

Розрахунок частот і форм коливань підвісних вантажонесучих конвеєрів

І. Вікович, проф., д. т. н.

Національний університет "Львівська політехніка"

Abstract. It was devise a mathematical model of the suspended weightholding and pushing conveyors as a system with distributive parameters in a view of dispersion of energy in the material. It was obtained a frequency equation and was determined main frequencies and shapes of the free oscillations of these conveyors.

Key words. Conveyor, distributive parameters, free oscillations, dispersion of energy

Вступ. Підвісні вантажотримкі та штовхаючі конвеєри достатньо широко використовуються для інтенсифікації різноманітних виробничих процесів на підприємствах різних галузей промисловості, агропромислового комплексу і в сфері обслуговування. Довжини замкнутих контурів таких конвеєрів, особливо прямолінійних ділянок, переважно сягають від декількох десятків до сотень метрів, а на окремих підприємствах довжина їх може становити декілька кілометрів. Велика довжина і значна податливість в осьовому напрямі, а також наявність фрикційних явищ у цих конвеєрах призводить до нерівномірного руху й виникнення поздовжніх та поперечних коливань, що вимагає відповідних теоретичних досліджень.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У відомих дослідженнях для аналізу динамічних явищ у машинах безперервного транспорту в основному розрахункові моделі подають у вигляді розімкнутих схем. У роботі [1] і в усіх його наступних роботах для дослідження динаміки машин безперервного транспорту розрахункові схеми подано у вигляді замкнутого контуру із зосередженими масами, а у роботі [2] розрахункова схема задається у вигляді замкнутого контуру з розподіленими параметрами. Тут запропонована розрахункова схема (рис. 1), яка істотно відрізняється від аналогічних [1, 2].

Виклад основного матеріалу. На рис. 1 подано розрахункову схему підвісного вантажотримкого конвеєра.

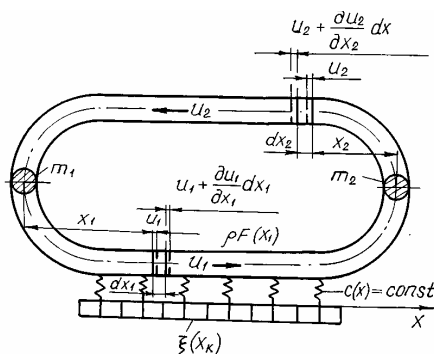


Рис. 1. Розрахункова схема підвісного вантажотримкого конвеєра

Тут m_1 і m_2 – зведені маси ведучого і веденого механізмів конвеєра; $\rho F_1(x_1) = \rho F_2(x_2)$ – маси одиниці довжини робочої і неробочої віток конвеєра; $\xi(x)$ – погонна маса вантажів; $c(x)$ – деякий приведений коефіцієнт згинальної жорсткості постелі вантажів; ρ – густина матеріалу; $F_i(x_i)$ – площі поперечних перерізів віток конвеєра ($i = 1, 2$)

Для складання диференціальних рівнянь руху з використанням принципу Даламбера, наведеної вище механічної системи, розглянемо динамічну рівновагу виділеного довільного елемента системи довжиною dx_i , розміщеного між двома суміжними поперечними перерізами (рис. 2).

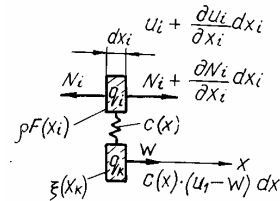


Рис. 2. Схема дії внутрішніх зусиль на довільний елемент коливної системи навісного вантажотримкого конвеєра

Нехай $u_1(x_1, t)$, $u_2(x_2, t)$ та $w(x_1, t)$ – відповідно поздовжні переміщення поперечних перерізів робочої і неробочої віток конвеєра та розподіленої системи вантажів (або довгомірного вантажу) під час коливань. Тоді відповідні поздовжні переміщення поперечних перерізів $x_i + dx_i$ можна подати виразом

$$u_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dx_i \quad (i = 1, 2).$$

Поздовжня розтягувальна сила N_i в довільному поперечному перерізі вітки конвеєра з координатою x_i дорівнюватиме:

$$N_i = \sigma_i F_i(x_i) = \varepsilon_i E F_i(x_i) = E F_i(x_i) \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad (1)$$

де $\varepsilon_i = \frac{u_i(x_i + dx_i) - u_i(x_i)}{\Delta x_i} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ – відносна деформація; σ_i – нормальне напруження; E – модуль пружності Юнга.

Враховуючи внутрішнє тертя матеріалу металоконструкції віток конвеєра за рахунок гістерезисних

втраг вираз для сили N_i згідно [3] можна подати у вигляді:

$$N_i = EF(x_i) \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) + \varepsilon \bar{\bar{\Phi}}_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \right], \quad (2)$$

де

$$\varepsilon \bar{\bar{\Phi}}_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) = \pm \frac{n+1}{4n} \delta \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)_{t=0} \right] \times \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)_{t=0} \mp n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^n}{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^{n-1}} \right]$$

Тут ε – малий параметр, який вказує на малість величини функціоналу $\bar{\bar{\Phi}}_i$, що враховує гістерезисні втрати в коливній системі порівняно з іншими величинами; n – параметр петлі гістерезису; δ – декремент коливань.

Зазначимо, що для наближеної оцінки механічних коливань системи можна враховувати внутрішнє тертя за гіпотезою Фойгта [4]

$$\sigma_i = E\varepsilon_i + k \frac{d\varepsilon_i}{dt}, \quad (3)$$

де k – коефіцієнт, за допомогою якого враховується розсіяння енергії в матеріалі.

У цьому випадку вираз для поздовжньої сили (1) запишеться у вигляді

$$N_i = \varepsilon EF_i(x_i) + k \frac{d\varepsilon}{dt} = EF_i(x_i) \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + k F_i(x_i) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial t}. \quad (4)$$

У перерізах віток конвеєра на відстані $x_i + dx_i$ розтягуючі сили з урахуванням (2) дорівнюватимуть:

$$N_i + dN_i = N_i + \frac{\partial N_i}{\partial x_i} dx_i = EF_i(x_i) \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \varepsilon \bar{\bar{\Phi}}_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \right] \cdot \left(1 + \frac{\partial}{\partial x_i} dx_i \right). \quad (5)$$

Сили інерції віток конвеєра та системи вантажів одиничної довжини характеризуватимуться величинами

$$q_i = \rho F_i(x_i) \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} dx_i \quad \text{та} \quad q_k = \xi(x_k) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx_i. \quad (6)$$

Привідний механізм конвеєра надає робочій вітці тягове зусилля $F_T(t)$, а під час руху конвеєра в робочій і неробочій вітках виникають сили опору їх переміщень відповідно $Q_1(t)$ і $Q_2(t)$.

Рівняння руху виділеного елемента системи довжиною dx_i (рис. 2) в проекціях на осі x_i з урахуванням сил інерції, тягового зусилля, сил опору переміщенню та пружного з'єднання системи вантажів можна подати у вигляді:

$$N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial x_1} dx_1 - N_1 - q_1 dx_1 + (F_T(t) - Q_1(t)) dx_1 - c(x)(u_1 - w) dx_1 = 0$$

$$N_2 + \frac{\partial N_2}{\partial x_2} dx_2 - N_2 - q_2 dx_2 - Q_2(t) dx_2 = 0$$

$$c(x)(u_1 - w) dx - q_k dx = 0. \quad (7)$$

Із (7) випливає

$$\frac{\partial N_1}{\partial x_1} - q_1 - c(x)(u_1 - w) + F_T(t) - Q_1(t) = 0,$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial x_2} - q_2 - Q_2(t) = 0, \quad c(x)(u_1 - w) - q_k = 0. \quad (8)$$

Систему рівнянь (8) з урахуванням (5) і (6) та за умови $F_1(x_1) = F_2(x_2) = F = const$ можна записати у вигляді:

$$\rho F \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - EF \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + c(x)(u_1 - w) + EF \frac{\partial}{\partial x_1} \varepsilon \bar{\bar{\Phi}} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) = F_T(t) - Q_1(t),$$

$$\rho F \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - EF \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + EF \frac{\partial}{\partial x_2} \varepsilon \bar{\bar{\Phi}} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) = -Q_2(t),$$

$$\xi(x_k) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c(x)(w - u_1) = 0. \quad (9)$$

Дослідимо власні коливання конвеєра без врахування розсіяння енергії в матеріалі. Для цього покладемо в рівняннях (9) $F_T(t) = Q_1(t) = Q_2(t) = 0$:

$$a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + c_\mu (u_1 - w),$$

$$a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_\xi (w - u_1) = 0, \quad (10)$$

де $\mu = \rho F$; $a^2 = \frac{E}{\rho}$; $c_\mu = \frac{c}{\mu}$; $c_\xi = \frac{c}{\xi}$.

Задамо відповідні умови спряження віток конвеєра:

$$u_1(0) = u_2(l_2),$$

$$u_1(l_1) = u_2(0),$$

$$EF \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} - m_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \Big|_{x_1=0} = EF \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \Big|_{x_2=l_2},$$

$$EF \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_{x_1=l_1} + m_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \Big|_{x_1=l_1} = EF \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} . \quad (11)$$

Розв'язок системи (10) будемо шукати у вигляді:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, t) &= u_1(x_1) e^{i\lambda t}, \\ u_2(x_2, t) &= u_2(x_2) e^{i\lambda t}, \\ w(x_1, t) &= w(x_1) e^{i\lambda t}. \end{aligned} \quad (12)$$

де λ – колова частота власних коливань, яка пов'язана з частотою коливань f (в гц.) залежністю $\lambda = 2\pi f$.

Після підстановки (12) в (10) отримаємо:

$$a^2 u_1'' + \lambda^2 u_1 - c_\mu (u_1 - w) = 0, \quad (13)$$

$$a^2 u_2'' + \lambda^2 u_2 = 0, \quad (14)$$

$$\lambda^2 w - c_\xi (w - u_1) = 0. \quad (15)$$

З рівняння (15) випливає:

$$w = \frac{c_\xi}{c_\xi - \lambda^2} u_1. \quad (16)$$

Рівняння (13) з урахуванням (16) матиме вигляд

$$a^2 u_1'' + \Lambda^2 u_1 = 0, \quad (17)$$

$$\text{де } \Lambda^2 = q^2 \lambda^2, \quad q^2 = 1 + \frac{c_\mu}{c_\xi - \lambda^2}.$$

Загальні розв'язки рівнянь (17), (14) в залежності від розглядуваного діапазону частот можна подати у вигляді:

для діапазону (I): $0 \leq \lambda < \sqrt{c_\xi}$ і $\lambda > \sqrt{c_\xi + c_\mu}$

$$\begin{aligned} u_1(x_1) &= A_1 \cos \alpha_1 x_1 + B_1 \sin \alpha_1 x_1, \\ u_2(x_2) &= A_2 \cos \beta x_2 + B_2 \sin \beta x_2, \end{aligned} \quad (18)$$

а для діапазону (II): $\sqrt{c_\xi} < \lambda \leq \sqrt{c_\xi + c_\mu}$

$$\begin{aligned} u_1(x_1) &= A_1 e^{\alpha_2 x_1} + B_1 e^{-\alpha_2 x_1}, \\ u_2(x_2) &= A_2 \cos \beta x_2 + B_2 \sin \beta x_2. \end{aligned} \quad (19)$$

$$\text{де } \beta = \frac{\lambda}{a}, \quad \alpha_1 = q_1 \beta, \quad \alpha_2 = q_2 \beta,$$

$$q_{1,2} = \sqrt{\pm \left(1 + \frac{c_\mu}{c_\xi - \lambda^2} \right)}.$$

Зауважимо, що рівняння (14), (17) визначають власні форми коливань віток конвеєра. Розв'язки цих рівнянь містять відповідно по дві сталі інтегрування A_1, B_1, A_2, B_2 , значення яких знаходимо з умов

спряження (11), використовуючи розв'язки (12), (18), (19). Після відповідних підстановок для визначення невідомих сталих інтегрування отримуємо систему алгебраїчних рівнянь, яку подамо у такій матричній формі:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & a_{13}^{(k)} & a_{14}^{(k)} \\ a_{21}^{(k)} & a_{22}^{(k)} & a_{23}^{(k)} & a_{24}^{(k)} \\ a_{31}^{(k)} & a_{32}^{(k)} & a_{33}^{(k)} & a_{34}^{(k)} \\ a_{41}^{(k)} & a_{42}^{(k)} & a_{43}^{(k)} & a_{44}^{(k)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (20)$$

де

$$a_{11}^{(1)} = -a_{23}^{(1)} = a_{44}^{(1)} = 1, \quad a_{12}^{(1)} = a_{24}^{(1)} = 0, \quad a_{13}^{(1)} = -\cos \beta l_2,$$

$$a_{14}^{(1)} = -\sin \beta l_2, \quad a_{21}^{(1)} = \cos \alpha_1 l_1, \quad a_{22}^{(1)} = \sin \alpha_1 l_1,$$

$$a_{31}^{(1)} = M_1 \lambda, \quad a_{32}^{(1)} = \frac{\alpha_1}{\beta}, \quad a_{33}^{(1)} = \sin \beta l_2, \quad a_{34}^{(1)} = -\cos \beta l_2,$$

$$a_{41}^{(1)} = \frac{\alpha_1}{\beta} \sin \alpha_1 l_1, \quad a_{42}^{(1)} = -\frac{\alpha_1}{\beta} \cos \alpha_1 l_1, \quad a_{43}^{(1)} = M_2 \lambda.$$

$$a_{11}^{(2)} = a_{12}^{(2)} = -a_{23}^{(2)} = -a_{24}^{(2)} = 1, \quad a_{43}^{(2)} = -M_2 \lambda,$$

$$a_{13}^{(2)} = a_{34}^{(2)} = -\cos \beta l_2, \quad a_{14}^{(2)} = -a_{33}^{(2)} = -\sin \beta l_2,$$

$$a_{24}^{(2)} = 0, \quad a_{21}^{(2)} = e^{\alpha_2 l_1}, \quad a_{22}^{(2)} = e^{-\alpha_2 l_1}, \quad a_{41}^{(2)} = q_2 e^{\alpha_2 l_1},$$

$$a_{42}^{(2)} = -q_2 e^{-\alpha_2 l_1}, \quad a_{31}^{(2)} = q_2 + M_1 \lambda, \quad a_{32}^{(2)} = -q_2 + M_1 \lambda,$$

$$M_1 = \frac{m_1 a}{EF}, \quad M_2 = \frac{m_2 a}{EF}.$$

Тут верхній індекс $k=1$ відповідає частотному діапазону (I), а $k=2$ – частотному діапазону (II).

Для отримання нетривіального розв'язку необхідно, щоб визначник матриці системи рівнянь (20) дорівнював нулю, що призводить до частотного рівняння. Після деяких перетворень, зводячи матрицю системи (20) методом Гауса до діагонального виду, одержимо частотні рівняння для знаходження власних частот механічних коливань конвеєра у такому вигляді:

для діапазону (I)

$$\Delta^{(1)} = \left(1 + \frac{\alpha_1^2}{\beta^2} + M_1 M_2 \lambda^2 \right) \sin \alpha_1 l_1 \sin \beta l_2 +$$

$$+ \lambda (M_1 + M_2) \left(\sin \alpha_1 l_1 \cos \beta l_2 + \frac{\alpha_1}{\beta} \cos \alpha_1 l_1 \sin \beta l_2 \right) +$$

$$+ 2 \frac{\alpha_1}{\beta} (1 - \cos \alpha_1 l_1 \cos \beta l_2) = 0, \quad (21)$$

для діапазону (II)

$$\Delta^{(2)} = (M_1 \lambda \operatorname{sh} \alpha_2 l_1 - q_2 \operatorname{ch} \alpha_2 l_1) (\cos \beta l_2 - M_2 \lambda \sin \beta l_2) +$$

$$+ q_2 (M_1 \lambda \operatorname{ch} \alpha_2 l_1 - q_2 \operatorname{sh} \alpha_2 l_1) \sin \beta l_2 + (M_2 \lambda \cos \beta l_2 +$$

$$+ \sin \beta l_2) \operatorname{sh} \alpha_2 l_1 - q_2 \cos \beta l_2 \operatorname{ch} \alpha_2 l_1 + 2q_2 = 0. \quad (22)$$

де

$$\operatorname{sh}\alpha_2 l_1 = \frac{1}{2}(e^{\alpha_2 l_1} - e^{-\alpha_2 l_1}), \quad \operatorname{ch}\alpha_2 l_1 = \frac{1}{2}(e^{\alpha_2 l_1} + e^{-\alpha_2 l_1})$$

– гіперболічний синус і косинус відповідно.

Відмітимо також, що в рівнянні (21) відношення

$$\frac{\alpha_1}{\beta} \rightarrow \sqrt{1 + \frac{c_\mu}{c_\xi}} \quad \text{при } \lambda \rightarrow 0.$$

Якщо в систему рівнянь (20) підставити довільний корінь частотних рівнянь (21), (22), то одне рівняння стане залежним від інших. Ці рівняння поєднують між собою невідомі коефіцієнти A_1, B_1, A_2, B_2 . Троє з них можна виразити через один, наприклад, через A_1 . Задавши йому довільне числове значення можна розв'язати систему відносно інших невідомих коефіцієнтів і тим самим згідно формул (18), (19) визначити для заданої власної частоти відповідні власні форми коливань з точністю до сталого множника.

Результати розрахунку перших восьми власних частот вільних коливань підвісного вантажонесучого конвеєра для різних величин технологічних параметрів наведені в таблиці. Розрахунок проведений за таких параметрів системи:

$$E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ н/м}^2; \quad \rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3;$$

$$F = 0,15 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2;$$

$$m_1 = m_2 = 100 \text{ кг}; \quad l_1 = l_2 = 30 \text{ м}; \quad c(x) = 2000 \text{ н/м}^2;$$

$$\xi(x) = 300 \text{ кг/м}.$$

Таблиця

Значення власних частот механічних коливань конвеєра для різних величин технологічних параметрів

Параметри	Значення	Власні частоти			
		$f_1, \text{гц}$	$f_2, \text{гц}$	$f_3, \text{гц}$	$f_4, \text{гц}$
$c, \text{кН/м}^2$	2	2,5	30,9	86,7	97,3
	20	7,5	31,2	87,7	98,2
	200	20,7	34,2	91,4	112,4
	2000	41,3	49,1	93,5	176,1
$m_1=m_2, \text{кг}$	50	3,0	41,5	86,7	105,9
	150	2,1	25,7	86,7	94,1
	200	1,8	22,5	86,7	92,4
$l_1=l_2, \text{м}$	50	2,8	23,1	52,1	62,0
	70	3,1	19,0	37,3	46,5
	100	3,4	15,2	26,3	34,6
Параметри	Значення	Власні частоти			
		$f_5, \text{гц}$	$f_6, \text{гц}$	$f_7, \text{гц}$	$f_8, \text{гц}$
$c, \text{кН/м}^2$	2	173,1	179,0	259,5	263,5
	20	173,5	179,5	259,7	263,9
	200	175,4	188,2	261,1	270,0
	2000	225,8	261,5	271,5	333,6
$m_1=m_2, \text{кг}$	50	173,1	184,2	259,5	267,5
	150	173,1	177,1	259,5	262,2

	200	173,1	176,1	259,5	261,6
$l_1=l_2, \text{м}$	50	103,8	109,6	155,7	159,7
	70	74,2	79,8	111,3	115,1
	100	52,1	57,4	77,9	81,7

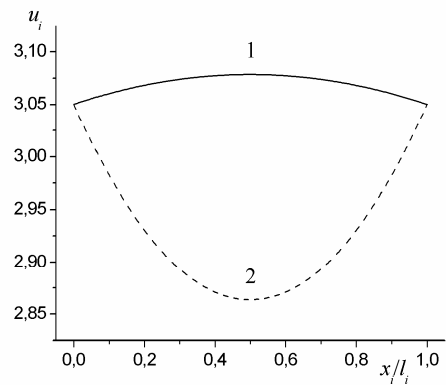


Рис. 3. Перша форма вільних коливань

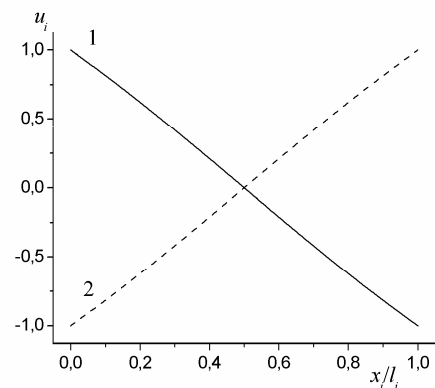


Рис. 4. Друга форма вільних коливань

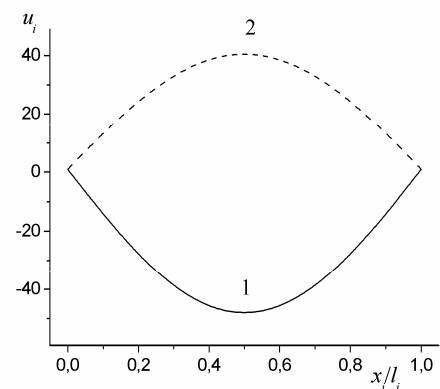


Рис. 5. Третя форма вільних коливань

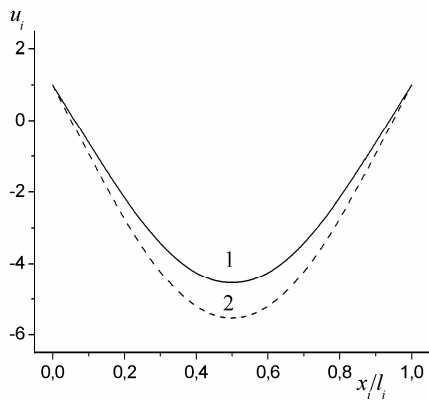


Рис. 6. Четверта форма вільних коливань

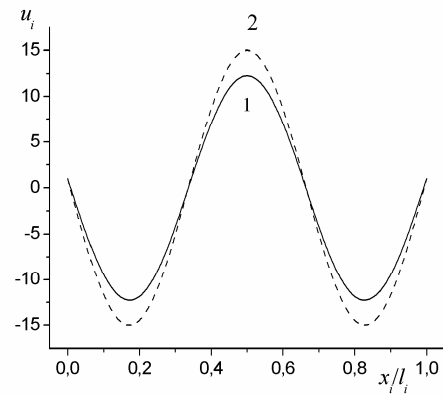


Рис. 10. Восьма форма вільних коливань

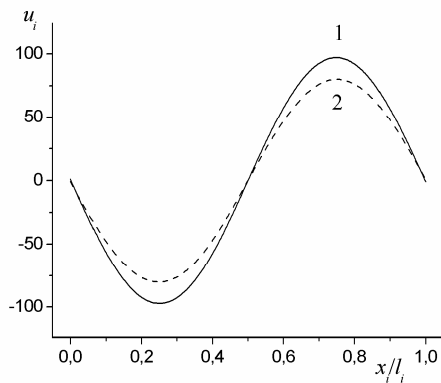


Рис. 7. П'ята форма вільних коливань

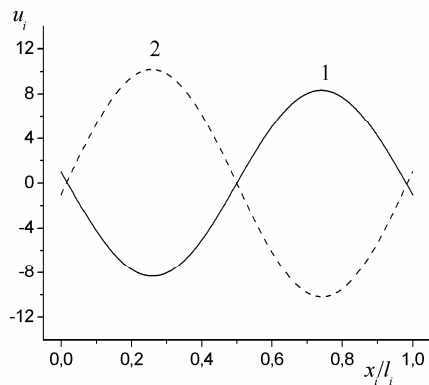


Рис. 8. Шоста форма вільних коливань

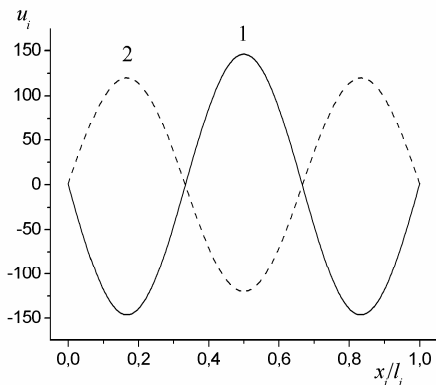


Рис. 9. Сьома форма вільних коливань

На рис. 3 – 10 зображено відповідно першим восьми власним частотам форми механічних коливань робочої (крива 2) і неробочої (крива 1) віток підвісного вантажонесучого конвеєра для розрахункового значення $c = 2 \cdot 10^4 \text{ н / м}^2$.

Як видно із таблиці, зміна згинальної жорсткості постелі вантажів c істотно впливає на першу (основну) власну частоту механічних коливань конвеєра на відміну від вищих частот, де спостерігається незначний вплив. Із зростанням жорсткості c зростають і відповідні значення власних частот коливань, а при зростанні довжин віток конвеєра значення власних частот спадають.

Висновки. Необхідно зазначити, що особливі труднощі виникають при розв'язуванні системи рівнянь (9) з урахуванням функціоналів $\tilde{\Phi}_i$, що враховують гістерезисні втрати в колівній системі конвеєра. У цій роботі розв'язок отримано в першому наближенні без врахування гістерезисних втрат.

Отже, запропонована методика розрахунку дає змогу визначати частоти і форми вільних коливань підвісних вантажотримких і штовхаючих конвеєрів при проектуванні та вибирати оптимальні режими їх роботи.

[1]. Хорольський І.М. Замкнутий контур і розімкнута схема в дослідженнях динаміки машин безперервного транспорту // Вісн. Львів. політехн. ін-ту. – 1991.– №259.– С. 105–108.

[2]. Харченко Е., Поліщук Л., Собковскі С. Розрахунок перехідних процесів у стрічковому конвейєрі з урахуванням рухомості меж транспортувального органу. – Технічні вісті (Technical News). – 2001/1(12), 2(13). – С. 102–106.

[3]. Писаренко Г.С., Богинич О.Е. Колебания кинематически возбуждаемых механических систем с учетом диссипации энергии. – К.: Наукова думка, 1984. – 220 с.

[4]. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. Л.: Машиностроение, 1976.– 320 с.

[5]. Вибрации в технике: Справочник в 6-ти т. – М.: Машиностроение, 1978 – 1981. Т. 1: Колебания линейных систем.– 1978.– 322 с.

[6]. Зенков Р.Л., Ивашков И.И., Колобов Л.Н. Машины непрерывного транспорта. – М.: Машиностроение.– 304 с.