STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2015, nr.7(87)
Seria "Științe exacte și economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.36-39

ASUPRA FORMĂRII INTUIȚIEI PROBABILISTE

Andrei POŞTARU, Olga BENDERSCHI
Universitatea de Stat din Moldova

În lucrare este examinat rolul unor exerciții şi probleme, special alese, care îndeosebi pot contribui la formarea şi dezvoltarea intuiției şi gândirii probabiliste. Sunt prezentate numeroase exemple clasice şi paradoxuri cunoscute, dar şi probleme originale. Este analizată şi partea metodică a rezolvării problemelor propuse.
Cuvinte-cheie: *probabilitate, intuiție probabilistă, formarea şi dezvoltarea intuiției, experiment aleator, definiția clasică a probabilității, scheme probabiliste clasice, problema lui Monty Hall.*

ABOUT DEVELOPING THE PROBABILISTIC INTUITION
The paper examines the role of specially chosen, exercises and problems, which may contribute especially to the formation and development of probabilistic intuition and thinking. There are presented many classical examples, known paradoxes and original problems. It is examined the methodological part of solving proposed problems.
Keywords: *probability, probabilistic intuition, formation and development of intuition, random experiment, classical definition of probability, classical probability scheme, Monty Hall problem.*

Introducere

Teoria probabilităților se distinge dintre celelalte matematici prin numeroase concluzii şi soluții neaşteptate din punct de vedere intuitiv. Avem parte de surprize chiar de la primii paşi în această ştiință.

Unul dintre scopurile studierii teoriei probabilităților este formarea şi dezvoltarea la studenți (elevi etc.) a intuiției şi gândirii probabiliste. Există numeroase probleme care îndeosebi pot contribui la atingerea acestui scop. Se cere doar să selectăm cu atenție aceste probleme şi să le folosim în cadrul lecțiilor practice (seminarelor). Rezolvând o astfel de problemă şi stabilind răspunsul printr-o metodă analitică, în continuare va trebui să le propunem studenților să încerce să-l argumenteze doar cu ajutorul unor raționamente intuitive.

1. Despre intuiție

Capacitatea de a utiliza soluții, sugerate de intuiție, este una din componentele principale ale succesului unui individ şi un indice al măsurii în care acesta şi-a dezvoltat individualitatea intrinsecă.

Intuiția poate fi privită ca o formă de cunoaştere imediată a adevărului pe baza experienței şi a cunoştințelor achiziționate anterior, fără raționamente logice preliminare.

De înțelegerea noțiunii „intuiție" au fost preocupați mari gânditori ai omenirii.

Descartes: „*Intuiția este cunoaşterea bruscă, directă a adevărului, opusă cunoaşterii raționale, analitice. Cunoştințele obținute în mod intuitiv se înfățişează ca simple, clare, evidente*".

Bergson: „*Intuiția este o formă de cunoaştere de natură, în esență, irațională, opusă şi superioară cunoaşterii discursive şi analitice, care face o sesizare nemijlocită fără o elaborare logică prealabilă a esenței*".

Robert Graves: „*Intuiția este supralogica ce elimină toate procesele de rutină ale gândirii şi sare direct de la problemă la răspuns*".

Intuiția este numită al şaselea simț. Toată lumea ştie că intuiția există. Intuiția are diferite aspecte. O persoană are intuiție în medicină în diagnosticul de boală, altul în finanțe, al treilea în artă etc. Intuiția poate şi trebuie promovată. Aceasta ar facilita viața noastră şi ne-ar ajuta să găsim soluții potrivite în multe situații [3].

2. Probleme de probabilitate pentru dezvoltarea intuiției probabiliste

Inițial putem propune exerciții simple:

- De câte ori în medie trebuie să aruncăm o monedă simetrică pentru a obține fața cu stema? (de 2 ori).
- De câte ori în medie trebuie să aruncăm zarul pentru a obține fața cu 6 puncte? (de 6 ori). Care este explicația? (Probabilitatea apariției acestei fețe este 1/6).
- De câte ori în medie trebuie să tragem într-o țintă pentru a o atinge dacă, spre exemplu, de fiecare dată probabilitatea de atingere este p? (răspunsul este $1/p$).
- Aruncăm moneda de 10 ori, ce este mai probabil – sa cadă de 5 ori stema sau de 5 ori banul? (probabilitățile sunt egale).

După exerciții simple putem trece la examinarea unor probleme mai complicate [1,2,4].

Problema 1. Într-o urnă se conțin n bile. Toate ipotezele privind numărul de bile albe din urnă se consideră echiprobabile. Din urnă se extrage la întâmplare o bilă. Să se determine probabilitatea ca bila extrasă să fie albă (evenimentul A).

Problema dată poate fi soluționată aplicând formula probabilității totale:

$P(A)=\sum_{i=0}^{n} P(H_i)P(A/H_i)$, unde H_i = {în urnă se află i bile albe}, $P(H_i)=\dfrac{1}{n+1}$, $P(A/H_i)=\dfrac{i}{n}$, $i = 0, 1, 2, ..., n$.

Astfel, $P(A)=\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{0}{n}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n}+...+\dfrac{n}{n}\right)=\dfrac{1}{(n+1)n}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{1}{2}$. Deci, $P(A)=\dfrac{1}{2}$.

Pornind de la acest răspuns, le vom cere studenților să-l argumenteze sau să-l deducă cu raționamente intuitive.

De exemplu, putem raționa astfel: dacă toate ipotezele despre numărul bilelor albe din urnă sunt echiprobabile, atunci ipotezele despre numărul bilelor de altă culoare decât cea albă de asemenea sunt echiprobabile. Prin urmare, problema noastră este „simetrică" în raport cu culoarea albă şi cealaltă culoare („non-albă"). Deci, este firesc ca probabilitatea să fie aceeaşi pentru extragerea unei bile de culoare albă şi pentru extragerea unei bile „non-albă".

Problema 2. Într-o urnă se conțin a bile albe şi b bile negre. Se extrag k bile conform schemei fără întoarcere ($k \le a + b$). Să se determine probabilitatea ca bila de la ultima extragere să fie de culoare albă.

Răspunsul $\dfrac{a}{a+b}$ poate fi argumentat cu raționamente intuitive: la ultima extragere poate fi scoasă oricare dintre cele $a + b$ bile; cum a dintre acestea sunt albe, probabilitatea cerută este $\dfrac{a}{a+b}$.

Fireşte, cu aceleaşi raționamente argumentăm că bila albă este scoasă la fiecare extragere de asemenea cu probabilitatea $\dfrac{a}{a+b}$.

Problema 3. Într-o urnă se conțin a bile albe, b bile negre şi c bile roşii. Una câte una se scot toate bilele. Să se determine probabilitatea de a scoate o bilă albă înainte de a scoate o bilă neagră (evenimentul aleator A).

Aplicăm formula probabilității totale $P(A)=\sum_{i=0}^{n} P(H_i)P(A/H_i)$, unde H_i = {înainte de a extrage o bilă albă sau neagră, sunt scoase i bile roşii}, $i = 0, 1, 2, ..., c$.

Cu ajutorul unor calcule netriviale obținem răspunsul: $P(A)=\dfrac{a}{a+b}$.

Cum putem explica acest rezultat prin raționamente de ordin intuitiv? Întâi de toate, vom observa că probabilitatea evenimentului A nu depinde de numărul bilelor roşii din urnă. Dacă am adăuga în urnă şi bile de alte culori, să zicem, s bile verzi şi k bile de culoare albastră, aceasta nu ar modifica probabilitatea evenimentului A: am putea considera că urna conține a bile albe, b bile negre şi $c' = c + s + k$ bile de altă culoare.

În al doilea rând, dacă schimbăm a şi b cu rolurile, considerând că în urnă avem b bile albe şi a bile negre, obținem probabilitatea $P(B)$ de a scoate o bilă neagră înainte de a scoate o bilă albă. Este evident că $P(A) : P(B) = a : b$ şi, cum $P(A) + P(B) = 1$, deducem că $P(A)=\dfrac{a}{a+b}$.

3. Unele „capcane" ale intuiției

Definiția clasică a probabilității poate fi aplicată doar în cazul când rezultatele „elementare" ale experimentului sunt echiprobabile (amintim aici greşeala „celebră" a lui Lagrange: el considera că probabilitatea de a obține o stemă la aruncarea a două monede este egală cu $\dfrac{1}{3}$).

În continuare sunt prezentate unele exemple când intuiția ne poate jucă festa.

Problema 4. Câți elevi trebuie să fie într-o clasă, astfel încât probabilitatea ca în această clasă să existe cel puțin doi elevi născuți în aceeaşi zi a anului să fie egală cu cel puțin $\frac{1}{2}$; considerăm anul de 365 de zile.

Soluția acestei probleme, formulate în 1930 de Richard von Mises, este contraintuitivă pentru mulți dintre noi: este nevoie doar de 23 de elevi.

O variantă a acestei probleme este problema aniversărilor pentru băieți şi fete. Dacă într-o clasă numărul fetelor este egal cu numărul băieților, care este numărul minim de elevi în clasă, astfel încât probabilitatea de a avea un băiat şi o fată născuți în aceeaşi zi a anului să fie egală cu cel puțin $\frac{1}{2}$? Răspunsul este, de asemenea, surprinzător de neaşteptat: clasa trebuie să aibă un efectiv de 32 de elevi (16 fete şi 16 băieți).

Problema 5. Să considerăm un sat cu 5×365 =1825 de locuitori. Care-i probabilitatea că fiecare zi a anului este ziua de naştere a cel puțin unui locuitor din sat? Este greu să avem un răspuns intuitiv asupra acestei probabilități. Dar, se pare că putem avea o încredere intuitivă că probabilitatea dată nu trebuie să se modifice mult dacă satul are 6×365 = 2190 de locuitori. Şi totuşi, această impresie este total greşită: în cazul când satul are 5×365 =1825 de locuitori probabilitatea menționată este 0,08, iar pentru 6×365 = 2190 de locuitori probabilitatea devine 0,41. Calculele acestor probabilități nu sunt simple.

Mulți consideră, pe drept, că la aruncarea de mai multe ori a unei monede simetrice frecvența relativă a stemei este un număr aproximativ egal cu $\frac{1}{2}$. De aici unii trag concluzia „logică" că după apariția a 10 steme succesive apariția feței cu banul devine mai probabilă. Această părere are la bază o confuzie cauzată de nepriceperea de a aplica „legea mediilor". Moneda nu este înzestrată cu memorie, este lipsită de memorie şi nu poate să-şi influențeze comportamentul. Este îndoielnic ca ea însăşi să poată modifica probabilitatea stemei sau a banului. Renumitul specialist în teoria probabilităților W.Feller [5] dă următoarea explicație pentru aplicarea legii menționate. El afirmă că în cazul nostru legea mediilor se manifestă prin absorbire şi nu prin compensare. Deci, dacă o serie de aruncări a început cu 10 steme, aceste 10 steme vor fi absorbite de frecvența relativă a stemei într-o serie de o mie de aruncări ale monedei, iar după un milion de aruncări efectul lor va fi imperceptibil.

Una din cauzele fenomenului de încredere în creşterea probabilităților este faptul că în unele probleme această creştere într-adevăr are loc. De exemplu, fie că dintr-o urnă ce conține 20 de bile albe şi una neagră se extrage câte o bilă conform schemei fără întoarcere până este extrasă bila neagră. Probabilitatea ca bila neagră să apară la prima extragere, conform definiției clasice, este egală cu $\frac{1}{21}$. Să admitem că primele 10 bile extrase sunt albe. Atunci, la următoarea extragere (a 11-a) bila neagră apare cu probabilitatea $\frac{1}{11}$. Dacă albe sunt toate bilele din primele 20 de extrageri, atunci această probabilitate devine egală cu 1.

Problema 6. Problema lui Monty Hall, cunoscută ca „*Paradoxul lui Monty Hall*", îşi trage denumirea de la pseudonimul actorului american Monty Hall (pe numele lui adevărat Maurice Halprin), care timp de treisprezece ani a prezentat o emisiune de jocuri televizate cu câştiguri substanțiale.

Problema este simplă. Presupunem că participați la un joc şi vă aflați în fața a trei uşi. În spatele uneia dintre uşi se află o maşină, iar în spatele celorlalte două câte o capră. Sunteți rugați să alegeți una dintre uşi şi câştigați ceea ce este ascuns după ea. Fie că ați ales o uşă. Înainte de a o deschide prezentatorul deschide una dintre celelalte două uşi şi demonstrează că dincolo de ea se află o capră. După aceasta prezentatorul jocului vă întreabă dacă nu cumva doriți să schimbați decizia inițială şi să alegeți o altă uşă. Ce veți face?

Dacă veți proceda conform intuiției, atunci veți considera că şansele sunt 50:50, adică orice alegere (a unei uşi) oferă aceleaşi şanse. În realitate aveți de două ori mai multe şanse de câştig dacă schimbați opțiunea inițială şi alegeți altă uşă.

Acest răspuns corect poate fi obținut astfel. Notăm uşile cu 1, 2, 3 şi introducem evenimentele aleatoare A_i = {maşina se află în spatele uşii i}, B_i = {prezentatorul deschide uşa i}, i = 1, 2, 3.

Presupunem că inițial ați ales uşa 1 şi considerăm evenimentele aleatoare M_0 = {maşina este câştigată menținând alegerea inițială}, M_1 = {maşina este câştigată schimbând alegerea inițială}.

Evident, $M_1 = B_2 \cap A_3 \cup B_3 \cap A_2$ şi, deci,

$$P(M_1) = P(B_2 \cap A_3) + P(B_3 \cap A_2) = P(A_3)P(B_2/A_3) + P(A_2)P(B_3/A_2) = \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

Astfel, $P(M_1) = \frac{2}{3}$ şi $P(M_0) = 1 - P(M_1) = \frac{1}{3}$.

Problema 7. Considerăm 3 fişe. Pe ambele părți ale unei fişe scriem litera *A*, pe ambele părți ale alteia scriem litera *B*. Pe a treia fişă scriem *A* pe o parte şi *B* pe altă parte. Introducem fişele într-o urnă, după care extragem la întâmplare o fişă şi o aşezăm pe masă. Presupunem că pe partea vizibilă (cea de deasupra) este scrisă litera *A*. Care este probabilitatea că pe partea cealaltă a fişei de asemenea este scrisă litera *A*? „O doime" – în mod greşit ne sugerează intuiția. „Logica" este simplă. Dacă deasupra se află *A*, atunci rezultă că noi am extras una din fişele *AA* sau *AB* şi ambele au aceeaşi probabilitate de a fi extrase.

Cauza de a fi induşi în eroare nici pe departe nu este evidentă. Noi nu doar că am extras fişa la întâmplare, noi şi pe masă am aşezat-o (pe una din fețele ei) de asemenea la întâmplare. Răspunsul corect poate fi obținut în felul următor.

Mulțimea de evenimente elementare ale experimentului (extragerea unei fişe) este:

$$\Omega = \{(A_1, A_2), (A_2, A_1), (B_1, B_2), (B_2, B_1), (A_3, B_3), (B_3, A_3)\};$$

aici pe primul loc al fiecărei perechi se află litera de pe partea văzută a fişei, iar pe locul al doilea se află litera de pe fața nevăzută; indicii sunt introduşi pentru a simplifica explicațiile. Introducem evenimentele aleatoare:

E_1 = {pe partea nevăzută se află litera *A* (cu indice)},

E_2 = {pe partea vizibilă se află litera *A* (cu indice)}

Probabilitatea care ne interesează este $P(E_1/E_2)$ şi ea se calculează cu uşurință:

$$P(E_1 / E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}.$$

Concluzii

Fireşte, nu pentru orice problemă răspunsul obținut pe căi analitice poate fi stabilit prin raționamente intuitive. Şi totuşi, în legătură cu orice problemă de probabilitate este loc de discuții la nivel intuitiv despre experimentul aleator corespunzător, evenimentele legate de acesta şi relațiile posibile dintre evenimente.

Bibliografie:

1. POŞTARU, A. *Teoria probabilităților*. Chişinău: CEP USM, 2008. 366 p. ISBN 978-9975-70-478-8
2. POŞTARU, A., BENDERSCHI, O. *Teoria probabilităților. Exemple şi probleme*. Chişinău: CEP USM, 2015. 257 p. ISBN 978-9975-71-614-7
3. WINKLER, P. *Probability and Intuition*. Mathematics Awareness Week, 1996. Disponibil: www.mathaware.org/mam/96/resources/winkler.html
4. МОСТЕЛЛЕР, Ф. *Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями*. Москва: Наука, 1975. 112 с.
5. ФЕЛЛЕР, В. *Введение в теорию вероятностей и её приложения* (в 2-х томах). Москва: Мир, 1984. 528 с.

Prezentat la 01.10.2015