Синтез схем відновлення розподілених обчислень на основі ідеальних кільцевих відношень

О. Повшук, асп.; О. Приступа, студ.; Н.Кустра, к.т.н., доц.; О. Різник, к.т.н., доц.

Національний університет «Львівська політехніка»

Abstract. In article investigational and the chart of renewal is shortchanged on the basis of numerical ideal ring bundles, which works more optimally on the criterion of greater number of the damaged computers, what exis–ting.

Key words: Golomb ruler, ideal ring bundle, recovery scheme, fault tolerance, parallel computing.

Балансування навантаження є важливою характеристикою в розподіленних системах. Вчені Крішна і Шін визначають толерантність до помилки як "здатність системи, негайно відповісти на несподівану помилку технічного забезпечення або програми". Коли усі комп'ютери працюють, необхідно розподілити навантаження порівну серед комп'ютерів. Коли один або більше комп'ютерів ламаються, навантаження на цих комп'ютерах має бути перерозподілене на інші комп'ютери в кластері [4].

Розподілені системи обчислень є більш захищеними від відмови частини комп’ютерів, що використовуються і мають високу продуктивність через спільне використання навантаження. В ідеальному випадку навантаження повинно рівномірно поширюватись серед комп'ютерів. Коли один або більше комп'ютерів виходять з ладу, навантаження з цих комп'ютерів має бути перерозподілений до інших працюючих комп'ютерів в групі розподіленої системи обчислень. Перерозподіл визначає схема відновлення. Схема відновлення повинна розподіляти навантаження порівну між працюючими комп’ютерами як тільки можливо, навіть, коли є поломки комп'ютерів в самих несприятливих комбінаціях. Необхідно знайти оптимальні схеми відновлення для будь-якої кількості комп’ютерів в розподіленій системи обчислень.

Мета – знайти оптимальні схеми відновлення, які повинні швидко обчислюватись для великої кількості n комп’ютерів і працювати краще, ніж вже відомі існуючі схеми.

Постановка задачі – при певній кількості комп’ютерів m знайти схему відновлення, яка може гарантувати оптимальний розподіл навантаження при будь-якій комбінації виходу частини комп’ютерів з ладу. Схеми відновлення повинні існувати для будь-яких значень m.

Попереднє математичне формулювання проблеми – враховуючи число m знайти найдовшу лінійну послідовність позитивних чисел, таких що сума послідовності менша або дорівнює m і всі сум послідовностей (у тому числі послідовності довжини один) є унікальними.

Нове математичне формулювання проблеми – враховуючи число m знайти найдовшу кільцеву по–слідовність позитивних чисел, таких що сума послідовності менша або дорівнює m і всі сум послідовностей (у тому числі послідовності довжини один) є унікальними.

Розглянемо кластер з m ідентичних комп'ютерів. Є один процес на кожному комп'ютері. Робота рівномірно розділена на ці m процесів. Є список відновлень, асоційований з кожним процесом. Цей список визначає, де процес треба знову почати, якщо поточний комп'ютер вимкнений. Процес переміщається назад, як тільки непрацюючий комп'ютер повертається до робочого стану.

Таким чином необхідно отримати число, до якого можна знайти найдовшу послідовність додатніх цілих чисел таких, що сума послідовності є менша або дорівнює сумі чисел, і така, що усі суми послідовностей унікальні. Ця задача еквівалентна задачі знаходження лінійки Голомба при умові що сума послідовності є менша, або дорівнює $m = L_n$, і еквівалентна задачі знаходження ідеальної кільцевої в’язанки (ІКВ) при умові що сума послідовності точно дорівнює $m = S_n$, тому відповідно можемо користуватися результатами лінійок Голомба та ІКВ. Лінійкою Голомба називається набір невід'ємних цілих чисел, розташованих у вигляді поділок на лінійці таким чином, що відстань між будь-якими двома поділ-ками є унікальною. Іншими словами, на всьому протязі лінійки, не можна знайти два числа, різниця між якими повторювалася б двічі. Максимальне число пар, які можна скласти з відстаней n між сусідніми поділками лінійки порядку n, визначають за формулою [2, 3]:

$$L_n = \binom{2}{n} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right). \qquad (1)$$

Простою ідеальною кільцевою в'язанкою (ІКВ) називається послідовність $K_n = (k_1, k_2, ..., k_n)$ чисел, на якій всі можливі кільцеві суми вичерпують значення чисел натурального ряду $1, 2, ..., S_n$, де:

$$S_n = n(n-1)+1 . \qquad (2)$$

Список відновлень отримується додаванням значень послідовностей − це послідовність з часткових сум. Перша частина списків відновлень складається з сум елементів числової лінійки-в’язанки або ІКВ, таких, що сума оптимальної послідовності довжини менша, ніж $L_n + 1$ для лінійок Голомба або $S_n + 1$ для ІКВ. Частина списку відновлень, що залишилася, наповнена залишком номерів (комп'ютерів) аж до суми лінійок Голомба L_n або суми ІКВ S_n. Другі частини схем відновлення на основі ідеальних кільцевих в’язанок будуються як ряд підряд розташованих чисел, які не співпадають з вагами сум елементів ідеальних кільцевих в’язанок.

Наприклад, для ІКВ (1, 3, 2, 7) з параметрами

$n=4$ та $S_n=13$ перша частина схеми відновлення відповідає наступним сумам елементів ІКВ: 0, 0+1=1, 1+3=4, 4+2=7, 7+7=14, а друга частина схеми відновлення відповідає числам, відсутнім в першій частині: 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13.

Порівняємо запропоновану модель схеми відновлення з кращими існуючими, наприклад на основі лінійок Голомба (числових лінійок-в'язанок) [2]. Нехай $V_{0,i}$ є списком відновлення лінійки Голомба для процесу нуль в кластері з j комп'ютерами. Тоді він містить числову лінійку-в'язанку з сумою меншою ніж або рівною j і залишок номерів (комп'ютерів) аж до $j-1$. Наприклад, для процесу нуль в кластері з 12 комп'ютерів: $V_{0,12}(0)=\{1, 4, 9, 11, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10\}$.

Усі інші списки відновлень виходять з $V_{0,j}(0)$, використовуючи $V_{i,j}(x)=(V_{0,j}(0)+i)\bmod(j+1)$ для усіх $i \le j$. Нехай $V_{0,j}$ є списком відновлення ІКВ для процесу нуль в кластері з j комп'ютерами. Тоді він містить ІКВ з сумою рівною j і залишок номерів (комп'ютерів) аж до $j-1$. Наприклад, для процесу нуль в кластері з 14 комп'ютерів, маємо: $V_{0,14}(0)=\{1, 4, 6, 13, 2,3, 5,7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Інші списки відновлень для процесів x маємо з $V_{0,j}(0)$, використовуючи $V_{i,j}(x)=(V_{0,j}(0)+i)\bmod(j+1)$ для всіх $i \le j$.

Користуючись схемою числових лінійок-в'язанок можна гарантувати оптимальну поведінку тільки до 27 пошкоджених комп'ютерів, де $L_{27}=553$, так як для більших n ще не відомо чи відповідні числові лінійки-в'язанки оптимальні або ні.

Користуючись схемою ІКВ можна гарантувати близьку до оптимальної поведінку для будь-якої кількості пошкоджених комп'ютерів. Таким чином, побудову схем відновлення для розподілених обчислень можна звести до синтезу ІКВ. Найбільш відомий тип ІКВ – це ІКВ, доведення, існування і спосіб побудови яких визначається теоремою Зінгера [1]. Тоді параметри ІКВ зінгерового типу

$$S_n^R=\frac{q^s-1}{q-1},\; n=\frac{q^{s-1}-1}{q-1},\; R=\frac{q^{s-2}-1}{q-1}, \qquad (3)$$

де S_n^R - сума елементів ІКВ;

n - кількість елементів ІКВ;

R - кратність ІКВ [1];

$q=p^{\alpha}$ - степінь простого числа;

p - просте число;

α - натуральне число;

s - степінь первісного незвідного над полем $GF(p^{\alpha})$ полінома.

Із системи рівнянь (3) випливає залежність, яка зв'язує ІКВ зінгерового типу за умовою існування:

$$n=Rp^{\alpha}+1. \qquad (4)$$

і встановлюється зв'язок між s і параметрами ІКВ:

$$s=\log_{\frac{N-1}{R}}(N-R)+2. \qquad (5)$$

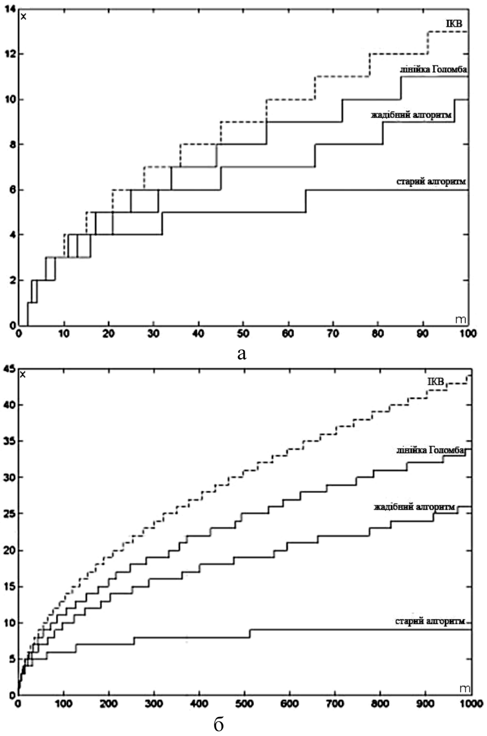

Рис.1.Схеми відновлення на основі ІКВ, лінійок Голомба, жадібного алгоритму, старого алгоритму

На рис. 1 порівнюються схеми відновлення, які використовують ІКВ, лінійки Голомба, жадібний алгоритм (алгоритм, який приймає найкраще рішення, виходячи з наявних на поточному етапі даних, сподіваючись врешті-решт отримати оптимальне рішення), старий алгоритм (алгоритм, який є деякою функцією від числа комп'ютерів). Виконання визначається як кількість комп'ютерів, що вийшли з ладу, при яких можемо гарантувати побудову оптимального розподілу навантаження [4].

Рис. 1а показує, що з зростанням кількості m комп'ютерів в розподіленій обчислювальній системі застосування схем відновлення ІКВ стає доцільнішим для більшої кількості комп'ютерів m, наприклад, для $m=100$ схеми відновлення на ІКВ гарантують оптимальне рішення, якщо $x=13$ комп'ютерів вийшло з ладу, на лінійках Голомба гарантують оптимальне рішення, якщо $x=11$ комп'ютерів вийшло з ладу, жадібний алгоритм гарантує оптимальну поведінку, якщо $x=10$ комп'ютерів зламані і старий алгоритм гарантувати оптимальну поведінку тільки для $x=6$ комп'ютерів [4]. На рис. 1б наведені для $m=1000$ схеми відновлення на ІКВ, які гарантують оптимальне рішення, якщо $x=44$ комп'ютерів вийшло з ладу, на лінійках Голомба, які гарантують оптимальне рішення, якщо $x=34$ комп'ютерів вийшло з ладу, жадібний алгоритм гарантує оптимальну поведінку, якщо $x=26$ комп'ютерів зламані, і нарешті старий алго–

ритм гарантує оптимальну поведінку тільки для $x=9$ ком-п'ютерів [4].

При побудові ІКВ виявилося, що не для всіх значень n існує ІКВ. Наприклад, всі спроби побудови ІКВ для значень $n=19$ і $n=22$ були невдалими, хоча для інших значень n вони існують. Зокрема, з формули суми ІКВ випливає, що $S_n^R = \frac{n\cdot(n-1)}{R}+1$ — ціле число, звідки визначається одна з необхідних умов існування ІКВ:

$$n\cdot(n-1)=0 \pmod R. \quad (6)$$

Покажемо, що будь-яка ІКВ однозначно відповідає деякій різницевій множині $D=\{d_1, d_2, ..., d_n\}$. Для цього елементи $d_1, d_2, ..., d_n$ різницевої множини D виразимо через елементи $k_1, k_2, ..., k_n$ ІКВ:

$$d_1=k_1,\ d_2=k_1+k_2,\ ...,\ d_l=\sum_{i=1}^{l}k_i,\ ...,\ d_n=\sum_{i=1}^{n}k_i, \quad (7)$$

де $k_1,k_2,...,k_{n-1}$ елементи ІКВ.

Кожній різниці $d_i-d_j \pmod{S_n}$; $d_i, d_j\in D$ відповідає визначена незалежна відстань на послідовності n елементів ІКВ. Таким чином, ІКВ з параметрами n та R однозначно відповідає різницевій множині з параметрами S_n^R, n, R. Отже, задача визначення потужності множини ІКВ, по суті, зводиться до обчислення потужності відповідної множини різницевих множин. Потужність повної сім'ї ІКВ з n елементів можна виразити формулою

$$P_n=\varphi(S_n)/6\alpha, \quad (8)$$

де φ — функція Ейлера;

α — натуральне число, яке визначається формулою

$$a=\log_p(n-R), \quad (9)$$

що випливає з залежності

$$n-R=p^{\alpha} \quad (10)$$

Згідно з алгоритмом побудови ІКВ на основі властивостей полів Галуа необхідно виконати наступні кроки:

Крок 1. Перевіряється можливість розв'язку в цілих числах системи. Якщо така можливість існує, то обчислюється степінь s первісного незвідного над полем $GF(p^{\alpha})$ полінома. В протилежному випадку обчислення припиняється.

Крок 2. Знаходиться первісний незвідний над полем $GF(p^{\alpha})$ поліном $f(x)=x^s+a_{s-1}x^{s-1}+...+a_1x+a_0$ за допомогою упорядкованого перебору коефіцієнтів поліному.

Крок 3. Будується супровідна матриця A первісного незвідного над полем $GF(p)$ полінома:

$$A=\begin{Vmatrix} 00...0-a_0 \\ 10...0-a_1 \\ 01...0-a_2 \\ .... \\ 00...0-a_{s-2} \\ 00...1-a_{s-1} \end{Vmatrix}$$

Крок 4. Перемножується супровідна матриця A на вектор-стовпчик, починаючи з одиничного вектор-стовпчика

$$B^{(1)}=\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Значення наступного вектор-стовпчика $B^{(i+1)}$ визначається як результат множення матриці A на попередній вектор-стовпчик $B^{(i)}$ за модулем p, де $i=1,2,..,S_N$.

Крок 5. Знаходяться всі лінійно залежні значення i номерів вектор-стовпчиків $B^{(i)}$.

Крок 6. Знаходяться всі пари різниць номерів підряд знайдених лінійно залежних вектор-стовпчиків за модулем S_N. Результатом є ІКВ порядку n кратності R.

При $R=1$ степінь первісного незвідного полінома для ІКВ завжди дорівнює 3. Алгоритм спрощується за кількістю необхідних операцій, зокрема за рахунок можливості використання первісного незвідного поліному виду x^3-x-a_0

Властивості розширених полів Галуа знаходять застосування не лише для дослідження ІКВ, але й квазіоптимальних кільцевих в'язанок, які за своїми властивостями наближаються до ІКВ.

Слід зазначити, що в порівнянні з іншими методами побудови ІКВ, застосування різницевих множин дає змогу спростити синтез ІКВ, завдяки виключенню таких операцій як знаходження первісних незвідних поліномів над полем $GF(p^{\alpha})$, побудова неінверсно-ізоморфних множників циклічних різницевих множин, знаходження повних сімей цих множин. Застосування властивостей розширених полів Галуа дозволяє швидко синтезувати схеми відновлення практично з будь-якою кількістю комп'ютерів на основі ІКВ.

Таким чином, розглянуто m ідентичних комп'ютерів, які за нормальних умов виконують один процес. Усі процеси виконують ту ж кількість роботи з точністю до одиниці. Схемою відновлення розподіленої системи, що гарантує оптимальне поширення навантаження в найгіршому випадку, коли x комп'ютерів вийшли з ладу, є оптимальна схема відновлення за критерієм рівномірного навантаження для значення m і x на основі ІКВ.

[1]. Різник В.В. Синтез оптимальних комбінаторних систем. - Львів, 1989.

[2]. Різник В.В., Різник О.Я., Кісь Я.П., Дурняк Б.В., Парубчак В.О.. Використання монолітних кодів в інформа–ційних технологіях. МНТК ISDMIT'2006, Євпаторія, т.2, с.39-42.

[3]. Різник В.В., Різник О.Я., Кісь Я.П., Дурняк Б.В., Парубчак В.О.. Використання монолітних кодів в інформа–ційних технологіях. МНТК ISDMIT'2006, Євпаторія, т.2, с.39-42.

[4]. Klonowska, K., Lundberg, L., Lennerstad, H.: Using Golomb Rulers for Optimal Recovery Schemes in Fault Tolerant Distributed Computing, in Proceedings of 17th International Parallel & Distributed Processing Symposium IPDPS 2003, Nice, France, April 2003, pp. 213.