Математична модель трифазної лінії електропередач, що живить еквівалентне активно-індуктивне навантаження

А. Чабан, д.т.н, проф. [1–3], В. Левонюк, маг. [2]

[1] Національний університет «Львівська політехніка», [2] Львівський національний аграрний університет,
[3] Ченстоховська політехніка

Abstract. The aim of this article is a construction of mathematical model on base of the modified principle of Hamilton-Ostrohradsky and to investigate on its basis transient processes in the three-phase power line of trans– missions with the distributed parameters. A line loads up the equivalent symmetric active-inductive loading, and also investigated in a state of symmetric short circuit.

Key words: mathematical modeling, power line, active-inductive load, numerical methods of integration.

Вступ. Математичне моделювання електротехнічних пристроїв та систем є невід'ємною частиною сучасних технологічних комплексів. Використання апарата математичного моделювання дає змогу дослідникам аналізувати електротехнічні пристрої досить складних конструкцій, не залучаючи до процедури коштовні натурні експерименти. Цілком є очевидним, що для забезпечення високої адекватності математичної моделі потрібно якісно та правильно застосовувати фундаментальні фізичні закони, які ґрунтуються на теорії диференціальних рівнянь. Таким чином, побудова математичної моделі реального фізичного об'єкту зводиться до формування системи диференціальних рівнянь. Існує два основних підходи до формування моделей: це класичний та варіаційний. Кожен з цих підходів, – за словами Уайта й Вудсона [2], – призводить до вірних результатів, якщо, зрозуміло, правильно їх застосовувати. Натомість дороги, які ведуть до остаточної моделі є різними і дещо відрізняються, а відтак, кожен із згаданих підходів має свої вади й переваги, що, очевидно, евентуальний користувач повинен з умінням застосовувати. У цій статті ми не будемо глибоко вникати в ідеологію класичного й варіаційного дуалізмів; лише наголосимо, – за словами знаменитого Макса Планка, – «Фундаментальною вершиною опису природи є знаменитий принцип найменшої дії П'єра де Мопертюї». Найбільш вдалою математичною інтерпретацією згаданого принципу на нашу думку є інтегральний варіаційний принцип Гамільтона-Остроградського, успішно адаптований нами на системи як і з зосередженими, так і з розподіленими параметрами [3, 4]. Основна перевага такої дороги полягає в тому, щоб уникнути декомпозиції єдиної зціленої динамічної системи. Відомо, що використання класичних підходів у деяких випадках може привести до страти певних скритих рухів, а відтак, до зниження адекватності самої математичної моделі. З іншої сторони варіаційний підхід дає можливість відносно вузькому спеціалісту розв'язувати задачі далекі від його кваліфікації. Іншими словами, застосування варіаційних підходів дає змогу завузити коло можливих користувачів.

У книгах [3, 4] викладено теоретичні засади модифікації відомого принципу Гамільтона-Остроградського. Ідея ця полягає в розширенні відомої функції Лагранжа двома додатковими доданками, уведення яких строго теоретично обумовлено. Перший доданок ураховує дисипацію зовнішньої й внутрішньої енергії, а другий – енергію зовнішніх активних і пасивних сил непотенціального характеру. Таким чином, розширена функція Лагранжа виглядатиме так [3]:

$$L^* = \tilde{T}^* - P^* + \Phi^* - D^*, \qquad (1)$$

де L^* – модифікована функція Лагранжа, $\tilde{T}^*$ – кінетична коенергія, P^* – потенціальна енергія, Φ^* – енергія дисипації, D^* – енергія сторонніх непотенціальних сил.

Розроблений нами математичний апарат можна застосувати практично до моделювання будь-яких динамічних систем. Ми ж у якості досліджуваних використаємо одні з найпоширеніших у промисловості – електроенергетичних. Відомо, що в загальному електроенергетична система складається з великої кількості різних підсистем. Тому тут власне застосування варіаційних підходів є виправдане. Задля спрощення, ми пропонуємо розглянути один з основних елементів енергосистеми – довгу лінію електропередач з розподіленими параметрами, що живить еквівалентне активно-індуктивне навантаження. Переважна більшість консументів електроенергії представляють собою в першому наближенні активні й активно-індуктивні елементи (трансформатори, нагрівачі, електроприводи, освітлення тощо). Останні, особливо великої потужності споживачі, мають значні активні та індуктивні опори, що впливає на роботу ЛЕП, особливо під час перехідних станів. Тому, ми бачимо потребу в дослідженні згаданих процесів і, на даному етапі, використовуємо трифазне активно-індуктивне навантаження. Найбільш адекватно відтворює фізичні процеси в лінії електропередач математична модель останньої з розподіленими параметрами, яка одержана нами в [4]. Оскільки реалізація моделі в несиметричних станах є досить складною процедурою, тому тут ми обмежимось лише симетричним навантаженням та симетричними вхідними функціональними залежностями, а відтак, це дає підстави записати всі залежності лише для двох фаз A і B.

У лінії електропередач з розподіленими параметрами фізичні процеси є функцією не тільки часу, але й просторової координати. А це вимагає для функціоналу дії за Гамільтоном-Остроградським записати не тільки елементи самої розширеної функції Лагранжа, а й відповідних їй лінійних густин:

$$L_l = \tilde{T}_l - P_l + \Phi_l - D_l \,, \tag{2}$$

де L_l – густина модифікованої функції Лагранжа, $\tilde{T}_l, P_l, \Phi_l, D_l$ – відповідні густини енергетичних функцій.

Тоді, розширений функціонал дії за Гамільтоном-Остроградським прийме остаточний вигляд:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(L_1^* + \int_l L_l dl \right) dt \,, \tag{3}$$

де S – дія за Гамільтоном-Остроградським.

Тепер, якщо отримати варіацію згаданого функціоналу та прирівняти останню до нуля, то в результаті одержимо рівняння стану досліджуваного об’єкту [4].

Електричну схема з’єднань елементів трифазної лінії електропередач з розподіленими параметрами зобразимо на рис. 1.

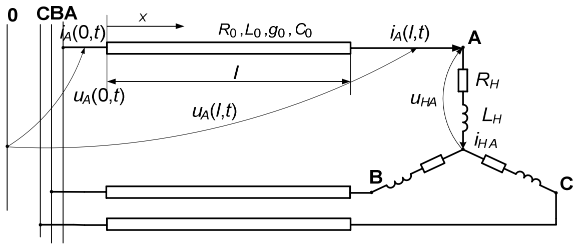

Рис. 1. Електрична схема з’єднань елементів трифазної лінії електропередач

Легко бачити, що вигляд рівнянь Ейлера на підставі виразу (3) в математичному плані складає мішану задачу, під час розв’язання якої виникає проблема пошуку крайових умов. Щодо початкових умов, то тут проблема практично розв’язана апріорі: у задачах подібного типу вони зазвичай задаються або просто обчислюються. У нашому випадку крайові умови на початку лінії електропередач стосовно функції напруги обчислюються тривіально, адже напруга є задана функція часу.

Відтак, функції двох напруг на початку лінії є заданими. Зазвичай вони представляються в такому вигляді:

$$\mathbf{u}(0,t) \equiv \boxed{\begin{array}{c} U_m \sin(\omega t) \\ \hline U_m \sin(\omega t - 120°) \end{array}}, \ \omega = \text{const} \,, \tag{4}$$

де U_m – амплітудні значення функцій напруг, ω – колова частота мережі.

Очевидно, що для часової похідної від функції напруги вони також знаходяться елементарно. У нашому випадку це

$$\mathbf{v}(0,t) \equiv \boxed{\begin{array}{c} U_m \omega \cos(\omega t) \\ \hline U_m \omega \cos(\omega t - 120°) \end{array}} \,. \tag{5}$$

Отже, проблема полягає у знаходженні крайових умов у кінці лінії електропередач. Визначення цих умов і є підставою знаходження напруги на активно-індуктивному навантаженні. Щоби їх визначити потрібно задіяти в повному обсязі єдину математичну модель системи.

Для спрощення викладу теоретичного матеріалу вважаємо за доцільне представити геометричну інтерпретацію кінцевого елементу лінії в дискретному просторі, рис.2.

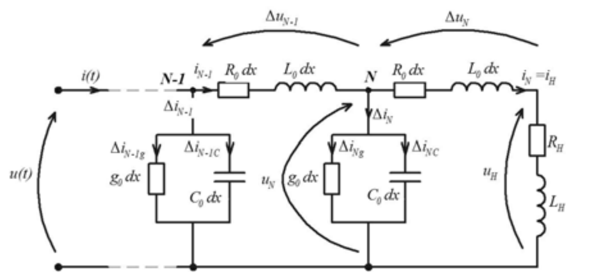

Рис. 2. Електрична схема з’єднання елементів довгої лінії

Рівняння трифазної довгої лінії електропередач з розподіленими параметрами за несиметричних параметрів отримане нами в [3]. Для симетричного –

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \left(C_0 L_0 \right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} - (g_0 L_0 + C_0 R_0)\mathbf{v} - g_0 R_0 \mathbf{u} \right); \tag{6}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{v} \,. \tag{7}$$

Таким чином, визначення крайових умов до (6), (7) і є підставою для знаходження напруги в кінці лінії. Аби їх визначити потрібно задіяти в повному обсязі математичну модель пристрою.

Запишемо рівняння (6), (7) у дискретному просторі для i-того вузла лінії.

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \left(C_0 L_0 \right)^{-1} \left(\frac{\mathbf{u}_{i-1} - 2\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_{i+1}}{(\Delta x)^2} - (g_0 L_0 + \right.$$

$$\left. + C_0 R_0)\mathbf{v}_i - g_0 R_0 \mathbf{u}_i \right); \tag{8}$$

$$\frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = \mathbf{v}_i \tag{9}$$

Запишемо рівняння стаціонарних зв’язків для системи, рис. 2 використовуючи перший та другий закони Кірхгофа [5]

$$\mathbf{u}_H = R_H \cdot \mathbf{i}_H + L_H \frac{d\mathbf{i}_H}{dt}, \ \mathbf{i}_H \equiv \mathbf{i}_N \,; \tag{10}$$

$$\mathbf{u}_N = \Delta \mathbf{u}_N + \mathbf{u}_H \Rightarrow \mathbf{u}_H = \mathbf{u}_N - \Delta \mathbf{u}_N \,; \tag{11}$$

$$\Delta \mathbf{u}_N = R_0 \Delta x \mathbf{i}_N + L_0 \Delta x \frac{d\mathbf{i}_N}{dt}, \ \mathbf{i}_{Ng} = g_0 \Delta x \, \mathbf{u}_N \,; \tag{12}$$

$$\frac{d\mathbf{u}_N}{dt} = \frac{1}{C_0 \Delta x} \Delta \mathbf{i}_{NC} \,; \tag{13}$$

$$\Delta \mathbf{i}_{N-1C} = \Delta \mathbf{i}_{N-1} - \Delta \mathbf{i}_{N-1g} = \Delta \mathbf{i}_{N-1} - g_0 \Delta x \mathbf{u}_{N-1} \,; \tag{14}$$

Ураховуючи рівняння стаціонарних зв’язків (10) – (14), а також рівняння трифазної лінії електропередач (8), (9) запишемо остаточно кінцеві диференціальні рівняння, які й описують математичну модель досліджуваного нами об'єкту.

$$\frac{d\mathbf{i}_N}{dt} = \frac{1}{L_H + L_0\Delta x}\left[\mathbf{u}_N - \left(R_0\Delta x + R_H\right)\mathbf{i}_N\right]; \qquad (15)$$

$$\frac{d\mathbf{i}_{N-1}}{dt} = \frac{1}{L_0\Delta x}\left[\mathbf{u}_N - \mathbf{u}_{N-1} - R_0\Delta x\mathbf{i}_{N-1}\right]; \qquad (16)$$

$$\frac{d\mathbf{u}_N}{dt} = \frac{1}{C_0\Delta x}\left(\mathbf{i}_N - \mathbf{i}_{N-1} - g_0\Delta x\mathbf{u}_N\right); \qquad (17)$$

$$\frac{d\mathbf{v}_{N-1}}{dt} = \frac{1}{C_0L_0}\left[\frac{1}{\left(\Delta x\right)^2}\left(\mathbf{u}_{N-2} - 2\mathbf{u}_{N-1} + \mathbf{u}_N\right) - \right.$$

$$\left. -\left(g_0L_0 + C_0R_0\right)\mathbf{v}_{N-1} - g_0R_0\mathbf{u}_{N-1}\right]; \qquad (18)$$

$$\frac{d\mathbf{u}_{N-1}}{dt} = \mathbf{v}_{N-1}; \qquad (19)$$

Отже, сумісному інтегруванню підлягають така система нелінійних диференціальних рівнянь: (8), (9), (15) – (19) з урахуванням рівнянь зв'язків (4), (5), (10) – (14).

Результати комп'ютерної симуляції. Комп'ютерна симуляція перехідних процесів проводилась для модельної лінії електропередач, яка працювала на активно-індуктивне навантаження від джерела живлення системи симетричних напруг: $u_A = 4900\sin(314t)$ В, $u_B = 4900\sin(314t - 120^\circ)$ В. Проводилося два досліди. Перший дослід: лінія електропередач включалась безпосередньо на напругу з увімкненим навантаженням. І другий – після досягнення усталеного процесу здійснювалось трифазне симетричне коротке замикання вітки навантаження.

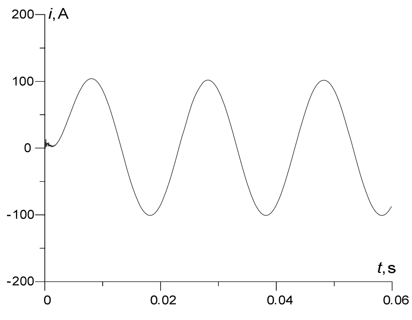

Рис. 3. Перехідний струм у вітці навантаження електроенергетичної системи для першого досліду

На рис. 3. показано перехідний струм у першому досліді. Оскільки значення індуктивності і ємності були досить незначними, то перехідна складова практично невідчутна. Очевидно, що в реальних лініях реактивні параметри призведуть до збільшення часу перехідного процесу.

На рис. 4. показано те саме, але для другого досліду. Як бачимо, симетричне коротке замикання на навантаженні призвело до істотного струму короткого замикання в досліджуваній вітці. Очевидно, що для лінії, як і для пристрою навантаження згадані фізичні процеси є аварійними.

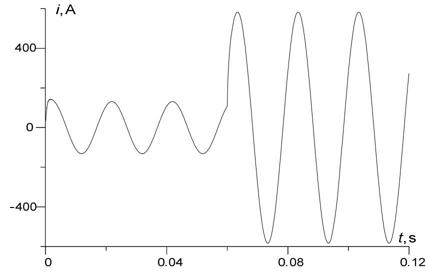

Рис. 4. Перехідний струм у вітці навантаження електроенергетичної системи для другого досліду

Висновки.

1. Застосування модифікованого інтегрального варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського дає змогу будувати математичні моделі досить складних динамічних систем, зокрема, у нашому випадку побудовано математичну модель електроенергетичної системи, яка складається з трифазної довгої лінії електропередач з розподіленимим параметрами, що живить еквівалентне симетричне активно-індуктивне навантаження.

2. Математична модель довгої лінії електропередач з розподіленими параметрами дає змогу аналізувати складні перехідні процеси в згаданій лінії, які практично неможливо врахувати на підставі колової заступної схеми довгої лінії, оскільки рівняння з частинними похідними дають можливість описати фізичні процеси з урахуванням континуальності середовища, зокрема, обчислити швидкусть поширення електромагнітної хвилі в довгій лінії, враховувати різноманітні хвильові процеси тощо.

3. Важливим елементом електроенергетичних систем і мереж є стабілізація напруги в мережі. Відомо, що на значення останньої впливають різноманітні фізичні процеси: електромагнітні втрати, втрати на корону та ін., що ефективно можна описати лише рівнянням довгої лінії з розподіленими параметрами з долучанням диференціальних рівняннь теорії електромагнітного поля. Власне застосування варіаційних методів дає змогу урахувати за можливості в повному обсязі згадані процеси в математичній моделі досліджуваного обєкту.

[1] Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники. В 2-х т. – Л.: Энергоиздат, 1981. – т.1. – 536 с.; т.2. – 415 с.

[2] Уайт Д., Вудсон Г. Электромеханическое преобразование энергии. – М.-Л.: Энергия, 1964. – 528 с.

[3] Чабан А. Математичне моделювання коливних процесів в електромеханічних системах. (Видання друге, виправлене й доповнене). – Львів: В-во Тараса Сороки, 2008. – 328 с.

[4] Чабан А. Принцип Гамільтона-Остроградського в електромеханічних системах. – Львів: В-во Тараса Сороки, 2015. – 488 с.

[5] Шимони К. Теоретическая электротехника. – М.: Мир, 1964. – 775 с.