Числовий метод дослідження теплообміну на підставі похідних дробового порядку

Д.т.н., проф. Я. Соколовський, асп. М. Москвітіна

Національний лісотехнічний університет України

Abstract: Considered one-dimensional and two-dimensional mathematical models of unsteady heat transfer process with boundary conditions of the third kind described by differential equations in partial derivatives of fractional order. Developed explicit and implicit difference schemes for solving the problem of heat conduction of fractional order derivative in time and space coordinates.

Key words: mathematical model, numerical method, heat transfer, derivatives of fractional order.

Актуальність досліджень. Математичне моделювання процесів тепломасоперенесення в багатокомпонентних системах із складною просторово-часовою структурою, для яких характерні ефекти пам'яті, просторової нелокальності та самоорганізації, як правило, базуються на застосуванні математичного апарату інтегродиференціювання дробового порядку. Значне зацікавлення до апарату дробового інтегродиференціювання було викликане фізичною інтерпретацією, що в свою чергу знайшло широкого застосування майже у всіх галузях науки - в механіці, фізиці, біофізиці, економіці, теорії інформації, соціології тощо. Диференціальні рівняння дробового порядку описують еволюцію фізичних систем із залишковою пам'ятю, які займають проміжне місце між марківськими системами та системами, які характеризуються повною пам'ятю. Зокрема, показник дробовості вказує на долю станів системи, що зберігаються протягом усього процесу її функціонування.

Математичний апарат дробових похідних і дробових інтегралів має давню історію, та бере свій початок ще з часів зародження диференціального числення. На сьогодні сам математичний апарат дробових похідних є досить розвиненим, проте його використання для створення математичних моделей систем із фрактальною структурою розпочато зовсім недавно. З кожним роком все більше зростає зацікавленість щодо використання дробових диференціальних рівнянь для моделювання різних процесів, адже його застосування дає змогу глибше зрозуміти відомі результати та отримати новий клас рішень, які не змогли охопити класичні теорії цілочисельного диференціювання. Проте, не зважаючи на такий підвищений інтерес, виникає ряд нових задач, які до кінця залишаються нерозв'язаними, а також потребують коректної та фізично-осмисленої постановки граничних і початкових умов.

Аналіз сучасного стану досліджень. Як правило, для знаходження розв'язку диференціальних рівнянь дробового порядку використовують аналітичні та чисельні методи. У працях [4] – [6] знайдено аналітичні розв'язки задач із граничними умовами першого роду, що містять похідні дробового порядку за часом та просторовою змінною. Зокрема, у [6] розглянуті одновимірні випадки задач для нескінченної прямої, півобмеженої прямої та задачі без початкових умов. Дослідженню динаміки та автохвильових розв'язків бістабільних систем реакції – дифузії з часовими дробовими похідними присвячено праці [7], [8]. У [9], [10] побудовано фундаментальні розв'язки параболічних рівнянь з дробовою похідною за часом з різними граничними умовами. Роботи [11], [12] присвячені застосуванню спектрального методу до розв'язування диференційних рівнянь дробового порядку за часом з використанням многочленів Лагерра.

Оскільки при аналітичному розв'язуванні краєвих задач із дробовими похідними виникають значні труднощі, то більш ефективними та простішими у застосуванні є чисельні методи. Теорія чисельних методів розв'язування диференціальних рівнянь в частинних похідних дробового порядку носить фрагментарний характер і далека від завершення. На актуальність розроблення чисельних методів розв'язування краєвих задач з похідними дробового порядку звернена увага у працях [13] – [18]. У перших двох побудовано різницеві схеми розв'язування одновимірної та двовимірної задачі теплопровідності з похідними дробового порядку за часом і просторовими координатами із граничними умовами першого роду. Слід зауважити, що досить не велика кількість робіт присвячена краєвим задачам дробового порядку із граничними умовами третього роду. У працях [15] – [17] застосовано явні та неявні схеми методу скінченних різниць для дослідження рівнянь тепломасоперенесення, вологоперенесення та в'язкопружного деформування з похідними дробового порядку за часом та граничними умовами третього роду. Побудовам локально-одномірних схем для рівняння дифузії дробового порядку із граничними умовами третього роду присвячено працю [18].

У цій роботі використано метод скінченних різниць для знаходження розв'язку диференціальних рівнянь у частинних похідних із дробовим порядком за часом та просторовими координатами та граничними умовами третього роду.

Постановка задач. Одновимірна математична модель теплообмінних процесів описується диференціальним рівнянням у частинних похідних із дробовим порядком за часом t та просторовою координатою x

$$c\rho\,\frac{\partial^{\alpha} u(t,x)}{\partial t^{\alpha}} = \lambda_1\,\frac{\partial^{\beta} u(t,x)}{\partial x^{\beta}} + f(t,x), \qquad (1)$$

із початковою умовою

$$u(0,x) = \varphi(x), \qquad (2)$$

та граничними умовами третього роду

$$\lambda_1 \frac{\partial^\gamma u(t,0)}{\partial x^\gamma} = A_0\left(u(t,0) - U_0\right),$$
$$\lambda_1 \frac{\partial^\gamma u(t,a)}{\partial x^\gamma} = A_a\left(u(t,a) - U_a\right), \qquad (3)$$

де $(t,x) \in D$, $D = [0,T] \times [0,a]$, $u(t,x)$ - шукана функція, $f(t,x), \varphi(t,x)$ - задані функції, c - питома теплоємність, ρ - густина, λ_1, A_0, A_a - коефіцієнти теплопровідності та теплообміну, U_0, U_a - значення температури середовища, α - дробовий порядок похідної за часом, β, γ - дробові показники похідної за просторовими координатами.

Двовимірна математична модель теплообмінних процесів описується диференціальним рівнянням у частинних похідних із дробовим порядком за часом t та просторовими координатами x та y

$$c\rho \frac{\partial^\alpha u(t,x,y)}{\partial t^\alpha} = \lambda_1 \frac{\partial^\beta u(t,x,y)}{\partial x^\beta} + \lambda_2 \frac{\partial^\beta u(t,x,y)}{\partial y^\beta} + g(t,x,y), \qquad (4)$$

із початковою умовою

$$u(0,x,y) = \psi(x,y), \qquad (5)$$

та граничними умовами третього роду

$$\lambda_1 \frac{\partial^\gamma u(t,0,y)}{\partial x^\gamma} = A_0\left(u(t,0,y) - U_0\right),$$
$$\lambda_1 \frac{\partial^\gamma u(t,a,y)}{\partial x^\gamma} = A_a\left(u(t,a,y) - U_a\right),$$
$$\lambda_2 \frac{\partial^\gamma u(t,x,0)}{\partial y^\gamma} = A_0'\left(u(t,x,0) - U_0'\right), \qquad (6)$$
$$\lambda_2 \frac{\partial^\gamma u(t,x,b)}{\partial y^\gamma} = A_b\left(u(t,x,b) - U_b\right),$$

де $(t,x,y) \in G$, $G = [0,T] \times [0,a] \times [0,b]$, $u(t,x,y)$ - шукана функція, $g(t,x,y)$, $\psi(x,y)$ - задані функції, c - питома теплоємність, ρ - густина, λ_1, λ_2, A_0, A_0', A_a, A_b - коефіцієнти теплопровідності і теплообміну, U_0, U_0', U_a, U_b - значення температури середовища, α - дробовий порядок похідної за часом, β, γ - дробові показники похідної за просторовими координатами.

Дробова похідна порядку γ від функції $f(t)$ визначається формулою [1]:

$$\frac{\partial^\gamma f(t)}{\partial t^\gamma} = \frac{1}{\Gamma(n-\gamma)} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int_0^t \frac{f(t')}{(t-t')^{\gamma-n+1}} dt', \qquad (7)$$

де $0 \le n-1 < \gamma < n$, $(n = 1,2,...)$, $\Gamma(x)$ - гамма-функція.

Чисельний метод розв'язання одновимірної та двовимірної задач.

Розглянемо диференціальні рівняння у частинних похідних із дробовим порядком за часом та просторовими координатами у випадку одновимірної (1) – (3) та двовимірної (4) – (6) задач.

В області D введемо сітку із кроком h_x за просторовою координатою x та τ за часом t

$$\varpi_{h_x,\tau} = \{(t^k, x_n): x_n = nh_x, t^k = k\tau, n = 1,...,N; k = 0,1,...,K\}.$$

В області G введемо сітку із кроком h_x за просторовою координатою x та h_y за просторовою координатою y і τ за часом t

$$\Omega_{h_x,h_y,\tau} = \{(t^k, x_n, y_m): x_n = nh_x, y_m = mh_y, t^k = k\tau, n = 1,...,N; m = 1,...,M; k = 0,1,...,K\}.$$

Використавши формулу Рімана-Ліувілля [2]

$$\left.\frac{\partial^\alpha f(t)}{\partial t^\alpha}\right|_{t^k} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{f(t^k)}{(t^{k+1}-t^k)^\alpha} + \int_{t^k}^{t^{k+1}} \frac{f'(\xi)}{(t^{k+1}-\xi)^\alpha} d\xi\right)$$

різницеву апроксимацію дробової похідної α $(0 < \alpha \le 1)$ на відрізку $[t^k, t^{k+1}]$ можна записати таким чином [14]:

$$\left.\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}\right|_{t^k} \approx \frac{u^{k+1} - \alpha u^k}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha}, \ \tau = t^{k+1} - t^k. \qquad (8)$$

Для дробової похідної β $(1 < \beta \le 2)$ має місце формула Грюнвальда-Летнікова [3]:

$$\frac{\partial^\beta f(t)}{\partial x^\beta} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h_x^\beta} \sum_{j=0}^{\left[\frac{t}{h}\right]} (-1)^j \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta-j+1)} f(x-j+1),$$

де $h_x = x_{n+1} - x_n$, $[x]$ - ціла частина x.

Тоді різницева апроксимація в рівняннях (1), (4) дробової похідної β за просторовою координатою x матиме вигляд [13]:

$$\left.\frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta}\right|_{x_n} \approx \frac{1}{h_x^\beta} \sum_{i=0}^{n} q_i u_{n-i+1}, \qquad (9)$$

де $q_0 = 1, q_i = (-1)^i \frac{\beta(\beta-1)...(\beta-i+1)}{i!}$.

Аналогічно можна записати різницеву апроксимацію для просторової координати y у рівнянні (4):

$$\left.\frac{\partial^\beta u}{\partial y^\beta}\right|_{y_m} \approx \frac{1}{h_y^\beta} \sum_{i=0}^{m} q_i u_{m-i+1}, \ h_y = y_{m+1} - y_m. \qquad (10)$$

Використавши співвідношення (8), (9) запишемо явну (11), (13), (14) та неявну (12) – (14) схеми для задачі чисельного розв'язання (1) – (3) :

$$c\rho\,\frac{u_n^{k+1}-\alpha u_n^k}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha}=\frac{\lambda_1}{h_x^\beta}\sum_{i=0}^{n}q_i u_{n-i+1}^k+f_n^k, \quad (11)$$

$$c\rho\,\frac{u_n^{k+1}-\alpha u_n^k}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha}=\frac{\lambda_1}{h_x^\beta}\sum_{i=0}^{n}q_i u_{n-i+1}^{k+1}+f_n^{k+1}, \quad (12)$$

$$\begin{gathered}\lambda_1\,\frac{u_2^k-\gamma u_1^k}{\Gamma(2-\gamma)h_x^\gamma}=A_0\left(u_1^k-U_0\right),\\ \lambda_1\,\frac{u_N^k-\gamma u_{N-1}^k}{\Gamma(2-\gamma)h_x^\gamma}=A_a\left(u_N^k-U_a\right),\end{gathered} \quad (13)$$

$$u_n^0=\varphi_n\,. \quad (14)$$

Аналогічно, використовуючи вирази для апроксимації (8) – (10) можна записати явну (15), (17), (18) та неявну (16) – (18) схеми для розв'язання задачі (4) – (6):

$$\begin{gathered}c\rho\,\frac{u_{n,m}^{k+1}-\alpha u_{n,m}^k}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha}=\frac{\lambda_1}{h_x^\beta}\sum_{i=0}^{n}q_i u_{n-i+1,m}^k+\\ +\frac{\lambda_2}{h_y^\beta}\sum_{i=0}^{m}q_i u_{n,m-i+1}^k+g_{n,m}^k,\end{gathered} \quad (15)$$

$$\begin{gathered}c\rho\,\frac{u_{n,m}^{k+1}-\alpha u_{n,m}^k}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha}=\frac{\lambda_1}{h_x^\beta}\sum_{i=0}^{n}q_i u_{n-i+1,m}^{k+1}\\ +\frac{\lambda_2}{h_y^\beta}\sum_{i=0}^{m}q_i u_{n,m-i+1}^{k+1}+g_{n,m}^{k+1},\end{gathered} \quad (16)$$

$$\begin{gathered}\lambda_1\,\frac{u_{2,m}^k-\gamma u_{1,m}^k}{\Gamma(2-\gamma)h_x^\gamma}=A_0\left(u_{1,m}^k-U_0\right),\\ \lambda_1\,\frac{u_{N,m}^k-\gamma u_{N-1,m}^k}{\Gamma(2-\gamma)h_x^\gamma}=A_a\left(u_{N,m}^k-U_a\right),\\ \lambda_2\,\frac{u_{n,2}^k-\gamma u_{n,1}^k}{\Gamma(2-\gamma)h_y^\gamma}=A_0{}'\left(u_{n,1}^k-U_0{}'\right),\\ \lambda_2\,\frac{u_{n,M}^k-\gamma u_{n,M-1}^k}{\Gamma(2-\gamma)h_y^\gamma}=A_b\left(u_{n,M}^k-U_b\right),\end{gathered} \quad (17)$$

$$u_{n,m}^0=\varphi_{n,m}\,. \quad (18)$$

Зауважимо, що неявна схема безумовно стійка. У випадку явної схеми стійкість має місце лише тоді, коли визначені кроки за просторовими координатами і за часом.

У випадку одновимірної нестаціонарної задачі (1) – (3) стійкість явної схеми має місце [14], коли задовольняється умова

$$\frac{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha}{h_x^\beta}\le\frac{\alpha c\rho}{\beta\lambda_1}\,. \quad (19)$$

Для двовимірної нестаціонарної задачі (4) – (6) нерівність [13]

$$\tau^\alpha\left(\frac{\lambda_1}{c\rho h_x^\beta}+\frac{\lambda_2}{c\rho h_y^\beta}\right)\le\frac{\alpha+1}{(2+\beta)\Gamma(2-\alpha)} \quad (20)$$

визначає умову стійкості явної схеми (15), (17), (18).

Зауважимо, що розглянуто випадок, коли на стійкість систем не впливає значення коефіцієнта γ $(0<\gamma\le 1)$.

Система лінійних алгебраїчних рівнянь для неявної схеми (12) – (14) в матричній формі матиме вигляд:

$$AU^{k+1}+\alpha U^k=-\frac{Zh_x^\beta}{\lambda_1}f^{k+1},\ k=0,1,\ldots,K-1, \quad (21)$$

де

$$A=\begin{pmatrix} C_1+\gamma & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ Zq_2 & (Zq_1-1) & Zq_0 & 0 & \ldots & 0\\ Zq_3 & Zq_2 & (Zq_1-1) & Zq_0 & \ldots & 0\\ & & \ldots & & & \\ Zq_{N-1} & Zq_{N-2} & Zq_{N-3} & \ldots & (Zq_1-1) & Zq_0\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \gamma & C_N-1\end{pmatrix}$$

$$f^{k+1}=[-\frac{C_1U_0\lambda_1}{Zh_x^\beta},f_2^{k+1},f_3^{k+1}\ldots,f_{N-1}^{k+1},-\frac{C_NU_a\lambda_1}{Zh_x^\beta}]^T,$$

$$U^{k+1}=[u_1^{k+1},u_2^{k+1},\ldots,u_{N-1}^{k+1},u_N^{k+1}]^T,$$

$$U^k=[0,u_2^k,\ldots,u_{N-1}^k,0]^T,\ Z=\frac{\lambda_1\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha}{c\rho h_x^\beta},$$

$$C_N=\frac{Aa}{\lambda_1}\Gamma(2-\gamma)h_x^\gamma,\ C_1=\frac{A_0}{\lambda_1}\Gamma(2-\gamma)h_x^\gamma\,.$$

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь для неявної різницевої схеми (16) – (18) знайдено шляхом розбиття переходу з k-го часового кроку на $(k+1)$-й на два півкроки [13]. В результаті отримаємо дві системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$A'U^{k+1/2}+\alpha U_m^k=0, \quad (22)$$

$$A''U^{k+1}+\alpha U_n^k=-\frac{Zh_x^\beta}{\lambda_1}g^{k+1}, \quad (23)$$

де $U^{k+1/2}=[u_{n,1}^{k+1/2},u_{n,2}^{k+1/2},\ldots,u_{n,M-1}^{k+1/2},u_{n,M}^{k+1/2}]^T,$

$$U^{k+1}=[u_{1,m}^{k+1},u_{2,m}^{k+1},\ldots,u_{N-1,m}^{k+1},u_{N,m}^{k+1}]^T,$$

$$U_n^k=[0,u_{2,m}^k,\ldots,u_{N-1,m}^k,0]^T,$$

$$U_m^k = [0, u_{n,2}^k, ..., u_{n,M-1}^k, 0]^T,$$

$$g^{k+1} = [-\frac{C_1 U_0 \lambda_1}{Z h_x^\beta}, g_{2,m}^{k+1}, g_{3,m}^{k+1} ..., g_{N-1,m}^{k+1}, -\frac{C_N U_a \lambda_1}{Z h_x^\beta}]^T.$$

Матриця $A'' = A$, а матриця A' матиме вигляд:

$$\begin{pmatrix} C_1' + \gamma & -1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ Wq_2 & (Wq_1 - 1) & Wq_0 & 0 & ... & 0 \\ Wq_3 & Wq_2 & (Wq_1 - 1) & Wq_0 & ... & 0 \\ & & ... & & & \\ Wq_{N-1} & Wq_{N-2} & Wq_{N-3} & ... & (Wq_1 - 1) & Wq_0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & \gamma & C_M' - 1 \end{pmatrix}$$

де $C_1' = \frac{A_0}{\lambda_2} \Gamma(2-\gamma) h_y^\gamma$, $C_M' = \frac{A_b}{\lambda_2} \Gamma(2-\gamma) h_y^\gamma$,

$$W = \frac{\lambda_2 \Gamma(2-\alpha) \tau^\alpha}{c \rho h_y^\beta}.$$

Розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь (20) знаходиться методом прогонки для $y = const$, а системи (21) для $x = const$.

Висновок. Розглянуто одновимірну та двовимірну математичні моделі теплообмінних процесів, для опису яких використовувалися диференціальні рівняння у частинних похідних із дробовим порядком за часом та просторовими координатами, та граничні умови третього роду.

Використовуючи вирази, що описують різницеві апроксимації похідних дробового поряду, які ґрунтуються на формулах Рімана – Ліувілля та Грюнвальда – Летнікова, розроблені явні та неявні різницеві схеми для побудованих одновимірної та двовимірної задач. Для неявних схем виписано систему лінійних алгебраїчних рівнянь в матричній формі. Наведені результати можуть бути використані для подальшої програмної реалізації.

Список літератури

[1]. Учайкин В. В. Метод дробных производных / В. В. Учайкин. – Ульяновск: Издательство «Артишок», 2008. – 512с.

[2]. Podlubny I. Fractional Differential Equations / I. Podlubny, vol. 198 of Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, San Diego, Calif, USA, 1999. – 340s.

[3]. Васильев В.В. Дробное исчисление и аппроксимационные методи в моделировании динамических систем. Научное издание / В.В. Васильев, Л.А. Симак. – Киев, НАН Украины, 2008. – 256с.

[4]. Фильштинський Л. А. Одновимірна початково – крайова задача для дробово – диференціального рівняння теплопровідності / Л. А. Фильштинський, Т. В. Мукомел, Т. А.Кірічок//Вісник Запорізького національного університету. – 2010. - №1. – С. 113-118.

[5]. Мейланов Р. П. Уравнение теплопроводности для сред с фрактальной структурой / Р. П. Мейланов, М. Р. Шабанова//Современные наукоемкие технологии. – 2007. - №8. – С.84-85.

[6]. Мейланов Р. П. Особенности решения уравнения теплопереноса в производных дробного порядка / Р. П. Мейланов, М. Р. Шабанова//Журнал технической физики. – 2011. – том 8. – вып. 7. – С.1-6.

[7]. Дацко Б.Й. Математичне моделювання нелінійної динаміки в бістабільних системах реакції-дифузії з дробовими похідними / Б.Й. Дацко // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2011. – Т.54, № 2. – С. 163-172.

[8]. Datsko B.Y., Gafiychuk V.V. Different types of instabilities and complex dynamics in reaction-diffusion systems with fractional derivatives // Computational and Nonlinear Dynamics. – 2012. – DOI No: CND-09-1119.

[9]. Povstenko Y. Fractional Heat Conduction in an Infinite Medium with a Spherical Inclusion // Entropy. Vol.15 (October 2013) p. 4122 – 4133.

[10]. Povstenko Y. Fundamental solutions to time-fractional heat conduction equations in two joint half-lines // Cent. Eur. J. Fhys. - 11(10), 2013 p. 1284-1294.

[11]. П'янило Я. Д., Васюник М., Васюник І. Використання многочленів Лагерра до спектрального методу розв'язання рівнянь дробових похідних за часом // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2013, №17. С. 163-168.

[12]. П'янило Я. Д., Васюник М., Васюник І. Дослідження спектрального методу розв'язання рівнянь у дробових похідних за часом у базисі многочленів Лагерра // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2013б №18. С. 173-180.

[13]. Бейбалаев В. Д. Численный метод решения краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности с производными дробного порядка / В. Д. Бейбалаев, М. Р. Шабанова // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2010. - №5 (21). – С.244-251.

[14]. Бейбалаев В. Д. Математическая модель теплопереноса в середах с фрактальной структурой / В. Д. Бейбалаев // Математическое моделирование. – 2009. – том 21. - №5. – С.55-62.

[15]. Соколовський Я. І. Математична модель теплового перенесення та напружено-деформівного стану у капілярно-пористих матеріалах з фрактальною структурою / Соколовський Я. І., Шиманський В. М. // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології, 2012. – Вип.16. – С.133-141.

[16]. Соколовський Я. І. Двовимірна математична модель вологоперенесення у капілярно-пористих матеріалах із фрактальною структурою / Соколовський Я. І., Шиманський В. М. // Інформаційні технології галузі: Науковий вісник НЛТУ України, 2011. – Вип.21.2. – С.341-347.

[17]. Соколовський Я. І. Фрактальна модель тепло і масоперенесення у капілярнопористих матеріалах / Соколовський Я. І., Шиманський В. М. // Вісник національного університету «Львівська політехніка»: Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – Львів: НУ «ЛП», 2011. - №694. – С.424-428.

[18]. Баззаев А.К. Локально-одномерная разностная схема для III-й краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка в двумерной области. // Сборник научных трудов Северо-Осетинского отделения Академии наук высшей школы Российской Федерации, 2008, №6, С. 134−139.

[19]. Баззаев А. К. Локально-одномерная схема для уравнения теплопроводности с краевыми условиями третьего рода. // Владикавказкий математический журнал, 2011, Т.13, Выпуск 1, С. 3-12.

[20]. Баззаев А.К. Численное решение третьей краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка методом суммарной аппроксимации. Исследования по дифференциальным уравнениям и математическому моделированию. Владикавказ: ВНЦ РАН, 2008— 376 с.