STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2015, nr.7(87)
Seria "Științe exacte și economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.13-21

COERENȚA ELEMENTELOR ÎNTR-UN COMPLEX DE RELAȚII MULTI-ARE

Sergiu CATARANCIUC

Universitatea de Stat din Moldova

În articol este generalizată noțiunea de coerență simplă a elementelor unui complex de relații multi-are. Interpretând elementele complexului de relații ca simplexe abstracte, sunt introduse noțiunile de t-coerență şi (t,q)-coerență. Sunt demonstrate rezultate ce țin de relația de coerență generalizată a simplexelor abstracte.
Cuvinte-cheie: *complex de relații multi-are, simplex abstract, simplex orientat, permutare, coerență.*

COHERENCE OF ELEMENTS INTO COMPLEX OF MULTI-ARY RELATIONS
In article, the notion of simple coherence of elements of a multi-ary relations complex is generalized. It is noted that elements of this complex are abstract simplexes. The notion of t-coherence and (t,q)-coherence is introduced. Some results about generalized coherence relationship of abstract simplexes are demonstrated.
Keywords: *complex of multi-ary relations, abstract simplex, oriented simplex, permutation, coherence.*

1. Introducere

Complexul de relații multi-are, definit pe produsul cartezian al unei mulțimi de elemente, generalizează mai multe structuri discrete clasice, cum ar fi grafurile, hipergrafurile, complexele simpliciale etc. Proprietățile speciale ale complexului permit elaborarea unor metode eficiente de soluționare a unor probleme importante din punct de vedere teoretico-aplicativ (de exemplu, problema medianei [1,2]). Acestea, la rândul lor, necesită introducerea unor noțiuni noi sau generalizarea celor cunoscute pentru structurile clasice. Printre acestea se numără generalizarea noțiunii de coerență, necesară la examinarea jocurilor combinatoriale pe structuri discrete.

Fie dată o mulțime finită de elemente $X = \{x_1, x_2, ..., x_r\}$, care este o submulțime dintr-o mulțime M, $cardM \leq \infty$, unde M nu este clasă, şi şirul $X = X^1, X^2, ..., X^{n+1}$, $n \geq 1$, de produse carteziene [5] ale mulțimii X. Orice submulțime nevidă $R^m \subset X^m$, $1 \leq m \leq n+1$ se numeşte relație m-ară a elementelor din X (mulțimea $R^1 \subset X^1$ reprezintă o submulțime de elemente din X). Luând în considerare cele spuse, o relație m-ară R^m este o familie de succesiuni ordonate, numite cortegii, formate din a câte m elemente din X. Cortegiul $(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_m}) \in R^m$ poate să conțină şi repetări ale unor elemente din X. Pentru un astfel de cortegiu, orice subcortegiu $(x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_l})$, $1 \leq l \leq m$, ce păstrează ordinea elementelor din $(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_m})$, se numeşte ***subcortegiu ereditar***.

Definiția 1. *Familia finită de relații* $\{R^1, R^2, ..., R^{n+1}\}$, *care satisface condițiile*:

I. $R^1 = X^1 = X$,

II. $R^{n+1} \neq \varnothing$,

III. *orice subşir ereditar* $(x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_l})$, $1 \leq l \leq m, \leq n+1$, *din* $(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_m}) \in R^m$ *aparține relației* l*-are* R^l,

*se numeşte **complex generalizat (G-complex) de relații multi-are** şi se notează*:

$$\Re^{n+1} = (R^1, R^2, ..., R^{n+1}) \cdot$$

Complexul de relații poate fi privit şi ca un complex de cvasisimplexe abstracte, ceea ce permite folosirea unor notații deja cunoscute în literatura clasică. În caz general, cortegiile din care e format complexul de relații multi-are pot conține repetări ale elementelor din X. În cele ce urmează vom studia complexele în care astfel de repetări lipsesc, chiar dacă rezultatele prezentate în articol sunt adevărate şi în acest caz.

Definiţia 2. *Un cortegiu* $(x_{i_0}, x_{i_1}, ..., x_{i_m}) \in R^{m+1}$ *al G-complexului de relaţii multi-are* $\mathcal{K}^n = \Re^{n+1} = (R^1, R^2, ..., R^{n+1})$ *se va numi* ***cvasisimplex abstract cu dimensiunea m*** *şi se va nota prin* $Q^m = (x_{i_0}, x_{i_1}, ..., x_{i_m})$, *iar familia de cvasisimplexe cu dimensiunea* m *– prin* Q^m, $0 \le m \le n$.

Conform definiţiei 1, un cortegiu $(x_{i_0}, x_{i_1}, ..., x_{i_m})$ din relaţia R^{m+1} poate avea mai multe elemente ce coincid. De exemplu, e posibil ca lui R^{m+1} să-i aparţină chiar şi cortegiul $(x_{i_j}, x_{i_j}, ..., x_{i_j})$ cu un singur element $x_{i_j} \in X$, repetat de m+1 ori, care reprezintă o generalizare a buclei din teoria grafurilor [4]. Aici se va păstra noţiunea de **buclă cu mai multe dimensiuni**. Însă, generalizând, aceste bucle pot avea şi forme mai complicate. Problema clasificării buclelor pentru un cortegiu $(x_{i_0}, ..., x_{i_m}) \in R^{m+1}, 1 \le m \le n$, se face prin intermediul noţiunii de izomorfism şi ţine de un obiect de studiu aparte.

Deoarece un complex de relaţii multi-are poate fi interpretat ca un complex de simplexe abstracte [3], vom examina, în cele ce urmează, noţiunea de coerenţă a elementelor din R^n, privite ca simplexe.

2. Coerenţa simplexelor abstracte

Fie $Q_{j_k}^{m-1} = (x_{j_0}, x_{j_1}, ..., x_{j_{k-1}}, x_{j_{k+1}}, ..., x_{j_m})$ un simplex abstract ce se obţine din simplexul $Q_j^m = (x_{j_0}, x_{j_1}, ..., x_{j_{k-1}}, x_{j_k}, x_{j_{k+1}}, ..., x_{j_m})$ la eliminarea vârfului x_{j_k}. În [3] a fost studiată relaţia de coerenţa simplă a simplexelor Q_j^m şi $Q_{j_k}^{m-1}$ şi proprietăţile respective. În cele ce urmează vom generaliza această noţiune şi vom stabili careva relaţii importante, utile pentru soluţionarea unor probleme aplicative.

Evident, nu orice faţetă a unui cvasisimplex poate servi drept bază a acestuia, însă putem construi un alt cvasisimplex cu baza respectivă. Dacă x_{j_k} nu este topul cvasisimplexului Q_j^m, atunci cvasisimplexul cu baza $Q_{j_k}^{m-1} = [x_{j_0}, ..., x_{j_{k-1}}, x_{j_{k+1}}, ..., x_{j_m}]$ se va nota $x_{j_k} \to Q_{j_k}^{m-1}$ [5].

Referitor la coerenţa simplă a simplexelor Q_j^m şi $Q_{j_k}^{m-1}$ are loc următorul rezultat.

Teorema 1. *Simplexele* Q_j^m *şi* $(-1)^k Q_{j_k}^{m-1}$ *sunt coerente.*

Demonstraţie. Pentru a demonstra teorema, e suficient să arătăm că simplexele Q_j^m şi $(-1)^k \cdot (x_{j_k} \to Q_{j_k}^{m-1})$ au acelaşi semn. Din considerente de comoditate, simplexul $x_{j_k} \to Q_{j_k}^{m-1}$ îl vom nota prin $\hat{Q}_{j_k}^m$.

Fie $t_{Q_j^m}$ numărul de inversiuni în cortegiul indicilor $(j_0, j_1, ..., j_{k-1}, j_k, j_{k+1}, ..., j_m)$ ce corespunde simplexului Q_j^m. Să admitem că printre primele k numere $j_0, j_1, ..., j_{k-1}$ sunt q numere mai mari decât j_k, iar printre $j_{k+1}, ..., j_m$ sunt p numere mai mici decât j_k. Prin urmare, numărul de inversiuni în cortegiul $(j_0, j_1, ..., j_{k-1} j_{k+1}, ..., j_m)$, ce corespunde simplexului $Q_{j_k}^{m-1} = (x_{j_0}, x_{j_1}, ..., x_{j_{k-1}}, x_{j_{k+1}}, ..., x_{j_m})$, este egal cu $t_{Q_j^m} - p - q$. Uşor se calculează că numărul de inversiuni în cortegiul indicilor determinat de simplexul $\hat{Q}_{j_k}^m = (x_{j_k}, x_{j_0}, x_{j_1}, ..., x_{j_{k-1}}, x_{j_{k+1}}, ..., x_{j_m})$ este $t_{Q_j^m} - 2q + k$. Să examinăm acum paritatea numerelor $t_{Q_j^m}$ şi $t_{Q_j^m} - 2q + k$.

I . Fie $t_{Q_j^m}$ un număr par, ceea ce înseamnă că simplexul Q_j^m este orientat pozitiv. Dacă numărul k este impar, atunci $t_{Q_j^m} - 2q + k$ este impar, adică $\hat{Q}_{j_k}^m$ este orientat negativ, şi $(-1)^k = -1$, de unde rezultă că simplexele Q_j^m şi $(-1)^k \cdot \hat{Q}_{j_k}^m$ sunt orientate la fel (ambele sunt cu semn pozitiv). Dacă numărul k este par, atunci şi $t_{Q_j^m} - 2q + k$ este număr par, şi $(-1)^k = +1$. Prin urmare, simplexele Q_j^m şi $(-1)^k \cdot \hat{Q}_{j_k}^m$ sunt orientate la fel (ambele cu semn pozitiv).

II. Fie $t_{Q_j^m}$ un număr impar, ceea ce înseamnă că simplexul Q_j^m este orientat negativ. Dacă numărul k este impar, atunci $t_{Q_j^m} - 2q + k$ este par, adică $\hat{Q}_{j_k}^m$ este orientat pozitiv, şi $(-1)^k = -1$, de unde rezultă că simplexele Q_j^m şi $(-1)^k \cdot \hat{Q}_{j_k}^m$ sunt orientate la fel (ambele cu semn negativ). Dacă numărul k este par, atunci $t_{Q_j^m} - 2q + k$ este număr impar, iar $(-1)^k = +1$. Prin urmare, simplexele Q_j^m şi $(-1)^k \cdot \hat{Q}_{j_k}^m$ sunt orientate la fel (ambele sunt cu semn negativ).■

Referitor la coerența simplexelor, are loc un rezultat similar celui expus în [6]:

Teorema 2. *Coerența simplexelor Q_j^m și $(-1)^k Q_{j_k}^{m-1}$ nu depinde de permutarea concordantă a elementelor ce determină aceste simplexe.*

Prin permutare concordantă aici înțelegem următoarele: dacă se face o permutare a elementelor din Q_j^m, atunci aceasta determină în mod univoc permutarea din $Q_{j_k}^{m-1}$, şi invers. De exemplu, fie $Q^5 = (x_3, x_6, x_2, x_4, x_1, x_5)$ un simplex 5-dimensional, iar $Q_1^4 = (x_3, x_6, x_2, x_4, x_5)$ – fațeta lui Q^5, opusă vârfului x_1. Dacă ca rezultat al unei permutări din Q^5 obținem un simplex nou ${}_1Q^5 = (x_6, x_2, x_3, x_4, x_1, x_5)$, atunci din fațeta Q_1^4 vom obține simplexul ${}_1Q_1^4 = (x_3, x_6, x_2, x_4, x_5)$, care este fațetă a lui ${}_1Q^5 = (x_6, x_2, x_3, x_4, x_1, x_5)$, opusă vârfului x_1.

Demonstrația teoremei 2. Să notăm prin ${}^pQ_j^m$ şi ${}^pQ_{j_k}^{m-1}$ simplexele ce se obțin ca rezultat al unor permutări ale elementelor din Q_j^m şi $Q_{j_k}^{m-1}$. Pornim de la o permutare a elementelor din Q_j^m. Vom demonstra că dacă ${}^pQ_{j_k}^{m-1}$ se obține prin aplicarea permutării generate de permutarea folosită în Q_j^m, atunci simplexele ${}^pQ_j^m$ şi $(-1)^k \cdot {}^pQ_{j_k}^{m-1}$ sunt coerente. Ultima înseamnă că simplexele ${}^pQ_j^m$ şi $(-1)^k \cdot {}^p\hat{Q}_{j_k}^m$ sunt orientate la fel. (Cazul invers, când pornim de la o permutare efectuată asupra elementelor din $Q_{j_k}^{m-1}$, se reduce la primul.)

Folosind notațiile din [3], scriem:

$$Q_j^m = \varepsilon_j(m) \cdot [x_{j_0}, x_{j_1}, ..., x_{j_m}],$$

$$\hat{Q}_{j_k}^m = \hat{\xi}_{j_k}(m) \cdot [x_{j_k}, x_{j_0}, x_{j_1}, ..., x_{j_{k-1}}, x_{j_{k+1}}, ..., x_{j_m}],$$

unde $\varepsilon_j(m), \hat{\xi}_{j_k}(m) = \pm 1,\ 1 \le j \le cardQ^m$, în dependență de numărul de inversiuni în succesiunile respective de indici, şi reprezintă semnele acestor simplexe. Conform teoremei 1, simplexele Q_j^m şi $(-1)^k Q_{j_k}^{m-1}$ sunt coerente. Aceasta înseamnă că simplexele Q_j^m şi $(-1)^k \hat{Q}_{j_k}^m$ sunt orientate la fel, ceea ce este echivalent cu relația:

$$\xi_j(m) = (-1)^k \hat{\xi}_{j_k}(m). \quad (1)$$

Pentru a demonstra teorema, e suficient a examina situația când permutarea constă din schimbarea cu locurile a două elemente x' şi x'' în simplexul $Q_j^m = (x_{j_0}, x_{j_1}, ..., x_{j_{k-1}}, x_{j_k}, x_{j_{k+1}}, ..., x_{j_m})$. Să arătăm că în urma acestei permutări p simplexele obținute ${}^pQ_j^m$ şi $(-1)^k \cdot {}^pQ_{j_k}^{m-1}$ rămân coerente, ceea ce înseamnă că ${}^pQ_j^m$ şi $(-1)^k \cdot {}^p\hat{Q}_{j_k}^m$ sunt orientate la fel. Notăm prin t_j^m numărul de inversiuni în cortegiul $(j_0, j_1, ..., j_{k-1}, j_k, j_{k+1}, ..., j_m)$. Examinările se reduc la următoarele cinci cazuri:

1) x' şi x'' aparțin subşirului de vârfuri ce precedă x_{j_k} (se află printre $x_{j_0}, x_{j_1}, ..., x_{j_{k-1}}$);

2) x' şi x'' aparțin subşirului de vârfuri ce urmează după x_{j_k}, adică se află printre vârfurile cu indicii mai mari $x_{j_{k+1}}, ..., x_{j_m}$;

3) $x' \in \{x_{j_0}, x_{j_1}, ..., x_{j_{k-1}}\}$, iar $x'' \in \{x_{j_{k+1}}, ..., x_{j_m}\}$;

4) $x' \in \{x_{j_0}, x_{j_1}, ..., x_{j_{k-1}}\}$, iar $x'' = x_{j_k}$;

5) $x' = x_{j_k}$, iar $x'' \in x_{j_{k+1}}, ..., x_{j_m}$.

În primele două cazuri, paritatea numărului de inversiuni cu care se modifică t_j^m şi $\hat{t}_{j_k}^m$ este aceeaşi. Aceasta permite să considerăm justă egalitatea:

$$^p\xi_j(m) = (-1)^k \cdot (^p\hat{\xi}_{j_k}(m)),$$

adică simplexele $^pQ_j^m$ şi $(-1)^k \cdot {}^p\hat{Q}_{j_k}^m$ sunt orientate la fel, ceea ce înseamnă că $^pQ_j^m$ şi $(-1)^k \cdot {}^pQ_{j_k}^{m-1}$ rămân simplexe coerente.

Să examinăm cazul 3. Fie $x' = x_{j_r}$, $j_r < j_k$, şi $x'' = x_{j_s}$, $j_s > j_k$. Dacă $Q_j^m = (x_{j_0}, x_{j_1}, ..., x_{j_r}, ..., x_{j_k}, ..., x_{j_s}, ..., x_{j_m})$, atunci după schimbarea cu locurile a elementelor $x' = x_{j_r}$ şi $x'' = x_{j_s}$, obținem simplexul $^pQ_j^m = (x_{j_0}, x_{j_1}, ..., x_{j_s}, ..., x_{j_k}, ..., x_{j_r}, ..., x_{j_m})$. Numărul de inversiuni $^pt_j^m$ în cortegiul $^p\alpha_j^m = (j_0, j_1, ..., j_s, ..., j_k, ..., j_r, ..., j_m)$ diferă de numărul de inversiuni t_j^m în cortegiul $\alpha_j^m = (j_0, j_1, ..., j_r, ..., j_k, ..., j_s, ..., j_m)$ doar datorită schimbărilor din şirul $j_r, ..., j_k, ..., j_s$.

Fie printre elementele $j_{r+1}, ..., j_k, ..., j_s$ sunt n_r^1 elemente mai mari decât j_r, ceea ce înseamnă că în $^p\alpha_j^m$ apar n_r^1 inversiuni noi care lipseau în α_j^m. Celelalte $n_r^2 = s - r - n_r^1$ elemente, raportate la j_r, formează nişte inversiuni în α_j^m, care vor lipsi în $^p\alpha_j^m$. Pe de altă parte, să admitem că printre $j_{r+1}, ..., j_k, ..., j_{s-1}$ sunt n_s^1 elemente mai mici decât j_s, ceea ce înseamnă că în $^p\alpha_j^m$ apar n_s^1 inversiuni noi care lipseau în α_j^m. Celelalte $n_s^2 = s - r - 1 - n_s^1$ elemente, raportate la j_r, formează inversiuni în α_j^m, care însă vor lipsi în $^p\alpha_j^m$. Prin urmare, are loc relația:

$$^pt_j^m = t_j^m + (n_r^1 - n_r^2) + (n_s^1 - n_s^2).$$

Să calculăm acum numărul de inversiuni $^p\hat{t}_{j_k}^m$ în cortegiul $^p\hat{\alpha}_{j_k}^m = (j_k, j_0, j_1, ..., j_s, ..., j_{k-1}, j_{k+1}, ..., j_r, ..., j_m)$ ce corespunde simplexului $^p\hat{Q}_{j_k}^m = (x_{j_k}, x_{j_0}, x_{j_1}, ..., x_{j_s}, ..., x_{j_{k-1}}, x_{j_{k+1}}, ..., x_{j_r}, ..., x_{j_m})$, exprimat prin $\hat{t}_{j_k}^m$. Folosind notațiile şi tehnica de mai sus, examinăm patru cazuri:

a) $j_r < j_k$ şi $j_s > j_k$. Pentru numerele de inversiuni $^p\hat{t}_{j_k}^m$ şi $\hat{t}_{j_k}^m$ obținem:

$$^p\hat{t}_{j_k}^m = \hat{t}_{j_k}^m + ((n_r^1 - 1) - n_r^2) + ((n_s^1 - 1) - n_s^2) = \hat{t}_{j_k}^m + (n_r^1 - n_r^2) + (n_s^1 - n_s^2) - 2.$$

b) $j_r < j_k$ şi $j_s < j_k$. Pentru numerele de inversiuni $^p\hat{t}_{j_k}^m$ şi $\hat{t}_{j_k}^m$ obținem:

$$^p\hat{t}_{j_k}^m = \hat{t}_{j_k}^m + (n_r^1 - n_r^2) + (n_s^1 - n_s^2).$$

c) $j_r > j_k$ şi $j_s > j_k$. Pentru numerele de inversiuni $^p\hat{t}_{j_k}^m$ şi $\hat{t}_{j_k}^m$ obținem:

$$^p\hat{t}_{j_k}^m = \hat{t}_{j_k}^m + (n_r^1 - n_r^2) + (n_s^1 - n_s^2).$$

d) $j_r > j_k$ şi $j_s < j_k$. Pentru numerele de inversiuni $^p\hat{t}_{j_k}^m$ şi $\hat{t}_{j_k}^m$ obținem:

$$^p\hat{t}_{j_k}^m = \hat{t}_{j_k}^m + (n_r^1 - n_r^2) + (n_s^1 - n_s^2) + 2.$$

Comparând rezultatele obținute în fiecare din cazurile a)-d) cu formula $^pt_j^m = t_j^m + (n_r^1 - n_r^2) + (n_s^1 - n_s^2)$ obținută mai sus, observăm că paritatea numărului de inversiuni cu care se modifică $^pt_j^m$ şi $^p\hat{t}_{j_k}^m$ este aceeaşi. Prin urmare, este adevărată egalitatea:

$$^{p}\xi_j(m) = (-1)^k \cdot (^{p}\hat{\xi}_{j_k}(m)),$$

ceea ce înseamnă că $^{p}Q_j^m$ şi $(-1)^k \cdot {}^{p}Q_{j_k}^{m-1}$ rămân simplexe coerente.

Cazurile 4 şi 5 se examinează în mod similar, folosind aceeaşi tehnică de demonstraţie.■

3. Generalizarea noţiunii de coerenţă

Să generalizăm acum noţiunea de coerenţă a simplexelor. O vom face în două etape: 1) pentru simplexele $\mathrm{Q}_j^m \in \mathrm{Q}^m$ şi Q^{m-t}, unde Q^{m-t} reprezintă o faţetă a simplexului Q_j^m, $1 \le t \le m-1$; 2) pentru două simplexe $Q^1, Q^2 \in K^n$, unde $Q^1 \cap Q^2 = Q^{12} \in K^n$ şi niciunul dintre simplexele Q^1, Q^2 nu este faţetă a celuilalt.

Fie $Q_i^m = \xi_i(m)[x_{i_0}, x_{i_1}, ..., x_{i_m}]$ un simplex orientat, ales în mod aleatoriu din Q^m, şi $Q_{J_t}^{m-t} = \xi_{J_t}(m-t)[x_{l_0}, x_{l_1}, ..., x_{l_{m-t}}]$ – faţeta $(m-t)$-dimensională din Q_i^m, opusă mulţimii de vârfuri $x_{j_0}, x_{j_1}, ..., x_{j_{t-1}}$, unde $J_t = j_0 + j_1 + ... + j_{t-1}$, $0 \le j_0, j_1, ... j_{t-1} \le m$. Indicele j_s, $0 \le s \le t-1$, corespunde locului pe care îl ocupă x_{j_s} în lista $(x_{i_0}, x_{i_1}, ..., x_{i_m})$. Pentru a nu recurge la indexări „etajate", se consideră juste relaţiile:

a) $j_0 \le j_1 \le ... \le j_{t-1}$;

b) $j_0, j_1, ... j_{t-1} \in \{i_0, i_1, ..., i_m\}$;

c) $l_0 \le l_1 \le ... \le l_{m-t}$;

d) $\{l_0, l_1, ... \le l_{m-t}\} = \{i_0, i_1, ..., i_m\} \setminus \{j_0, j_1, ... j_{t-1}\}$.

Generalizăm noţiunea de coerenţă simplă [3] pentru cazul 1) indicat mai sus. De rând cu simplexul $\mathrm{Q}_{\mathrm{J_p}}^{m-p} \in \mathrm{Q}^{m-p}$, care este faţetă $(m-t)$-dimensională din $\mathrm{Q}_i^m \in \mathrm{Q}^m$, opusă vârfurilor $x_{j_0}, x_{j_1}, ..., x_{j_{t-1}}$, vom defini simplexul

$$\hat{Q}_{J_t}^m = (x_{j_0}, x_{j_1}, ..., x_{j_{t-1}}, x_{l_0}, x_{l_1}, ..., x_{l_{m-t}}).$$

Definiţia 3. *Simplexul* $\mathrm{Q}_j^m \in \mathrm{Q}^m$ *şi faţeta acestuia* $\mathrm{Q}_{\mathrm{J_t}}^{m-t} \in \mathrm{Q}^{m-t}$ *se numesc* t*-coerente dacă* Q_j^m *şi* $\hat{Q}_{J_t}^m$ *sunt orientate la fel, adică ambele sunt orientate pozitiv sau ambele sunt orientate negativ. Dacă simplexele* Q_j^m *şi* $\hat{Q}_{J_t}^m$ *sunt orientate în mod diferit, atunci* Q_j^m *şi* $Q_{J_t}^{m-p}$ *se numesc simplexe t-noncoerente.*

Din această definiţie rezultă că noţiunea de t-coerenţă se răsfrânge doar asupra a două simplexe, dintre care unul este faţetă a celuilalt. Similar cazului de coerenţă simplă [3], se defineşte coeficientul de t-coerenţă al simplexelor:

$$\varepsilon_i^{J_t}(m) = \begin{cases} +1, \text{ dacă } Q_i^m \text{ şi } Q_{J_t}^{m-t} \text{ sunt simplexe } t\text{-coerente}, \\ -1, \text{ dacă } Q_i^m \text{ şi } Q_{J_t}^{m-t} \text{ sunt simplexe } t\text{-noncoerente}, \\ 0, \text{ dacă } Q_{J_t}^{m-t} \text{ nu este fatetă a lui } Q_i^m. \end{cases}$$

Teorema 3. *Simplexele* Q_i^m *şi* $(-1)^{J_t} Q_{J_t}^{m-t}$ *sunt* t*-coerente.*

Folosind metoda inducţiei matematice în raport cu numărul t de vârfuri eliminate $x_{j_0}, x_{j_1}, ..., x_{j_{t-1}}$ din Q_i^m şi teorema 1, demonstraţia teoremei 3 devine o chestiune pur tehnică.

Conform definiţiei 3, t-coerenţa simplexelor Q_i^m şi $Q_{J_t}^{m-1}$ este determinată de orientarea simplexelor Q_i^m şi $\hat{Q}_{J_t}^m$. Semnul de orientare $\hat{\xi}_{J_t}(m)$ al lui $\hat{Q}_{J_t}^m$ se stabileşte cu ajutorul numărului de inversiuni α ale indicilor vârfurilor simplexului $\hat{Q}_{J_t}^m = (x_{j_0}, x_{j_1}, ..., x_{j_{t-1}}, x_{l_0}, x_{l_1}, ..., x_{l_{m-t}})$, care poate fi reprezentat prin suma $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_{12}$, unde:

α_1 este numărul de inversiuni din şirul $j_0, j_1, ..., j_{t-1}$;

α_2 este numărul de inversiuni din şirul $l_0, l_1, ..., l_{m-t}$ şi care determină semnul $\xi_{J_t}(m-t)$ al faţetei $Q_{J_t}^{m-t}$;

α_{12} este numărul de inversiuni format de fiecare dintre indicii $j_0, j_1, ..., j_{t-1}$ cu fiecare dintre indicii $l_0, l_1, ..., l_{m-t}$.

Pentru simplexele Q_i^m şi $Q_{J_t}^{m-t}$ are loc un rezultat similar teoremei 2.

Teorema 4. *t-coerenţa simplexelor Q_i^m şi $(-1)^{J_t} Q_{J_t}^{m-t}$ nu depinde de permutarea concordantă a elementelor ce determină aceste simplexe.*

Demonstraţie. Ca şi în cazul teoremei 2, e suficient să demonstrăm că dacă ${}^pQ_{J_t}^{m-t}$ se obţine prin aplicarea permutării generate de permutarea folosită în Q_i^m, atunci simplexele ${}^pQ_i^m$ şi $(-1)^{J_t} \cdot {}^pQ_{J_t}^{m-t}$ sunt coerente. Ultima afirmaţie înseamnă că este adevărată egalitatea:

$$ {}^p\xi_i(m) = (-1)^{J_t} \cdot {}^p\hat{\xi}_{J_t}(m). \tag{3}$$

Folosim metoda inducţiei matematice în raport cu numărul t de vârfuri eliminate $x_{j_0}, x_{j_1}, ..., x_{j_{t-1}}$ din Q_i^m.

1) $t = 0$. În acest caz, $J_t = j_0$. Apelând la teorema 2, obţinem:

$$ {}^p\xi_i(m) = (-1)^{j_0} \cdot {}^p\hat{\xi}_{j_0}(m), $$

ceea ce confirmă relaţia (3).

2) Admitem că afirmaţia teoremei este adevărată pentru $t \geq 0$ vârfuri eliminate $x_{j_0}, x_{j_1}, ..., x_{j_{t-1}}$, adică are loc egalitatea:

$$ {}^p\xi_i(m) = (-1)^{J_t} \cdot {}^p\hat{\xi}_{J_t}(m), $$

independent de permutările elementelor din Q_i^m şi $Q_{J_t}^{m-t}$. În acest caz, indicele J_t este $J_t = j_0 + j_1 + ... + j_t$.

3) Examinăm situaţia când din Q_i^m se elimină $t+1$ vârfuri. Fie acestea sunt $x_{j_0}, x_{j_1}, ..., x_{j_{t-1}}, x_{j_t}$ şi

$Q_{J_t}^{m-t}$ este faţeta lui Q_i^m, opusă vârfurilor $x_{j_0}, x_{j_1}, ..., x_{j_{t-1}}$;

$\hat{Q}_{J_t}^m = (x_{j_0}, x_{j_1}, ..., x_{j_{t-1}}, x_{l_0}, x_{l_1}, ..., x_{l_{m-t}})$;

$Q_{J_{t+1}}^{m-t-1}$ este faţeta lui Q_i^m, opusă vârfurilor $x_{j_0}, x_{j_1}, ..., x_{j_{t-1}}, x_{j_t}$;

$\hat{Q}_{J_{t+1}}^m = (x_{j_0}, x_{j_1}, ..., x_{j_{t-1}}, x_{j_t}, x_{l_0}, x_{l_1}, ..., x_{l_{m-t}})$;

$Q_{j_t}^{m-t-1}$ este faţeta lui $Q_{J_t}^{m-t}$ opusă vârfului $x_{j_t} = x_{i_{j_t}} \in \{x_{i_0}, x_{i_1}, ..., x_{i_m}\}$.

Să demonstrăm că şi în acest caz se respectă egalitatea

$$ {}^p\xi_i(m) = (-1)^{J_{t+1}} \cdot {}^p\hat{\xi}_{J_{t+1}}(m). $$

Construirea faţetei $Q_{J_{t+1}}^{m-t-1}$ o facem în două etape: mai întâi prin eliminarea vârfurilor $x_{j_0}, x_{j_1}, ..., x_{j_{t-1}}$, conform regulilor de eliminare descrise anterior, iar apoi prin eliminarea ultimului vârf x_{j_t}. Luând în considerare pasul precedent al inducţiei matematice, precum şi afirmaţia teoremei 2, obţinem următoarele relaţii pentru coeficienţii de coerenţă între simplexele examinate:

$$ {}^p\xi_i(m) = (-1)^{J_t} \cdot {}^p\hat{\xi}_{J_t}(m), $$

$$ {}^p\xi_{J_t}(m-t) = (-1)^{j_t} \cdot {}^p\hat{\xi}_{J_{t+1}}(m). $$

În baza acestor relaţii, precum şi a modului de construire a simplexelor $Q_{J_t}^{m-t}$, $\hat{Q}_{J_t}^m$, $Q_{J_{t+1}}^{m-t-1}$, $\hat{Q}_{J_{t+1}}^m$, $Q_{j_t}^{m-t-1}$, în cele din urmă obţinem:

$${}^{p}\xi_i(m) = (-1)^{J_t} \cdot (-1)^{j_t} \cdot {}^{p}\hat{\xi}_{J_{t+1}}(m) = (-1)^{J_{t+1}} \varepsilon_{J_{t+1}}^{(m-t-1)}.$$

Deci, afirmația teoremei are loc şi pentru $t+1$ vârfuri eliminate. Conform inducției matematice, relația (3) este adevărată.■

Să extindem în continuare noțiunea de coerență pentru două simplexe Q^{m_1} şi Q^{m_2} din complexul $\mathbf{K}^n$ ce posedă proprietățile:

a) $Q^{m_1} \not\subset Q^{m_2}$;

b) $Q^{m_2} \not\subset Q^{m_1}$;

c) $Q^{m_1} \cap Q^{m_2} = Q^{m_3} \neq \varnothing$,

unde $m_1 - m_3 = t \geq 1$, $m_2 - m_3 = q \geq 1$ şi $1 \leq m_1, m_2, m_3 \leq n$. Vom considera că simplexele Q^{m_1}, Q^{m_2} şi Q^{m_3} sunt orientate, ceea ce înseamnă că le putem interpreta în modul următor:

$$Q^{m_1} = \xi(m_1)[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_{m_1}}],$$
$$Q^{m_2} = \xi(m_2)[y_{j_0}, y_{j_1}, \dots, y_{j_{m_2}}],$$
$$Q^{m_3} = \xi(m_3)[z_{k_0}, z_{k_1}, \dots, z_{k_{m_3}}].$$

Simplexul Q^{m_3} se obține din Q^{m_1} la eliminarea a t vârfuri $x_{a_0}, x_{a_1}, \dots, x_{a_{t-1}}$, iar din Q^{m_2} – prin eliminarea a q vârfuri $y_{b_0}, y_{b_1}, \dots, y_{b_{q-1}}$. Definim numerele:

$$J_t = a_0 + a_1 + \dots + a_{t-1},$$
$$J_q = b_0 + b_1 + \dots + b_{q-1},$$

şi construim simplexele:

$$\hat{Q}_{J_t}^{m_1} = \hat{\xi}_{J_t}(m_1) \cdot [x_{a_0}, x_{a_1}, \dots, x_{a_{t-1}}, z_{k_0}, z_{k_1}, \dots, z_{k_{m_3}}],$$
$$\hat{Q}_{J_q}^{m_2} = \hat{\xi}_{J_q}(m_2) \cdot [x_{b_0}, x_{b_1}, \dots, x_{b_{q-1}}, z_{k_0}, z_{k_1}, \dots, z_{k_{m_3}}].$$

Aici $a_0, a_1, \dots, a_{t-1}$ reprezintă numerele de ordine ale acelor t vârfuri din lista $x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_{m_1}}$, care se elimină din Q^{m_1} la construirea lui Q^{m_3}. Respectiv, $b_0, b_1, \dots, b_{q-1}$ reprezintă numerele de ordine ale q vârfuri din lista $y_{j_0}, y_{j_1}, \dots, y_{j_{m_2}}$, care se elimină din Q^{m_2} la construirea lui Q^{m_3}. Pentru vârfurile simplexelor Q^{m_1}, Q^{m_2} şi Q^{m_3} se respectă relațiile:

$$\{z_{k_0}, z_{k_1}, \dots, z_{k_{m_3}}\} \subset \{x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_{m_1}}\},$$
$$\{z_{k_0}, z_{k_1}, \dots, z_{k_{m_3}}\} \subset \{x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_{m_1}}\}.$$

Definiția 4. *Simplexele Q^{m_1} şi Q^{m_2} cu proprietatea $Q^{m_1} \cap Q^{m_2} \neq \varnothing$ se numesc simplexe (t,q)*–***coerente*** *dacă Q^{m_1} şi $Q^{m_3} = Q^{m_1} \cap Q^{m_2}$ sunt simplexe t*–***coerente***, *iar Q^{m_2} şi Q^{m_3} sunt simplexe q-coerente.*

Pentru indicii vârfurilor din şirurile

$x_{a_0}, x_{a_1}, \dots, x_{a_{t-1}}$; $y_{b_0}, y_{b_1}, \dots, y_{b_{q-1}}$ şi $z_{k_0}, z_{k_1}, \dots, z_{k_{m_3}}$

determinăm numerele:

α_1 – numărul de inversiuni în şirul de indici $a_0, a_1, \dots, a_{t-1}$;

α_2 – numărul de inversiuni în şirul de indici $b_0, b_1, \dots, b_{q-1}$;

α_3 – numărul de inversiuni în şirul de indici $k_0, k_1, \dots, k_{m_3}$;

α_{13} – numărul de inversiuni formate de fiecare dintre indicii $a_0, a_1, ..., a_{t-1}$ cu fiecare dintre indicii $k_0, k_1, ..., k_{m_3}$;

α_{23} – numărul de inversiuni formate de fiecare dintre indicii $b_0, b_1, ..., b_{q-1}$ cu fiecare dintre indicii $k_0, k_1, ..., k_{m_3}$.

Teorema 5. *În cazul simplexelor* (t,q) *-coerente* Q^{m_1} *și* Q^{m_2} are loc egalitatea:

$$\xi(m_1) = (-1)^{J_t + J_q + \alpha(J_t) + \alpha(J_q)} \cdot \xi(m_2),$$

unde $\alpha(J_t) = \alpha_1 + \alpha_{13}$, iar $\alpha(J_q) = \alpha_2 + \alpha_{23}$.

Demonstrație. Pentru semnele simplexelor studiate obținem relațiile:

$$\xi(m_3) = (-1)^{\alpha_3};$$

$$\hat{\xi}_{J_t}(m_1) = (-1)^{\alpha_1 + \alpha_{13} + \alpha_3} = (-1)^{\alpha_1 + \alpha_{13}} \cdot \xi(m_3);$$

$$\hat{\xi}_{J_q}(m_2) = (-1)^{\alpha_2 + \alpha_{23} + \alpha_3} = (-1)^{\alpha_2 + \alpha_{23}} \cdot \xi(m_3).$$

Conform teoremei 3, simplexele Q^{m_1} și $(-1)^{J_t} Q^{m_3}$ sunt coerente. Prin urmare, în baza relației (2) și celor menționate mai sus, putem scrie:

$$\xi(m_1) = (-1)^{J_t} \cdot \hat{\xi}_{J_t}(m_1) = (-1)^{J_t} \cdot (-1)^{\alpha_1 + \alpha_{13}} \cdot \xi(m_3).$$

Din aceleași considerente, și în cazul simplexelor Q^{m_2}, $(-1)^{J_q} Q^{m_3}$ are loc egalitatea similară:

$$\xi(m_2) = (-1)^{J_q} \cdot \hat{\xi}_{J_q}(m_2) = (-1)^{J_q} \cdot (-1)^{\alpha_2 + \alpha_{23}} \cdot \xi(m_3).$$

Din ambele egalități exprimăm $\xi(m_3)$ prin $\xi(m_1)$ și, respectiv, $\xi(m_2)$:

$$\xi(m_3) = (-1)^{J_t} \cdot (-1)^{\alpha_1 + \alpha_{13}} \cdot \xi(m_1),$$

$$\xi(m_3) = (-1)^{J_q} \cdot (-1)^{\alpha_2 + \alpha_{23}} \cdot \xi(m_2).$$

Deoarece părțile din stânga ale acestor egalități coincid, obținem:

$$(-1)^{J_t} \cdot (-1)^{\alpha_1 + \alpha_{13}} \cdot \xi(m_1) = (-1)^{J_q} \cdot (-1)^{\alpha_2 + \alpha_{23}} \cdot \xi(m_2).$$

Notăm $\alpha(J_t) = \alpha_1 + \alpha_{13}$ și $\alpha(J_q) = \alpha_2 + \alpha_{23}$. Ultima ecuație se va transcrie:

$$(-1)^{J_t + \alpha(J_t)} \cdot \xi(m_1) = (-1)^{J_q + \alpha(J_q)} \cdot \xi(m_2),$$

de unde rezultă relația:

$$\xi(m_1) = (-1)^{J_t + J_q + \alpha(J_t) + \alpha(J_q)} \cdot \xi(m_2) \blacksquare.$$

4. Concluzii

În articol se generalizează noțiunea de coerență simplă, cunoscută pentru cazul complexului de simplexe, în situația când simplexele respective au dimensiunile ce diferă printr-o unitate și unul dintre acestea este fațetă pentru celălalt. Sunt obținute rezultate ce țin de extinderea relației de coerență, prin introducerea noțiunilor de t-coerență și (t,q)-coerență a simplexelor. Rezultatele obținute se folosesc la determinarea strategiilor optime ale participanților unui joc combinatorial pe structuri discrete. Acestea mai pot fi folosite la generalizarea unor noțiuni clasice, cunoscute din teoria grafurilor, cum ar fi noțiunea de stea a unei submulțimi de vârfuri.

Bibliografie:

1. CATARANCIUC, S. Median calculation for heterogenous complex of abstract cubes. In: *Computer Science Journal of Moldova*, vol.21, 2013, no.1(61), p.120-141.
2. CATARANCIUC, S., SOLTAN, P. Complex of abstract cubes and median problem. In: *Computer Science Journal of Moldova*, vol.19, 2011, no.1(55), p.38-63.
3. CATARANCIUC, S., SOLTAN, P. Abstract complexes, their homologies and applications. În: *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Moldovei*. Seria „Matematica". Chişinău, 2010, nr.2(63), p.31-58.
4. BERGE, C. *Graphs and hypergraphs*. New-York: Elsevier, 1973.
5. LANG, S. *Algebra*. Revised third edition. New York: Springer, 2002.
6. БОЛТЯНСКИЙ, В.Г. Гомотопическая теория непрерывных отображений и векторных полей. В: *Труды МИАН СССР*, 47. Москва: Изд-во АН СССР, 1955. 199 с.

Prezentat la 09.12.2015