

Într-adevăr, suficienţa a fost demonstrată în [1]. Reciproc, fie $S_\Gamma - S_\Gamma^*$ compact în spaţiul $L_2(\Gamma)$. Atunci $SS^* = I + T,$ unde T este compact. Aşadar, $\left|SS^*\right| = 1$; prin urmare, $|S| = 1$ şi din (5.10) deducem că conturul Γ nu are puncte unghiulare, adică este de tip Leapunov.

Fie F_Γ^+ $(F_{\Gamma_0}^+)$ domeniul mărginit de conturul Γ (Γ_0), unde Γ_0 este cercul unitate. Notăm prin $\omega\colon F_\Gamma^+ \to F_{\Gamma_0}^+$ funcţia lui Riemann care transformă conform domeniul F_Γ^+ în $F_{\Gamma_0}^+$.

Teorema 5.5. *Operatorul*

$$(T_\omega\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \left(\left| \frac{\omega'(t)}{\omega'(\tau)} \right|^{1/2} \frac{\omega'(\tau)}{\omega(\tau) - \omega(t)} - \frac{1}{\tau - t} \right) \varphi(\tau)d\tau$$

este compact dacă şi numai dacă conturul Γ este de tip Leapunov.

Operatorul $A = aI + bS_\Gamma + bT_\omega (a,b \in L_\infty(\Gamma))$ este noetherian în $L_2(\Gamma)$ dacă şi numai dacă operatorul $A_0 = aI + bS_\Gamma$ este noetherian. În plus,

$$Ind(aI + bS_\Gamma + bT_\omega) = Ind(aI + bS_\Gamma).$$

Demonstraţie. Operatorul

$$(B\varphi)(t) = |\omega'(t)|^{1/2}\varphi(\omega(t))$$

aplică izometric spaţiul $L_2(\Gamma_0)$ pe $L_2(\Gamma)$. Prin verificare directă se obţine că

$$BS_{\Gamma_0}B^{-1}\varphi - S_\Gamma\varphi = T_\omega\varphi \quad (5.14)$$

pentru orice funcţie φ holderiană pe Γ. Aşa cum operatorii $BS_{\Gamma_0}B^{-1} - S_\Gamma$ şi T_ω sunt mărginiţi în spaţiul $L_2(\Gamma)$, din (5.14) deducem că

$$BS_{\Gamma_0}B^{-1} - S_\Gamma = T_\omega. \quad (5.15)$$

Fie Γ de tip Leapunov, atunci funcţia $\omega'(t)$ verifică condiţiile Holder şi în orice punct $t \in \Gamma$ operatorul T_ω este echivalent cu operatorul integral K cu nucleul

$$k(\tau,t) = \frac{1}{\pi i}\left(\frac{\omega'(\tau)}{\omega(\tau) - \omega(t)} - \frac{1}{\tau - t} \right), \ (K\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma k(\tau,t)\varphi(\tau)d\tau,$$

care are singularitate slabă pe $\Gamma \times \Gamma$ şi, prin urmare, este compact. Din faptul că T_ω este echivalent cu operatorul K şi în baza principiului local al lui I.Simonenko rezultă că operatorul T_ω de asemenea este compact în $L_2(\Gamma)$. Reciproc. Fie T_ω compact şi presupunem, prin reducere la absurd, că conturul Γ nu este de tip Leapunov. Atunci din relaţia (5.10) rezultă că $|S_\Gamma| > 1$. Pe de altă parte, din (5.15) obţinem

$$|S_\Gamma| = \left|BS_{\Gamma_0}B^{-1} + T_\omega\right| = \left|BS_{\Gamma_0}B^{-1}\right| \leq \left|S_{\Gamma_0}\right| = 1.$$

Contrazicerea obţinută demonstrează că conturul Γ este de tip Leapunov.

Demonstrăm partea a doua a teoremei. Considerăm operatorul $\widetilde{A} = \widetilde{a}I + \widetilde{b}S_{\Gamma_0}$, unde $\widetilde{f}(z) = f(\omega^{-1}(z))\ (f(t) \in L_\infty(\Gamma))$. Atunci are loc egalitatea

$$A = B\widetilde{A}B^{-1} = aI + bS_\Gamma + bT_\omega. \tag{5.16}$$

Mulțimea valorilor funcțiilor $\widetilde{a}$ şi $\widetilde{b}$ coincide respectiv cu valorile funcțiilor a şi b; prin urmare, operatorul $\widetilde{A}$ este noetherian în $L_2(\Gamma_0)$ dacă şi numai dacă operatorul $A_0 = aI + bS_\Gamma$ este noetherian în $L_2(\Gamma)$. Pe de altă parte, din (5.15) rezultă că operatorul $\widetilde{A}$ este noetherian în $L_2(\Gamma_0)$ dacă şi numai dacă $A = A_0 + bT_\omega$ este noetherian în $L_2(\Gamma)$. Mai avem $Ind\,\widetilde{A} = Ind\,A = Ind\,A_0$. Teorema este demonstrată.

Corolarul 5.3. *T_ω este operator cu singularitate punctuală şi reprezintă perturbație admisibilă pentru operatorii de forma $aI + bS_\Gamma$.*

Teorema 5.6. *Fie Γ un contur Leapunov pe porțiuni. Norma esențială a operatorului S_Γ în spațiul $L_p(\Gamma)$ verifică relațiile*

$$|S_\Gamma| \le \begin{cases} ctg\dfrac{\theta(\alpha_{k_0})}{p}, & pentru\ \ p = 2^n, \\ tg^{t}\dfrac{\theta(\alpha_{k_0})}{2^n}\cdot ctg^{1-t}\dfrac{\theta(\alpha_{k_0})}{2^{n+1}}, & pentru\ \ 2^n \le p \le 2^{n+1}, \end{cases} \tag{5.17}$$

unde funcția $\theta(\alpha_{k_0})$ este definită de (5.9) şi $t = (2^{n+1} - p)/p$.

Demonstrație. Fie φ orice funcție rațională definită şi continuă pe Γ. Notăm prin $\varphi_+ = P_\Gamma\varphi$ şi $\varphi_- = Q_\Gamma\varphi$. Atunci $\varphi = (P_\Gamma + Q_\Gamma)\varphi = \varphi_+ + \varphi_-$, $S_\Gamma\varphi = P_\Gamma\varphi - Q_\Gamma\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$ şi

$$\varphi^2 + (S_\Gamma\varphi)^2 = 2(\varphi_+^2 - \varphi_-^2) = 2S_\Gamma(\varphi S_\Gamma\varphi).$$

Din această relație se deduce cu uşurință inegalitatea

$$\|S_\Gamma\|_{2p} \le \|S_\Gamma\|_p + \sqrt{1 + \|S_\Gamma\|_p^2}. \tag{5.18}$$

Prima relație din (5.17) rezultă din (5.12) şi (5.18), iar a doua relație din (5.17) se obține cu ajutorul teoremei de interpolare a lui M.Riesz. Teorema este demonstrată.

Bibliografie:

1. GOHBERG, I., KRUPNIK, N. One-dimensional linear singular integral equations. In: *Operator Theory*, vol.I, II. Basel-Boston – Stuttgart, 1992.
2. KRUPNIK, N. Banach algebras with symbol and singular integral operators. In: *Operator Theory: Advances and Applications* (Birkhäuser Verlag, Basel) 1987, no.26, 138 p.
3. NEAGU, V. *Algebre Banach generate de operatori integrali singulari*. Chişinău: USM, 2005. 252 p.
4. PICHORIDES, S. On the best values of the constants in the theorems M.Riesz, Zygmund and Kolmogorov. In: *Studia Mathematica*, 1972, vol.19, no.2, p.165-179.
5. КРУПНИК, Н., НЯГУ, В. Сингулярные интегральные операторы со сдвигом вдоль кусочно-ляпуновского контура. В: *Известия Вузов* (математика), 1975, №6, с.60-72.
6. НЯГУ, В. О символе сингулярных интегральных операторов в случае кусочно-ляпуновского контура. В: *Математические исследования*, вып.9, №2. Кишинёв: Штиинца, 1974, с.109-125.
7. НЯГУ, В. О фактор-норме сингулярных операторов в случае сложного контура. В: *Известия Вузов* (математика), 1978, №8, с.74-79.
8. ТИМАН, А., ТРОФИМОВ, В. *Введение в теорию гармонических функций.* Москва: Наука, 1968.
9. ХВЕДЕЛИДЗЕ, Б. *Метод интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной*. Москва: Наука, 1975. 262 с.

Prezentat la 09.09.2015