

Математична модель дії теплової дифузії на поглибленні зони випару в сушарному процесі

I. Борецька, ст. викладач

Національний лісотехнічний університет України, 79057, м. Львів, вул. Чупринки, 103

Abstract. The article is devoted to the mathematical modeling of the process of heat and mass transfer with considering the moving border of evaporation zone during the drying of capillary-porous materials. The analytical solutions of the problem of non-isothermal moisture transfer for unsteady drying regimes are received. The influence of thermal diffusion, heat and physical characteristics of the material and the drying agent on the temperature of phase transformations is investigated.

Key words: mathematical model, heat and mass transfer, phase transitions, process of drying

Вступ

Стаття присвячена математичному моделюванню процесу тепломасоперенесення з врахуванням рухомої границі зони випаровування вологи під час сушіння капілярно-пористих матеріалів. Отримані аналітичні розв'язки задачі неізотермічного волого перенесення для нестационарних режимів процесу сушіння. Досліджено вплив термодифузії, теплофізичних характеристик матеріалу та агента сушіння на температуру фазових перетворень.

Актуальність досліджень

Інтенсифікація технологій сушіння колоїдних капілярно-пористих матеріалів зумовлює подальший розвиток математичного моделювання процесів тепломасоперенесення, фазових перетворень і деформування, які б адекватно описували закономірності видалення вологи у висушуваних матеріалах.

На шляху розроблення математичних моделей тепломасоперенесення вологих капілярно-пористих матеріалів у процесі сушіння виникають значні труднощі, пов'язані з складною багатофазною структурою матеріалів, високою можливістю їх фізико-механічних властивостей, та значною кількістю різних видів перенесення тепла і маси, зокрема дифузії, теплопровідності, конвекції. Також мають місце більш складніші фільтраційні процеси, зумовлені виникненням залишкових тисків, значним фільтраційним опором при підведенні тепла. Спостерігається також термодифузія, теплове ковзання та інші процеси. Теоретичні дослідження таких процесів суттєво ускладнюються неправильною геометричною конфігурацією реальної капілярно-пористої структури і змінним поперечним перетином.

Тому стаття присвячена математичному моделюванню процесу сушіння вологих капілярно-пористих матеріалів з врахуванням руху границі фазових перетворень, які зумовлюють утворення принаймні двох зон з різними теплофізичними характеристиками.

Аналіз досліджень

Дослідження механізму поглиблення зони випаровування висушуваного матеріалу вперше досліджено

Т. Шервудом [1, 2]. Подальші теоретичні та експериментальні підтвердження поглиблення поверхні випаровування наведені у працях [1, 3-5]. Існують декілька підходів у моделюванні процесів тепломасоперенесення у матеріалах під час сушіння з врахуванням руху поглиблення зони випаровування. Зокрема, критерій фазового переходу, що змінюється за координатою тіла, враховується у граничних умовах.

При іншому підході моделювання процесу видалення вологи розглядається у рамках задачі Стефана [6, 7]. З математичної точки зору крайові задачі тепломасоперенесення або узагальнені крайові задачі принципово відрізняються від класичних задач. Залежність характеристичного розміру області випаровування від часу ускладнює застосування класичних методів розділення змінних або інтегральних перетворень. Аналітичні дослідження здійснювалися для обмежених випадків наперед відомого закону руху границі, наприклад, лінійного або параболічного. Для цього використовувалися методи теплових потенціалів [8, 9], контурного інтегрування [10], степеневих рядів [8, 11], «миттєвих» власних функцій Грінберга [12]. Отримання аналітичних розв'язків крайової задачі узагальненого типу в області з рухомою границею фазового переходу за довільним законом зводилося до інтегро-диференціальних рівнянь, зокрема інтегральних рівнянь Вольтера II-го роду зі складними ядрами. Тому встановлювалися лише якісні результати поведінки таких систем.

У цьому аспекті важливими є роботи [6, 13]. Отримані функціональні перетворення дозволяли застосовувати класичні методи розділення змінних з врахуванням різних змін руху границі для відповідних граничних умов в класичних системах координат. Досить ефективним методом розв'язання задач нагрівання та кінетики сушіння вологих матеріалів є метод диференціальних рядів [8]. Він дозволяє отримати числово-аналітичні розв'язки крайової задачі тепломасоперенесення для граничних умов третього роду.

Використання числових методів для багатовимірних задач тепломасоперенесення з фазовим переходом пов'язано з алгоритмічними труднощами та значними обчислювальними затратами. Для знаходження наближеного розв'язку широкого застосування набули методи «наскрізного» розрахунку [7] з використанням узагальненого формування класичної задачі Стефана, у якій невідомим виступає не температура, а ентальпія. Для чисельної реалізації деяких математичних моделей використовуються різницеві схеми [14, 15].

Тому дана робота присвячена побудові математичної моделі неізотермічного волого перенесення і дослідженню впливу термодифузії на масоперенесення при сушінні капілярно-пористих матеріалів з врахуванням руху зони випаровування для нестационар-

ного режиму сушіння, заданого у вигляді полінома експоненціальних функцій. Крайова задача теплопровідності у випадку лінійної триетапної зміни агента сушіння досліджувалося у працях [16, 17].

Математична модель тепломасоперенесення з врахуванням границь фазового переходу

Розглянемо задачу тепломасоперенесення капілярно-пористої пластини товщиною $2L$ ($-L \leq z \leq L$, z – координата) при дії на її границю конвективного нестационарного потоку тепла. Пластина віднесена до декартової системи координат. У процесі сушіння пластина контактує з газовим середовищем, яке є сумішшю сухого повітря та пари, а тепло, яке підводиться агентом сушіння, витрачається на випаровування рідини, нагрівання матеріалу і подолання енергії зв'язку вологи з матеріалом.

Математична модель процесу тепломасоперенесення у пластині під час сушіння з врахуванням зміни у часі границі фазового переходу L_m будується наступним чином.

Рівняння енергії має вигляд:

$$\left[\Pi(c_v \rho_v + c_a \rho_a) + (1 - \Pi)c_s \rho_s \right] \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_c \frac{\partial T}{\partial z} \right) + F, \quad (1)$$

$$L_m \leq z \leq L, \quad 0 \leq L_m \leq L,$$

де λ_c – коефіцієнт теплопровідності, c_v, c_a, c_s – питомі теплоємності пари, повітря, деревного скелету, ρ_v, ρ_a, ρ_s – густини цих же компонентів вологої пластини, F – внутрішнє джерело; Π – пористість матеріалу.

Якщо водяна пара в зовнішньому середовищі не є насиченою, то відбувається процес випаровування з парового простору пластини від її поверхні в глибину тіла. Прийmemo, що пори матеріалу мають однаковий розмір і знехтуємо механізмом плівкового масоперенесення. Вважаємо, що теплові умови на поверхнях пластини однакові і процес сушіння симетричний відносно серединної поверхні. В зв'язку з відсутністю дисперсії розмірів пор за радіусами процес сушіння йде однаково по всьому перерізу тіла. В процесі сушіння у пластині виникає зона осушених пор та пор, насичених рідиною. Межа контакту L_m цих зон поширюється в глибину пористої пластини.

Зазначимо, що сушіння не буває повним. В гідрофільних порах залишається волога у вигляді пристінкового шару (зв'язана волога). Механізм плівкового перенесення рідини, зумовленого градієнтом розклинювального тиску та явищем термоосмосу, не враховуємо. Вважаємо, що ці процеси мають набагато менший вплив, ніж процеси фазового переходу. В зоні сушіння у порах пластини присутні повітря та пара води. Надалі будемо вважати, що поперечний розмір пор суттєво більший за середню довжину вільного пробігу наявних молекул. Це дозволяє записати вирази для потоків повітря \vec{j}_a та пари \vec{j}_v двокомпонентної суміші в зоні

сушіння виразами [18]:

$$\vec{j}_k = \rho_k \vec{v} - D' \vec{\nabla} \rho_k, \quad k = a, v, \text{ де } D' \text{ – ефективний коефіцієнт бінарної дифузії в порах.}$$

Потік повітря всередину пластини кількісно значно менший за потік пари назовні, зумовленої фазовим переходом “вода-пара”. У зв'язку з цим надалі будемо нехтувати потоком повітря \vec{j}_a , покладаючи $\vec{j}_a = 0$. У подальшому, вважатимемо локальну зміну густини пари ρ_v сталою, тобто покладемо $\partial \rho_v / \partial t = 0$. Згідно [18], отримаємо рівняння балансу маси пари $\vec{\nabla} / \vec{j}_v = 0$.

Вплив пористої структури деревної пластини враховується введенням в рівняння Стефана-Максвелла ефективних коефіцієнтів бінарної взаємодії. Система рівнянь Стефана-Максвелла доповнюється рівнянням фільтрації Дарсі з ефективними характеристиками в'язкості μ_g та проникливості K_g

$$v = - \frac{K_g}{\mu_g} \frac{\partial P_g}{\partial z}, \quad (2)$$

та рівнянням стану ідеального газу

$$P_g = \left(\frac{\rho_a}{M_a} + \frac{\rho_v}{M_v} \right) RT, \quad (3)$$

де P_g – тиск газу в порах, M_a, M_v – молярна маса повітря і пари, R – газова стала.

Тоді запишемо рівняння Стефана - Максвелла відносно функцій ρ_a, ρ_v таким чином:

$$\rho_a \frac{K_g}{\mu_g} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\rho_a}{M_a} + \frac{\rho_v}{M_v} \right) RT + D' \vec{\nabla} \rho_a = 0;$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\rho_v \frac{K_g}{\mu_g} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\rho_a}{M_a} + \frac{\rho_v}{M_v} \right) RT + D' \vec{\nabla} \rho_v \right] = 0, \quad (4)$$

де K_g – коефіцієнт проникливості, залежний від радіуса та форми пор, μ_g – коефіцієнт динамічної в'язкості газу.

Записана нелінійна система диференціальних рівнянь (4) чинна в області сушіння, яка обмежена граничною поверхнею та поверхнею, що визначається координатою L_m .

Для подальших досліджень прийmemo [2], що на рухомій поверхні $z = L_m$ густина пари рівна густині насиченої пари, тобто

$$\rho_v = \rho_{vn} \text{ на поверхні } z = L_m, \quad (5)$$

Умови на поверхнях $z = L$ газової зони запишемо так:

$$\rho_v \frac{K}{\mu_g} \frac{\partial P}{\partial z} + D' \frac{\partial \rho_v}{\partial z} = -j, \quad (6)$$

$$\rho_a = \rho_{a0},$$

де $j = \tilde{\beta}(\rho_v - \rho_{v0})$; $\tilde{\beta}$ – коефіцієнт масообміну. Оскільки задача масоперенесення в подальшому розв'язується в квазістаціонарній постановці (для атмосферного тиску середовища сушіння), а T_m – невідома температура фазового переходу є залежною від тиску насичення, то вважатимемо $T_m = f(P_n)$, де P_n – тиск насиченої пари.

Рівняння балансу енергії на рухомій межі фазових переходів $z = L_m$ запишемо у вигляді:

$$-\lambda_c \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=L_m+0} = r_k \frac{K_g}{\mu_g} \frac{\partial P_g}{\partial z} \Big|_{z=L_m+0}, \quad T = T_m, \quad (7)$$

Лінеаризоване рівняння стану на рухомій межі $z = L_m$ фазових переходів: $T_m = T_{mk} + \alpha_{mk} P_n$, де $T_{mk} = \frac{9T_k V_k}{8V}$, $\alpha_{mk} = \frac{3T_k V}{8V_k}$, T_k, V_k – критична температура та тиск. Зокрема, в роботі [18] $T_m = 83 + 16 \cdot 10^{-5} P_n$. В інших випадках коефіцієнти T_{mk} , α_{mk} визначаються з температурних режимів сушіння конкретного матеріалу. Граничні умови на границі $z = L$ виражають теплообмін між поверхнями пластини і агентом сушіння за законом Ньютона

$$\lambda_c \frac{\partial T}{\partial z} + \tilde{\alpha}[T - T_a(t)] = 0, \quad (8)$$

де $\tilde{\alpha}$ – коефіцієнт теплообміну; $T_a(t)$ – змінна в часі температура агента сушіння. Функція $T_a(t)$ може бути представлена у вигляді полінома від експоненціальних функцій

$$T_a(\tau) = T_1 + (T_2 - T_1) \sum_{i=1}^N (a_i e^{-b_i \tau}) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^N (\alpha_i e^{-b_i \tau}). \quad (9)$$

Тут для зручності перепозначено:

$$\alpha_0 = T_1, \quad \alpha_i = (T_2 - T_1) a_i;$$

$$D' = D'_{ij} = \left(1/D'_i + (1 - \alpha_{ij} z_i)/D_{ij}\right)^{-1};$$

$D'_{va} = D'_{av} = D'$ – ефективний коефіцієнт дифузії; $D_{va} = D_{av} = D_{ij}$ – ефективний бінарний коефіцієнт дифузії в макропорах; другий доданок в виразі $D'_v = D^\infty$ враховує ефект течіння Кнудсена пари в

мікропорах. Параметри α_i , b_i ($i = \overline{1, N}$) визначаються шляхом апроксимації конкретного температурного режиму агента сушіння.

В початковий момент температура пластини задовольняє умові

$$T(t=0) = f(z), \quad (10)$$

де $f(z)$ – функції температури для періодів сталої та падаючої швидкостей сушіння.

Швидкість руху межі розділу фазового переходу визначається з умов балансу маси

$$\frac{d\bar{z}_m}{d\tau} = -\frac{j(\bar{z}_m)}{\rho_L L}, \quad (11)$$

де ρ_L – густина води, $\bar{z}_m = L_m / L$.

Рівняння (1)-(11) складають математичну модель, яка описує конвективний процес сушіння капілярно-пористого тіла (пластини) з врахування рухомої границі фазових переходів. Зазначимо нелінійність рівнянь у сформульованій математичній моделі. Аналітико-числові розв'язки задачі теплопровідності для нестационарного режиму агента сушіння, що змінюється за експоненціальним законом (9), наведені у [19]. Отримані аналітичні вирази для знаходження функції температури $T(z, t)$ залежно від координати фазового переходу. Також досліджено процес масоперенесення у випадку симетричного конвективного сушіння для зміни температури середовища за формулою (9).

Модельовання впливу термодифузії на масоперенесення вологи при сушінні пластини

Розглянемо задачу масоперенесення в процесі конвективного сушіння для більш жорстких температурних режимів. Математична модель дослідження масоперенесення в осушеній зоні пластини при врахуванні дифузійного, ефузійного, конвективного та теплового потоків описується системою диференціальних рівнянь:

$$\rho_v \frac{K}{\mu_g} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(D + 1,064 \sqrt{\frac{RT}{M_v}} \varepsilon \right) \cdot \left(\frac{\partial \rho_v}{\partial z} + \delta \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] = 0, \quad (12)$$

$$\rho_a \frac{K}{\mu_g} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + D \frac{\partial^2 \rho_a}{\partial z^2} = 0, \quad (13)$$

де ε – коефіцієнт молекулярного течіння пари. Тут вважаємо, що густина повітря зв'язана з температурою безпосередньо через густину пари.

На поверхнях капілярно-пористої пластини мають місце умови конвективного масообміну. В зв'язку з симетрією задачі приведемо їх для половини області. Умови на поверхнях $y = L$ та $y = L_m$ газової зони запишемо так:

$$\rho_v \frac{K}{\mu_g} \frac{\partial P}{\partial z} + (D + 1,064\varepsilon \sqrt{\frac{RT}{M_v}}).$$

$$\left(\frac{\partial \rho_v}{\partial z} + \delta \frac{\partial T}{\partial z} \right) = -j, \rho_a = \rho_{a0}; z = L, \quad (14)$$

$$\rho_v = \rho_n, j = \beta(\rho_v - \rho_0), z = L_m, \quad (15)$$

де β – коефіцієнт масообміну, ρ_n – густина насиченої пари для даної температури, ρ_0 – густина пари в середовищі поза пластиною [12], ρ_{a0} – густина повітря на зовнішніх поверхнях пластини.

Позначимо $D_1 = (D + 1,064\varepsilon \sqrt{RT_s / M_v})$ для заданої зміни температури агента сушіння, де $T_s = \frac{1}{\tau_{\Pi}} \int_0^{\tau_{\Pi}} \int_0^1 T d\bar{z} d\tau$ – деяка середня температура та лінеаризуємо систему рівнянь (12), (13).

Проінтегрувавши рівняння (12) та (13), отримаємо:

$$\frac{d\bar{\rho}_a}{d\bar{z}} + b \frac{d\bar{\rho}_v}{d\bar{z}} + a \frac{1}{\bar{\rho}_a} \frac{d\bar{\rho}_a}{d\bar{z}} = 0, \quad (16)$$

$$\eta \left(\frac{d\bar{\rho}_a}{d\bar{z}} + b \frac{d\bar{\rho}_v}{d\bar{z}} \right) + a \left(\frac{d\bar{\rho}_v}{d\bar{z}} + \delta' \frac{dT}{d\bar{z}} \right) + \beta' a (\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0}) = 0. \quad (17)$$

Граничні умови мають вигляд:
на поверхні $\bar{z} = 1$

$$j = \beta' \rho_n (\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0}), T = T_1, \rho_{a0} = 1, \quad (18)$$

на поверхні $\bar{z} = \bar{z}_m$

$$\bar{\rho}_v = 1, T = T_m \quad (19)$$

Тут T_1 температура, отримана в результаті розв'язання задачі про конвективний теплообмін пластини з нестационарним агентом сушіння. Вираз $\delta' dT / d\bar{z}$ визначатиме вплив градієнта температури за товщиною пластини на масоперенесення вологи в тілі, $\beta' = L_0 \beta / D_1$, $\delta' = \delta / \rho_n$ – відносний коефіцієнт термодифузії.

Інтегруючи рівняння (16) по \bar{z} , отримуємо

$$\bar{\rho}_a + b \bar{\rho}_v + a \ln \bar{\rho}_a = C_1, \quad (20)$$

де $C_1 = 1 + b \bar{\rho}_{v1}$ – стала інтегрування. Провівши лінеаризацію з врахуванням того, що потоком повітря в порах можна знехтувати (безрозмірна густина повітря в порах мало відрізняється від одиниці), отримуємо рівняння

$$\frac{d\bar{\rho}_a}{d\bar{z}} = - \frac{b}{1+a} \frac{d\bar{\rho}_v}{d\bar{z}}. \quad (21)$$

Тоді рівняння (17) моделі з врахуванням (21) запишеться так

$$\frac{b}{(1+a)} \bar{\rho}_v \frac{d\bar{\rho}_v}{d\bar{z}} + \frac{d\bar{\rho}_v}{d\bar{z}} + \beta' (\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0}) + \delta' \frac{dT}{d\bar{z}} = 0 \quad (22)$$

Його загальний інтеграл має вигляд:

$$\frac{b}{(1+a)} \frac{\bar{\rho}_v^2}{2} + \bar{\rho}_v + \beta' (\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0}) \bar{z} + \delta' T = C_2, \quad (23)$$

де $C_2 = \frac{b}{(1+a)} \frac{1}{2} + 1 + \beta' (\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0}) \bar{z}_m + \delta' T_m$ – стала інтегрування, яка визначена з рівняння (21).

Безрозмірна густина пари і тиску в довільній точці пластини визначаються співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_v &= -A + \\ &+ \sqrt{A_2 - 2A_1 (\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0}) (\bar{z} - \bar{z}_m) - 2A \delta' (T - T_m)}; \\ P(\bar{z}, \bar{z}_m) &= \frac{\rho_n \bar{\rho}_v}{M_v} RT(\bar{z}) = [-A + \\ &+ \sqrt{A_2 - 2A_1 (\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0}) (\bar{z} - \bar{z}_m) - 2A \delta' (T(\bar{z}, \bar{z}_m) - T_m)}] \cdot \\ &\cdot \rho_n RT(\bar{z}, \bar{z}_m) / M_v. \end{aligned} \quad (24)$$

Тоді на поверхні $\bar{z} = 1$ має місце рівняння:

$$\frac{b}{(1+a)} \frac{(\bar{\rho}_{v1}^2 - 1)}{2} + \bar{\rho}_{v1} - 1 + \beta' (\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0}) \cdot (1 - \bar{z}_m) + \delta' (T_1 - T_m) = 0. \quad (25)$$

Розв'язок (25) визначає величину безрозмірної густини пари. Тут T_1 – значення температури для $\bar{z} = 1$, визначене в результаті розв'язання задачі теплоперенесення. Позначимо $\bar{z}_m^* = 1 - \bar{z}_m$, де \bar{z}_m – зміна відносної вологості в процесі сушіння. Фізично прийнятна вітка розв'язку має вигляд:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{v1} &= -(A + A_1 z_m) + \\ &+ \sqrt{A_2 + A_3 z_m + A_1^2 z_m^2 - 2A \delta' (T_1 - T_m)}, \end{aligned} \quad (26)$$

З рівняння стану знаходимо тиск на поверхні ($\bar{z} = 1$)

$$P_1(1, \bar{z}_m) = \frac{\rho_n R T_1(1, \bar{z}_m^*)}{M_v} [-(A + A_1 \bar{z}_m^*) + \sqrt{A_2 + A_3 \bar{z}_m^* + A_1^2 \bar{z}_m^{*2} - 2A \delta'(T_1 - T_m)}] \quad (27)$$

Маючи значення густини пари, величину потоку j представимо в вигляді

$$j = H \{ -(a_1 + A_1 \bar{z}_m^*) + \sqrt{A_2 + A_3 \bar{z}_m^* + A_1^2 \bar{z}_m^{*2} - 2A \delta'(T_1 - T_m)} \}, \quad (28)$$

де $a_1 = A + \eta_0$, $H = \beta \rho_n$.

Втрачена під час сушіння маса рідини

$$\Delta m_L = \Pi S \rho_L L (1 - \bar{z}_m) = \Pi S \rho_L L \bar{z}_m^*, \quad (29)$$

де S – площа пор.

З рівнянь (11), (28), (29) отримуємо рівняння для визначення зміни відносної вологості в часі та рівняння руху межі розділу фаз рідина-газ

$$\frac{d\bar{z}_m^*}{d\tau} = \frac{j(\bar{z}_m^*)}{\Pi \rho_L L} = \frac{\beta \bar{z}_m^*}{\Pi \rho_L L} [-(a_1 + B \bar{z}_m^*) + \sqrt{A_2 + A_3 \bar{z}_m^* + A_1^2 \bar{z}_m^{*2} - 2A \delta'(T_1 - T_m)}] \quad (30)$$

Початкова умова для $\tau = 0$:

$$\bar{z}_m^* = z_m = 0 \quad (31)$$

Для отримання розв'язку задачі Коші (30), (31) використаємо заміну змінних

$$\sqrt{A_2 + A_3 \bar{z}_m^* + A_1^2 \bar{z}_m^{*2} - 2A \delta'(T_1 - T_m)} = \phi + \bar{z}_m^* A_1. \quad (32)$$

Після деяких перетворень отримуємо формулу для визначення часу з врахуванням термоградієнтної залежності, для якого відносна насиченість досягає значення \bar{z}_m^* :

$$\tau = \frac{\ln \left| \frac{2A_1 \phi - (A + \rho_0)}{2A_1 \sqrt{A_2 - A_3}} \right| + \frac{1}{2} [A_3^2 - 4A_1^2 [A_2 - 2A \delta'(T_1 - T_m)_{z_n=1}]]}{2H_1 A_1} \cdot \left[1 / (2A_1 \phi - A_3)^2 - 1 / (2A_1 A_2 \sqrt{\phi - A_3})^2 \right]; \quad (33)$$

$$H_1 = \frac{H}{\Pi \rho_L L_0}.$$

Повний час сушіння τ_{Π} визначається залежністю:

$$\tau_{\Pi} = \frac{1}{2\alpha^* A_1^2} \left\{ \ln \left| \frac{\phi_0 - (A + \eta_0)}{(A + 1) - (A + \eta_0)} \right| + \frac{1}{2} [(A + \bar{\rho}_{v0})^2 - (A + 1)^2 + A \delta'(T_1 - T_m(P_m))_{\bar{z}_n=0}] \cdot \left[\frac{1}{[\phi_0 - (A + \bar{\rho}_{v0})]^2} - \frac{1}{[(A + 1) - (A + \bar{\rho}_{v0})]^2} \right] \right\}. \quad (34)$$

Визначення температури фазового переходу з врахуванням градієнта температури за товщиною пластини

Температуру пластини для нестационарного конвективного сушіння (9) можна записати

$$T(\bar{z}, \tau) = T_m + H_T \frac{\alpha_0 - T_m}{[H_T(1 - \bar{z}_m) + 1]} (\bar{z} - \bar{z}_m) + \sum_{i=1}^N C_i \frac{\sin \sqrt{b_i} (\bar{z} - \bar{z}_m)}{\sqrt{b_i}} e^{-b_i \tau} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_n (\bar{z} - \bar{z}_m)}{\mu_n} Z_n(\bar{z}_m) e^{-\mu_n^2 \tau}. \quad (35)$$

Продиференціюємо даний вираз за координатою. Отримаємо:

$$T'_z(\bar{z}, \tau) = (\alpha_0 - T_m) \frac{H_T}{[1 + H_T(1 - \bar{z}_m)]} + \sum_{i=1}^n C_i \cos \sqrt{b_i} (\bar{z} - \bar{z}_m) e^{-b_i \tau} + \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \cos \sqrt{b_i} (\bar{z} - \bar{z}_m) e^{-\mu_n^2 \tau}. \quad (36)$$

При $\bar{z} = \bar{z}_m$ маємо:

$$\frac{\partial T}{\partial \bar{z}}(\bar{z}_m, \tau) = \frac{-T_m H_T}{[1 + H_T(1 - \bar{z}_m)]} + \frac{H_T \alpha_0}{[1 + H_T(1 - \bar{z}_m)]} + \sum_{i=1}^n C_i (\bar{z}_m) e^{-b_i \tau} + \sum_{n=1}^{\infty} Z_n (\bar{z}_m) e^{-\mu_n^2 \tau} = \frac{-T_m H_T}{[1 + H_T(1 - \bar{z}_m)]} + \Psi(\bar{z}_m, \tau).$$

Представимо у (37) частину градієнта температури, залежну від коефіцієнтів розкладу функції температури агента сушіння, коефіцієнтів теплообміну та інших параметрів у вигляді:

$$\frac{H_T \alpha_0}{[1 + H_T(1 - \bar{z}_m)]} + \sum_{i=1}^n C_i (\bar{z}_m) e^{-b_i \tau} + \sum_{n=1}^{\infty} Z_n (\bar{z}_m) e^{-\mu_n^2 \tau} = \Psi(\bar{z}_m). \quad (38)$$

Для повного процесу сушіння ($\bar{z}_m = 0$) отримаємо:

$$\Psi(0) = \frac{H_T \alpha_0}{[1 + H_T]} + \sum_{i=1}^n C_i(0) e^{-b_i \tau} + \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(0) e^{-\mu_n^2 \tau},$$

де $C_i(0) = H_T [\sin \sqrt{b_i} - \alpha_i] / \cos \sqrt{b_i}$.

Враховуючи залежність між тиском пари і температурою (24), знаходимо:

$$\frac{\partial P(\bar{z}, \bar{z}_m)}{\partial \bar{z}} = \frac{\rho_n R}{M_v} \left[- \frac{A_1 (\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0})}{\sqrt{A_2 - 2A_1 (\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0}) (\bar{z} - \bar{z}_m)}} T + \right. \quad (39)$$

$$\left. + \left(-A + \sqrt{A_2 - 2A_1 (\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0}) (\bar{z} - \bar{z}_m)} \right) \partial T / \partial \bar{z} \right]$$

На межі фазового переходу можна записати:

$$\frac{\partial P(\bar{z}, \bar{z}_m)}{\partial \bar{z}} \Big|_{z=z_m} = \left[- \frac{A_1 (\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0})}{\sqrt{A_2}} \Big|_{z=z_m} P_n + \right. \quad (40)$$

$$\left. + \frac{\rho_n R}{M_v} \frac{\partial T}{\partial \bar{z}} \Big|_{z=z_m} \right].$$

Враховуючи залежність (7) та лінеаризовану залежність між тиском насичення та температурою фазового переходу $T_m = T_{mk} + \alpha_{mk} P_n$, з (40) отримаємо:

$$\frac{\partial P(\bar{z}, \bar{z}_m)}{\partial \bar{z}} \Big|_{z=z_m} = \left[-A_1 (\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0}) / \sqrt{A_2} + \right. \quad (41)$$

$$+ \frac{1}{T_m} \left(\frac{-T_m H_T}{[1 + H_T (1 - \bar{z}_m)]} + \right.$$

$$\left. \left. + \Psi(\bar{z}_m, \tau) \right) \right] \cdot \frac{T_m - T_{mk}}{\alpha_{mk}}.$$

Враховуючи (7), (41) отримаємо:

$$\left(\frac{-T_m^2 H_T}{[1 + H_T (1 - \bar{z}_m)]} + \Psi(\bar{z}_m, \tau) T_m \right) =$$

$$= - \frac{r_k K_g}{\lambda_c \mu_g} \left\{ \left[- \frac{A_1 (\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0})}{\sqrt{A_2}} T_m^2 + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \left(\frac{-T_m^2 H_T}{[1 + H_T (1 - \bar{z}_m)]} + \frac{T_m}{\alpha_{mk}} \Psi(\bar{z}_m, \tau) \right) \right] \right\} +$$

$$+ \frac{r_k K_g T_{mk}}{\lambda_c \mu_g \alpha_{mk}} \left[- \frac{A_1 (\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0})}{\sqrt{A_2}} T_m + \right. \quad (42)$$

$$\left. + \left(\frac{-T_m H_T}{[1 + H_T (1 - \bar{z}_m)]} + \Psi(\bar{z}_m, \tau) \right) \right]$$

Після деяких перетворень можна записати:

$$\left\{ \frac{H_T \sqrt{A_2} [-\lambda_c \mu_g \alpha_{mk} + r_k K_g]}{[1 + H_T (1 - \bar{z}_m)] \alpha_{mk} \lambda_c \mu_g \sqrt{A_2}} + \right.$$

$$+ \frac{r_k K_g [A_1 (\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0}) [1 + H_T (1 - \bar{z}_m)] \alpha_{mk}]}{[1 + H_T (1 - \bar{z}_m)] \alpha_{mk} \lambda_c \mu_g \sqrt{A_2}} \left. \right\} T_m^2 +$$

$$+ \frac{r_k K_g T_{mk} \Psi(\bar{z}_m, \tau) \sqrt{A_2} [1 + H_T (1 - \bar{z}_m)]}{\lambda_c \mu_g \alpha_{mk} \sqrt{A_2} [1 + H_T (1 - \bar{z}_m)]} = 0. \quad (43)$$

Введемо позначення

$$\left[-\lambda_c \mu_g \alpha_{mk} + r_k K_g \right] = x_1;$$

$$r_k K_g [A_1 (\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0}) [1 + H_T (1 - \bar{z}_m)] \alpha_{mk}] = x_2;$$

$$-r_k K_g T_{mk} \left\{ H_T \sqrt{A_2} \right\} = x_3.$$

Тоді рівняння (43) запишемо так:

$$\left\{ H_T \sqrt{A_2} x_1 + x_2 \right\} T_m^2 + \left\{ x_1 [1 + H_T \Psi] \sqrt{A_2} - \right.$$

$$\left. - x_2 T_{mk} / \alpha_{mk} + r_k K_g T_{mk} H_T \sqrt{A_2} \right\} T_m + \quad (44)$$

$$+ r_k K_g T_{mk} \Psi(\bar{z}_m, \tau) \sqrt{A_2} [1 + H_T (1 - \bar{z}_m)] = 0.$$

Отримане рівняння (44) дозволяє визначити температуру фазового переходу. Зокрема для м'яких режимів процесу сушіння деревини залежність температури фазового переходу має вигляд

$$T_m = r_k K_g T_{mk} \left\{ A_1 (\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0}) [1 + H_T (1 - \bar{z}_m)] - H_T \sqrt{A_2} \right\} / \quad (45)$$

$/(H_T \sqrt{A_2} [-\lambda_c \mu_g \alpha_{mk} + r_k K_g] + r_k K_g [A_1 (\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0}) [1 + H_T (1 - \bar{z}_m)] \alpha_{mk}])$. З даної формули випливає, що температура фазового переходу є нелінійною функцією від коефіцієнтів теплообміну та масообміну матеріалу, коефіцієнта проникності, динамічної в'язкості газової суміші, теплопровідності, відносної насиченості та функції керування температурою агента сушіння, питомої теплоти пароутворення, місце знаходження координати фазового переходу.

Результати досліджень

Для виконання чисельного аналізу даної задачі використано наступні дані: деревна пластина пів товщиною $L=0,016$ м, три види породи деревини (сосна, бук та дуб), початкове значення вологовмісту $U_0=0,37$ кг/кг, температура середовища $T_s=1000$ С та відносна вологість $\varphi = 50\%$. Теплофізичні і механічні характеристики приймалися у відповідності до породи деревини [3].

На рисунку 1-2 наведені результати числового аналізу відносного значення температури, середнього вологовмісту критерію Косовича та координати поверхні випаровування від узагальненого часу (критерію Фур'є) для досліджуваних порід деревини.

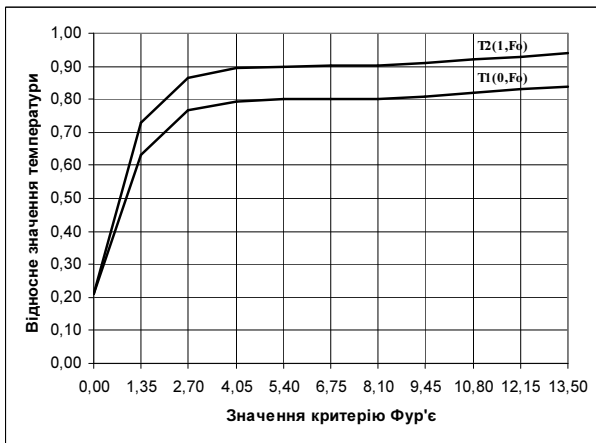


Рис.1. Залежність температури на поверхні та в центрі пластини для сосни.

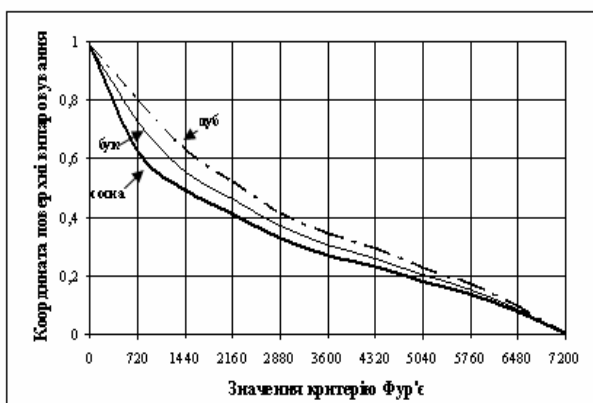


Рис.2. Залежність функції координати поверхні випаровування для різних порід деревини.

Висновки

У роботі наведена одновимірна математична модель неізотермічного волого перенесення під час сушіння капілярно-пористих матеріалів з врахуванням рухомих границь зони випаровування вологи. Отримані аналітичні залежності для дослідження температурно-вологісних полів у висушуваній деревині у довільний момент часу сушіння залежно від координати фазового переходу. Досліджено вплив термодифузії, теплофізичних характеристик матеріалу, режимних параметрів агента сушіння на температуру фазових переходів.

Запропонований підхід та встановлені закономірності впливу термодифузії на поглиблення зони випаровування вологи у висушуваних матеріалах можуть бути використані для розроблення раціональних технологій сушіння капілярно-пористих матеріалів із забезпеченням необхідних показників якості.

Список літератури

[1]. Лыков, А. В. Теория сушки / А. В. Лыков. //— М.: Энергия, 1968. — 472 с.
 [2]. Шервуд Т.К. Сушка твердых тел, Гослесиздат., 1936 г.
 [3]. Шубин Т.С. Сушка и тепловая обработка древесины // М.: Лесная промышленность, 1990.- 336 с.
 [4]. Гайвась, Б. І. Математичне моделювання конвективного сушіння матеріалів з урахуванням механо-термодифузійних процесів / Б. Гайвась // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології : наук. зб. — Львів : ЦММ ІППММ

ім. Я. С. Підстригача НАН України. — 2010. — Вип. 12. — С. 9–37.

[5]. Гринчик Н. Н. Интенсивность фазовых переходов // Н.Н. Гринчик, В.А. Цурко // Инженерно-физический журнал. — 2002. — Т. 75, № 3. — С. 135–141.
 [6]. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнение математической физики: учеб. Пособие. — М.:Изд-во МГУ, 1999, 799с.
 [7]. Данилюк И.И. О задаче Стефана // Успехи математических наук, 1985, т.40, вып.5 (245), с.133 -185.
 [8]. Любов Б.Я. Метод решения краевых задач диффузии для областей с границей, движущейся по произвольному закону / Б.Я. Любов, Э.М. Карташов // Изд. вузов. Серия Физика. — 1970, №12. — С.97-101.
 [9]. Карташов Э.М. Метод решения обобщенных краевых задач уравнения теплопроводности в области с границей, движущейся по произвольному закону / Э.М. Карташов, Г.М. Баргенов, Б.Я. Любов // В кн. Тепло и массоперенос. — Минск. — 1972, т.8 — С. 274-285.
 [10]. Квальвассер В.И. Методы нахождения функции Грина краевых задач уравнения теплопроводности для отрезка прямой с равномерно движущимися границами / В.И. Квальвассер, Я.Ф. Рутнер // Докл. АН СССР. — 1964, т. 165, №6. — С. 1273-1276.
 [11]. Петухов Б.С. Теплообмен в ядерных энергетических установках / Б.С. Петухов, Л.Г. Генин, С.А. Ковалеви др. — М.: Издательство МЭИ, 2003. — 548 с.
 [12]. Гринберг Г.А. Об одном возможном методе подхода к рассмотрению задач теории теплопроводности, диффузии, волновых и им подобных при наличии движущихся границ и о некоторых иных его приложениях / Г.А. Гринберг // Прикладная математика и механика. — 1967, т.31, №2. — С. 393-403.
 [13]. Дульнев Г.Н., Новиков В.В. Процессы переноса в неоднородных средах. — Л.: Энергоатомиздат, 1991, 248 с.
 [14]. Галанин М.П., Савенков Е.Б. Методы вычислений. Уравнения в частных производных. Интегральные уравнения: Учеб. пособие. — М.: Изд-во ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2006, 72 с.
 [15]. Патанкар С.В. Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течении в каналах. — М.: Изд-во МЭИ, 2003, 312 с.
 [16]. Гайвась, Б.І. Осушення пористих тіл в сушильних установках при м'яких режимах / Б.І. Гайвась, І.Б. Борецька // Науковий вісник НЛТУ України: Зб. наук-техн.праць. — Львів: НЛТУ України. -2011. Вип.21.9 — С.317-324.
 [17]. Гайвась, Б. Вплив режиму сушильного агента на осушення пористих тіл. / Б. Гайвась, І. Борецька // Комп'ютерні технології друкарства — 2011.- №26.36. наук праць— Львів.- С.231-240.
 [18]. Дерягин Б.В. Поверхностные силы / Б.В. Дерягин, Чураев Н.В., Муллер В.М. // - М: Наука., 1985. -398с.
 [19]. Борецька І.Б., Соколовський Я.І. Математичне моделювання конвективного процесу сушіння деревини з врахування границь фазових переходів // Вісник національного університету «Львівська політехніка», Комп'ютерні науки та інформаційні технології — 2015 [у друці].
 [20]. Гринчик Н. Н. К проблеме моделирования взаимодействия нестационарных электрических, тепловых и диффузионных полей в слоистых средах / Н. Н. Гринчик, В. А. Цурко // Инженерно-физический журнал. — 2002. — Т. 75, № 3. — С. 135–141.
 [21]. Вигак В.М. Оптимальное управление нестационарными температурными режимами. / В.М Вигак. /Киев: Наукова думка, 1979, 359с.
 [22]. Беннетт, К. О. Гидродинамика, теплообмен и массообмен / К. О. Беннетт, Дж. Е. Майерс ; пер. с англ. — Москва : Недра, 1966. — 726 с.