ISSN 9125 0912. ВІСНИК ДНІПРОПЕТРОВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ.
СЕРІЯ «ГЕОЛОГІЯ. ГЕОГРАФІЯ». 2010. ВИП. 12. С. 80–84

ГІДРОГЕОЛОГІЯ ТА ІНЖЕНЕРНА ГЕОЛОГІЯ

УДК 556.332.4

Г. П. Евграшкина

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СОЛЕПЕРЕНОСА В ЗОНЕ АЭРАЦИИ ТЕХНОГЕННО НАРУШЕННЫХ ТЕРРИТОРИЙ

Математичні моделі переносу речовини в умовах техногенезу побудовані на основі теорії фізико-хімічної гідродинаміки пористих середовищ. Процеси масопереносу описуються рівняннями математичної фізики другого порядку в частинних похідних. Запропоновано новий підхід до розв'язання двох видів актуальних задач солепереносу у зоні аерації.

Ключові слова: масоперенос, зона аерації, математична модель, метод Джонсона.

Математические модели переноса вещества в условиях техногенеза построены на основе теории физико-химической гидродинамики пористых сред. Процессы массопереноса описываются уравнениями математической физики второго порядка в частных производных. Предложен новый подход к решению двух видов актуальных задач солепереноса в зоне аэрации.

Ключевые слова: массоперенос, зона аэрации, математическая модель, метод Джонсона.

Mathematical models of the substance transfer in conditions of technogenesis were built on the base of theory of the physical-chemical hydrodynamics of the porous media. The processes of the mass transfer are describing with equations mathematical physics of the second order in the partial derivatives. New approach for decision of two kinds of actuall tasks was offered.

Key words: mass transfer, aeration zone, mathematical models, method Johnson.

Постановка проблемы. Одним из негативных факторов воздействия горнодобывающей промышленности на гидрогеологические и почвенно-мелиоративные условия техногенно нарушенных территорий является развитие процессов вторичного засоления на рекультивированных землях [2] и в зоне влияния хвостохранилищ [3]. Для научного обоснования и разработки комплекса природоохранных мероприятий необходимы прогнозные расчеты с высокой степенью достоверности исходных математических моделей.

Изложение основного материала. К числу определяющих факторов повышения точности прогнозных гидрогеологических расчетов относится выбор метода решения поставленной задачи. В зоне аэрации преобладает вертикальный солеперенос, который для нисходящего потока влаги и солей достаточно точно описывается уравнением

$$D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - V\frac{\partial C}{\partial x} = m\frac{\partial C}{\partial t},$$

где D – коэффициент гидродисперсии, м^2/сут; C – текущая засоленность пород зоны аэрации, %; V – скорость вертикального влагопереноса, м/сут; m – объёмная влажность, доли единицы; x – пространственная координата, м; t – временная координата, сут.

Для восходящего движения влаги и солей, направленного от уровня грунтовых вод к поверхности земли перед параметром V ставится знак «+». Уравнение (1) имеет аналитические решение для ряда наиболее простых задач солепереноса [1]. Уравнение (1) в модификации восходящего движения аналитического решения не имеет. Поэтому исследование процессов вторичного засоления в неустановившемся режиме выполняется на конечно-разностных моделях, как это показано в [3]. Наличие в уравнении (1) первой и второй производных существенно снижает точность конечно-разностного решения. Уравнение (1), аппроксимированное по В. Джонсону [5] содержит первую производную в неявном виде, что повышает точность конечного результата.

Преобразование выполнено автором следующим образом.

Записываем (1) в виде:

$$\frac{C_{i-1}^{\tau}-2C_i^{\tau}+C_{i+1}^{\tau}}{(\Delta x)^2}-P\frac{C_{i-1}^{\tau}-C_{i+1}^{\tau}}{2\Delta x}=\frac{m}{D}\frac{C_i^{\tau+1}-C_i^{\tau}}{\Delta t},\ P=\frac{V}{D}. \tag{2}$$

Каждое слагаемое представляем отдельно:

$$\frac{C_{i-1}^{\tau}}{(\Delta x)^2}-\frac{C_i^{\tau}}{(\Delta x)^2}-\frac{C_i^{\tau}}{(\Delta x)^2}+\frac{C_{i+1}^{\tau}}{(\Delta x)^2}-\frac{PC_{i-1}^{\tau}}{2\Delta x}+\frac{PC_{i+1}^{\tau}}{2\Delta x}=\frac{m\left(C_i^{\tau+1}-C_i^{\tau}\right)}{D\Delta t}.$$

В левой части (3) прибавляем и отнимаем $\frac{PC_i^{\tau}}{2\Delta x}$ и записываем его в виде:

$$\left(C_{i-1}^{\tau}-C_i^{\tau}\right)\left(\frac{1}{(\Delta x)^2}-\frac{P}{2\Delta x}\right)-\left(C_i^{\tau}-C_{i+1}^{\tau}\right)\left(\frac{1}{(\Delta x)^2}+\frac{P}{2\Delta x}\right)=\frac{m\left(C_i^{\tau+1}-C_i^{\tau}\right)}{D\Delta t}. \tag{4}$$

Все слагаемые (4) умножаем на D и на Δt, делим на m и записываем в виде разности дробей выражение для искомой величины $C_i^{\tau+1}$ для нисходящего потока влаги и солей

$$C_i^{\tau+1}=\frac{\dfrac{\left(C_{i-1}^{\tau}-C_i^{\tau}\right)\Delta tD}{m}}{\dfrac{1}{(\Delta x)^2}-\dfrac{P}{2\Delta x}}-\frac{\dfrac{\left(C_i^{\tau}-C_{i+1}^{\tau}\right)\Delta tD}{m}}{\dfrac{1}{(\Delta x)^2}+\dfrac{P}{2\Delta x}}+C_i^{\tau} \tag{5}$$

а также для восходящего

$$C_i^{\tau+1}=\frac{\dfrac{\left(C_{i-1}^{\tau}-C_i^{\tau}\right)\Delta tD}{m}}{\dfrac{1}{(\Delta x)^2}+\dfrac{P}{2\Delta x}}-\frac{\dfrac{\left(C_i^{\tau}-C_{i+1}^{\tau}\right)\Delta tD}{m}}{\dfrac{1}{(\Delta x)^2}-\dfrac{P}{2\Delta x}}+C_i^{\tau} \tag{6}$$

Для таких явных конечно-разностных схем остаются в силе критерии устойчивости

$$\Delta x\le\frac{2D}{V},\ \Delta t\le\frac{(\Delta x)^2}{2D}. \tag{7}$$

В выражениях (5), (6) и (7) приняты следующие обозначения: C_{i+1}, C_i^{τ}, C_{i+1}^{τ}, $C_i^{\tau+1}$ – текущая засолённость в расчётных точках, %; *i-1, i, i+1* – пространственные индексы расчетных точек; *τ, τ+1* – временные индексы расчетных точек; *Δx* – шаг по пространственной координате, м; *Δt* – шаг по временной координате, сут.

Остальные обозначения приведены ранее.

Для расчетных точек 0, 1, 2 (6) примет вид:

$$C_1^{\tau+1} = \frac{\left(C_0 - C_1^{\tau}\right)\Delta t D}{\dfrac{m}{\dfrac{1}{(\Delta x)^2}+\dfrac{P}{2\Delta x}}} - \frac{\left(C_1^{\tau} - C_2^{\tau}\right)\Delta t D}{\dfrac{m}{\dfrac{1}{(\Delta x)^2}-\dfrac{P}{2\Delta x}}} + C_1^{\tau} \qquad (8)$$

На верхней границе исследуемой области, поверхность земли $x=0$, (рис. 1а) задаётся граничное условие III рода.

$$x=0 \; V\left(C_n - C_0\right) = D\frac{\partial C}{\partial x} \qquad\qquad x=0 \; C_г V = D\frac{\partial C}{\partial x}.$$

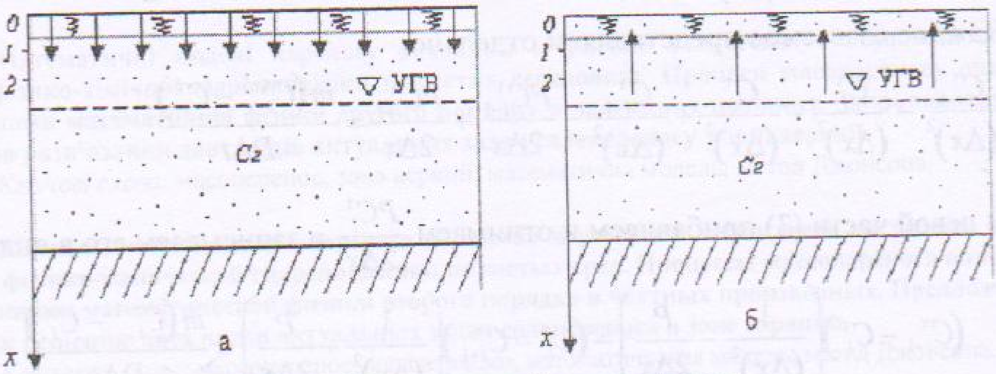

Рис. 1. Миграция солей в зоне аэрации:

а – нисходящий поток влаги и солей; б – восходящий поток, испарительный режим грунтовых вод

Для нисходящего потока влаги и солей, направленного от поверхности земли к уровню грунтовых вод оно носит название условие Данквертса-Бреннера и приводится в частности [1]. Для испарительного режима граничное условие III рода предложено автором в дифференциальной и конечно-разностной формах:

$$VC_г = D\frac{\partial C}{\partial x}, \; VC_г = D\frac{C_0^{\tau} - C_1^{\tau}}{\Delta x}. \qquad (9)$$

В (9) – (10) приняты такие обозначения: V – скорость результирующего восходящего потока влаги, м/сут; $C_г$ – минерализация подземных вод, выраженная в % плотности сухого гранта, %; C_0^{τ}, C_1^{τ}, C_2^{τ}, $C_1^{\tau+1}$ – засолённость в расчетных точках 0, 1, 2, %.

Остальные обозначения приведены ранее.

Первый этап прогнозного расчета – это согласование граничного условия (9) с уравнением (8). Оно выполняется, исходя из требования, что правая часть (9) должна быть такой же, как первое слагаемое левой части (8). Это достигается умножением обеих частей (9) на Δx и Δt, делением на D и $\dfrac{m}{\dfrac{1}{(\Delta x)^2}+\dfrac{P}{2\Delta x}}$.

После приведения (9) к виду

$$\frac{\Delta t \cdot \Delta x V C_г}{\dfrac{m}{\dfrac{1}{(\Delta x)^2}+\dfrac{P}{2\Delta x}}} = \frac{D\left(C_0^{\tau} - C_1^{\tau}\right)\cdot \Delta t}{\dfrac{m}{\dfrac{1}{(\Delta x)^2}+\dfrac{P}{2\Delta x}}} \qquad (10)$$

...няем первое слагаемое уравнения (8) на первое слагаемое уравнения (10). В результате преобразования (8) приобретает окончательный вид:

$$C_1^{\tau+1} = \frac{\dfrac{\Delta x V C_z \Delta t}{m}}{\dfrac{1}{(\Delta x)^2} + \dfrac{P}{2\Delta x}} - \frac{\dfrac{D\left(C_1^{\tau} - C_2^{\tau}\right)\Delta t}{m}}{\dfrac{1}{(\Delta x)^2} + \dfrac{P}{2\Delta x}} + C_1^{\tau}. \qquad (11)$$

Как видно из выражения (11) сначала рассчитывается засолённость в точке 1, расположенной на расстоянии Δx, от поверхности земли. Засолённость C_0 на поверхности земли x=0 находим из условия (9)

$$VC_z = \frac{D\left(C_0^{\tau+1} - C_1^{\tau+1}\right)}{\Delta x}, \quad \frac{VC_z \Delta x}{D} = C_0^{\tau+1} - C_1^{\tau+1}, \quad C_0^{\tau+1} = \frac{VC_z \Delta x}{D} + C_1^{\tau+1}. \qquad (12)$$

Для расчета засолённости в точке 2 $C_2^{\tau+1}$ составляем следующее конечно-разностное уравнение

$$\frac{C_1^{\tau} - C_2^{\tau}}{\dfrac{1}{(\Delta x)^2} + \dfrac{P}{2\Delta x}} - \frac{C_2^{\tau} - C_3^{\tau}}{\dfrac{1}{(\Delta x)^2} + \dfrac{P}{2\Delta x}} = \frac{m}{D}\frac{C_2^{\tau+1} - C_2^{\tau}}{\Delta t}. \qquad (13)$$

В случае применения неявной схемы согласованию подлежат все уравнения системы последовательно сверху вниз путем умножения знаменателя каждого последующего уравнения на коэффициент согласования.

$$K = \frac{\dfrac{1}{\Delta x^2} + \dfrac{P}{2\Delta x}}{\dfrac{1}{\left(\Delta x^2\right)} - \dfrac{P}{2\Delta x}}. \qquad (14)$$

Этот метод применен автором для прогноза солевого режима орошаемых земель Фрунзенского массива [4]. Для оценки его точности предварительно решались тестовые задачи, имеющие аналитические решения. Расхождения не превышали 1 %. В настоящее время решена задача по количественной оценке развития вторичного засоления на рекультивированных шахтных отвалах свободного зарастания в Западном Донбассе.

Выводы и перспективы дальнейших исследований

1. Процессы переноса солей в зоне аэрации в условиях техногенного загрязнения почв и пород зоны аэрации с достаточной, для прогнозных практических расчетов, точностью описываются одномерными уравнениями движения и сохранения массы вещества с постоянными коэффициентами.

2. Для всех видов прогнозных задач, не имеющих аналитических решений, целесообразно применять конечно-разностный метод В. Джонсона.

Перспективы дальнейших исследований – это использование в методе В. Джонсона неявных схем для выявления их преимуществ по сравнению с явными, если таковые окажутся. Кроме того, метод В. Джонсона ещё никогда не применялся для решения плановых гидрогеологических задач.

Библиографические ссылки

1. **Аверьянов С. Ф.** Борьба с засоленим орошаемых земель / С. Ф. Аверьянов. – М., 1978. – 240 с.

ISSN 9125 0912. ВІСНИК ДНІПРОПЕТРОВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ.
СЕРІЯ «ГЕОЛОГІЯ. ГЕОГРАФІЯ». 2010. ВИП. 12. С. 84–91

2. **Евграшкина Г. П.** Влияние горнодобывающей промышленности на гидрогеологические и почвенно-мелиоративные условия территорий / Г. П. Евграшкина. – Д., 2003. – 200 с.
3. **Евграшкина Г. П.** Прогноз развития процессов вторичного засоления почвогрунтов в районах горнодобывающей промышленности / Г. П. Евграшкина, Н. П. Шерстюк // Вісник Дніпропетр. ун-ту Геологія. Географія. – 2009. – Т. 17. – С. 32–37.
4. **Евграшкина Г. П.** Прогноз солевого режима почв и грунтов зоны аэрации Фрунзенского орошаемого массива методами математического моделирования / Г. П. Евграшкина, М. М. Коппель / Мелиорация и водное хозяйство. – К., 1978. – Вып. 43. – С. 56–63.
5. **Карплюс У**. Моделирующие устройства для решения задач теории поля / У. Карплюс. – М., 1962. – 487 с.

Надійшло до редколегії 17.12.09

УДК 624.131

Т. П. Мокрицкая

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

К ВОПРОСУ О МОДЕЛЯХ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ СВОЙСТВ ГРУНТОВ ГОРОДСКИХ ТЕРРИТОРИЙ

Наведено результати моделювання просторового розподілу властивостей грунтів у зоні впливу безлічі джерел в умовах міських територій. Отримано лінійні регресійні рівняння зв'язків класифікаційнихфізичних показників властивостей.

Ключові слова: просторовий розподіл, грунт, регресійна модель.

Приведены результаты моделирования пространственного распределения свойств грунтов в зоне воздействия множества источников в условиях городских территорий. Получены линейные регрессионные уравнения свіязей классификационных и физических показателей свойств.

Ключевые слова: пространственное распределение, грунт, регрессионная модель.

The results of modeling the spatial distribution of soil properties in the area affected a variety of sources in urban areas. Linear regression equations свіязей classification and physical performance properties.

Key words: spatial distribution, soil, regression model.

Введение. Возможности создания моделей, описывающих распределение физических. физико-химических и механических свойств инженерно-геологических тел в пространстве (частный случай – по глубине) ограничены объективными и субъективными причинами [1–3].

Необходимость математического описания состояния сложной динамической системы, обладающей фундаментальными свойствами (изменчивость, организованность, дискретность), в практических решениях подчинена требованиям об оптимальном соотношении между качеством информации и стоимостью. Как результат, выводы о свойствах тел разного ранга не всегда математически корректны, в том числе из-за разобщенности и малочисленности экспериментальных данных. Требования к количеству и качеству информации инженерно-геологического характера, методикам обработки результатов лабораторных определений неоднократно пересматривались [5; 6]. Выполнение требований о достоверности и достаточности данных не сни-