

Математика и језик

Данијела Митровић

Универзитет у Источном Сарајеву, Педагошки факултет Бијељина,
76300 Бијељина, Семберских ратара б.б., Босна и Херцегобина
e-mail: dani88@hotmail.rs

Сажетак. У овом текст је изложен један поглед на везу математике, наставе математике и употребног језика.

Кључне ријечи и фразе: *математике, језик*

Abstract. In this article a connection between mathematics and language is presented.

Key words and phrases: *mathematics, language*

Увод

Математика потиче од грчке речи и значи учење. Она је формална и егзактна наука која је настала изучавањем фигура и рачунањем с бројевима. Иако не постоји општеприхваћена дефиниција математике, под математиком се у ширем смислу подразумева да је она наука о количини, структури, простору и промени. Такође не постоји ни опште прихваћена дефиниција језика, при чему се подразумева да је језик систем гестикације, граматике, знакова, гласова, симбола или речи, који се користи за комуникацију, и пренос идеја, значења и мисли. Математика и рачунарске науке користе вештачке ентитете зване формалним језицима (укључујући програмске језике и језике за означавање).

Настава математике је сложен процес. На њену успешност утичу многи фактори. Неки од њих односе се на важна питања језика наставе математике. Језик наставе математике сложен је сам по себи, јер садржи две компоненте: говорни језик и математички језик. Математика се сусреће и користи у свим облицима живота и рада, и сасвим је оправдано тврдити да су математичка знања потребна сваком човеку. Математичко образовање треба да почне у предшколском узрасту. Математичко образовање укључује проучавање компјутера, компјутерских технологија и савремених информационих могућности, као и математичких дисциплина који су основа за ново информатичко друштво.

Циљ наставе математике је учење усмене и писмене математичке речи са свим њеним својствима, као што су изражајност, једноставност, језгровитост, јасноћа, краткоћа, пуноћа, сажетост, тачност. У овом раду направљен је увид нека истраживања повезаности математике и језика, карактеристикама језика и математике, формалном језику математике.

Досадашња истраживања

Математика је интернационална наука. Математички језик, за разлику од националних језика је међународни језик. Математика је увек била, јесте и биће неодвојиви и битан део људске културе. Она је по мишљењу многих научника, кључна у намери човечанства да упозна и разуме природу која га окружује, а и у друштво у којем живи и ради. Она је база научно-техничког и технолошког прогреса. У последње време математици се приписује један нови квалитет:

математичко образовање је важна компонента у развоју личности. Математичко образовање је богатство на који има право сваки човек, а друштвена је обавеза (држава и међународних организација) да обезбеде могућност свакој особи да се користи тим богатством.

У истраживању математичке едукације користе се властити теоријски појмови, оквири, модели анализа и методологије, али и посуђене из других научних домена (тј. математичка психологија користи алат психолошког истраживања, социјална интеракцијске алате социолошких истраживања, итд.). Проучавајући резултат истраживања, када су теоријски појмови и теоријски алати у питању, могу се установити бар две важне појаве: коришћење једног термина са различитим значењима и изградња сличних модела које истраживачи користе паралелно. Иако би се могло тврдити да су ти феномени очекивани, због сложености питања о учењу математике, очигледно је да коришћење недовољно прецизно детерминисаних термина проблематично у истраживању математичког образовања. (Миловановић, Романо, Тодић, 2011).

Према истраживању Ричарда Барвела, Универзитета у Отави, Канади (Barwell, 2013), математика се не може разумети само формалним или неформалним језиком, већ су за разумевање исте потребно разумевање обе врсте језика и формалног и неформалног.

Европска асоцијација истраживача математичког образовања (ERME) основана је 1998. године. Једна од радних група те асоцијације, под насловом 'From a study of teaching practice to issues of teacher education', посвећена је конекцији појавама у математичкој учионици и истраживању наставничке праксе (CERME 1(1998), WG 3; CERME 2(2001), WG 3; CERME 3(2003), WG 12; CERME 4(2005), WG 12; CERME 5(2007), WG 12; CERME 6(2009), WG 10; CERME 7(2011), WG 17).

На овим конференцијама су учествовали истраживачи из читаве Европе где су подељена мишљења тих људи из различитих средина о проблемима који се јављају у настави математике. На тим конференцијама, у облику завршног извештаја о активностима ових радних група истраживача математичког образовања, истицана су питања и проблеми о којима се водила расправа али, исто тако, и питања и проблеми погодни за расправе на наредној конференцији. Централно питање у дискусијама о учитељском математичком образовању је 'пракса' (Kraimer and Goffree, 1998). Често, говорећи о 'пракси подучавања математике', о 'пракси у математичкој учионици', или о 'пракси реализатора наставе математике' понекад се мисли на исту ствар а понекад на различите ентитете. Веза између учитељске праксе у математичкој учионици и његовог теоријског разумевања процеса подучавања и учења математике је предмет истраживачког интереса како истраживача математичког образовања, тако и тих реализатора наставе математике.

На петој конференцији CERME 5(2007), у радној групи WG 12 (From a study of teaching practices to issues in teacher education) било је 36. истраживача (16. различитих националности) који су учествовали на седницама, које су биле организоване на основу четири теме, у домену образовања наставника. На овој конференцији се дискутовало о математици и језику и са којим проблемима се сусрећу професори математике приликом преношења знања ученицима.

Почевши од четврте конференције CERME 4(2005), Европска асоцијација истраживача математичког образовања посвећује дужну пажњу вези између математике и језика. На пример, CERME 4(2005) – 13 текстова; CERME 5(2007) – 24 текста, CERME 6(2009) – 22 текста, CERME 7(2011) – 12 текстова, CERME 8(2013) – 23 текста, CERME 9(2015) – 34 текста.

Природни језик се користи приликом сваког објашњавања и разумевања математичког појма. Писани језик математике је једноставан и универзалан тако да се основне функције могу разумети лако, без обзира на говорни језик подручја. На пример ако кажемо три плус два једнако је пет, вероватно особа ако не зна српски језик неће разумети. Али ако покажемо написано $3 + 2 = 5$, ако особа зна основне математичке појмове вероватно ће разумети.

Математика није природни, говорни језик неког подручја као на пример српски, енглески или француски језик. Али математика јесте једна врста језика коју разуме цео свет. Математику је могуће представити као систем знакова и као резултат тога језик. На пример када кажемо „дрво“, човек прво помислити на слику дрвета а потом на биљку која има корен, стабло, лишће, развија се. Исто тако када кажемо „троугао“, слика троугла човек обично помисли на слику троугла, и када види троугао он то разуме. Ово је представљено на следећој слици.



Слика 1. Појам и његова аудитивна слика (Yunus, Oktay, Ahmet, 2004)

Богатство природног језика је у разноврсти смисла које се приписује речима. Људи који уче и предају математику треба прво да знају добро језик. На пример, $2 + 2 = 4$, ова симболична изјава може се манифестовати на различите начине.

- Два плус два је четири.
- Два плус два чини четири.
- Ако томе додамо два до два имамо четири, итд.

Али они морају да користе најприкладније језичке изразе, као и примерима горе, како да користите и природни и математички језик. Многи бројеви из математике се могу користити у функцији придева који описују речи: "Две оловке, или шесто поглавље, итд".

У математици су речи које се на различитим језицима говоре другачије представљене симболима који су разумљиви свима. Пример је дат у следећој табели.

Табела 1. Супротна значења (Yunus, Oktay, Ahmet, 2004)

Веће	Супротно значење	Мање	Супротно значењу у говорном језику
>	Супротно значење	<	Супротно значењу у математичком језику

Говорни језик и језик математике

У данашње време математика није само целокупност чињеница и метода, већ језик за описивање чињеница и метода у различитим подручјима науке и њеној примени. Математички језик настао је као резултат усавршавања неких значајности говорног језика: пуноће, двосмислености и ширине његових изражајних могућности .

Пример : Хомоними и синоними.

(а) Као пример двосмислености могу нам послужити хомоними . То су речи истог облика, али различитих значења, речи које не изражавају појмове једнозначно. Примери: бор, корен, коса, лак, лоза, лук, мина, нота, пара, перо, виле, воз, ...

Карактеристичан је пример реч корен са више значења у свакодневном животу корен биљке, корен зуба, корен живца, корен речи, корен проблема, корен зла и у самој математици корен једначине, квадратни корен, n - ти корен. Употребу хомонима треба избегавати, јер она може довести до нејасноће и неразумевања, а посебно је непожељна у настави. Тако уместо корен једначине треба употребљавати примеренији назив решење једначине.

(б) Као пример речи које показују ширину изражајних могућност језика су синоними. То су различите речи које једнозначно изражавају један те исти појам. Код њих је улога речи позитивна, указује на богатство језика, али и даје јасније и тачније одређење самог појма. Примери: квадрат,

ромб с правим углом - усмерена дужина, вектор – линеарна функција, полином првог степена, квадратна функција, полином другог степена - површина.

Оба језика користе одређене симболе, али се употреба симбола у математичком и говорном језику битно разликује. Употребом симбола у математичком језику постиже се краткоћа. Неправилно разумевање математичког и говорног језика у традиционалној настави често је узрок формалних знања ученика.

Ако наставник математике не пренесе добро знање, ученици неће научити примењивати формални математички апарат, а то значи ни решавати проблеме помоћу тога апарата. Такође ученици неће разумети смисао израза математичког језика и неће знати преводити проблеме који настају ван математике на математички језик.

Погледајмо један пример склада говорног и математичког језика. Пример. Шта је површина?

Мало који би ученик знао одговорити на ово питање. Иако зна! Наиме, људи су одувек мерили површине земљишта. Из тог мерења произашле су неке једноставне искуствене чињенице: Површина је увек ненегативан број.

Ако је неки појам састављен од делова, онда је његова површина једнака збиру површина тих делова. Једнаки појмови имају једнаке површине. Квадрат са страницом дужине 1 има површину једнаку 1. Управо је то знање које је скривено негде у памћењу ученика и треба га само подстаћи.

Математички језик то знање изражава овако:

Дефиниција: Нека је \mathcal{P} скуп свих полигона у равни, укључујући и празан скуп. Површина скупа P ($\in \mathcal{P}$) је пресликавање $p : \mathcal{P} \rightarrow \mathbf{R}$ које има следећа својства:

1) $p(P) \geq 0$ за сваки полигон $P \in \mathcal{P}$.

2) Ако је полигон P збир полигона P_1 и P_2 , онда је

$$p(P_1 + P_2) = p(P_1) + p(P_2).$$

3) Ако су полигони P_1 и P_2 ($\in \mathcal{P}$) подударни, онда су бројеви $p(P_1)$ и $p(P_2)$ једнаки, тј.

$$P_1 \cong P_2 \Rightarrow p(P_1) = p(P_2).$$

4) Постоји бар један квадрат K ($\in \mathcal{P}$) коме је дужина странице једнака 1 такав да је $p(K) = 1$.

Број $p(P)$ назива се *површина полигона* P .

Математички појмови и језик

Правилно разумевање и примена математичких појмова код ученика у наставном процесу су врло важни и захтевају од наставника математике добру припремљеност.

Једна од значајности појма као облика мишљења јесте то што је формирање појма у човековој свести неодвојиво од његовог изражавања речима, записом или симболом. Ова значајност посебно долази до изражаја у математици.

Нужан захтев који треба да задовољи симболика и реч при изражавању датог математичког појма јесу једнозначност, а основни захтеви које треба да испуни његова дефиниција су: минималност садржаја, природност, прикладност и применљивост. Карактеристике дефиниција су следеће:

1. Дефиниција мора бити примерена дефинисаном појму, ни преуска, ни преширока, мора показати суштину појма.
2. Дефиниција треба бити прегледна и сажета.
3. Дефиниција не сме бити изражена сликовитим или на неки други начин двосмисленим језиком.

Процес формирања појмова у настави математике не мора, а врло често и не може бити прецизан и строг. Све зависи од узраста и предзнања ученика. Допуштен је одређен ниво слободе и поједностављења. Међутим поједностављења и слаба употреба језика могу довести до неразумевања појмова.

Уџбеници за математику су углавном писани математичким језиком где се наводе дефиниције, теореме, поједини докази. Али и у истим уџбеницима се користи неформални језик којим су кроз примере објашњени садржаји где се остварује неформална комуникација са читаоцем којом се покушава заинтересовати читалац за градиво.

Формални и неформални језик

Формални језик је скуп речи, то јест коначних слова или симбола. Скуп из кога се ова слова узимају се назива азбуком над којом је језик дефинисан. Формални језик се често дефинише помоћу формалне граматике. Формални језици су чисто синтаксни појам, тако да није обавезно да постоји неко значење повезано са њима. Како би се разликовале речи које припадају језику од произвољних речи над датом азбуком, речи које припадају језику се понекад називају добро-формираним речима.

Формални језици се проучавају у областима логике, рачунарства и лингвистике. Њихова најважнија примена је у прецизном дефинисању синтаксно исправних програма за програмски језик. Грана математике и рачунарства која се бави само синтаксним аспектима таквих језика, то јест њиховим структурним обрасцима се назива теорија формалних језика.

Азбука у контексту формалног језика може да буде било који скуп, мада често има смисла да се користи азбука у уобичајеном смислу речи, или општије скуп карактера. Азбуке су често бесконачне, на пример логика првог реда је често изражена коришћењем азбуке која поред симбола \wedge , \vee , \Rightarrow , \Leftrightarrow , \neg (логичких веза), \forall , \exists (квантификатора) и заграда ((,); [,]; <, >; {, }) садржи и бесконачно пренумерирано много елемената x_0, x_1, x_2, \dots који врше функцију варијабиле /променљивих. Елементи азбуке се називају њеним словима.

Реч над азбуком може да буде било који коначни низ или низ симбола, њених слова. Скуп свих речи над азбуком Σ се обично означава као Σ^* (Клинијева звезда). За било коју азбуку постоји само једна реч дужине 0, празна реч, која се често означава симболима ϵ , ϵ или λ . Конкатенацијом (дописивањем) могу да се комбинују две речи како би дале нову реч, чија је дужина једнака збиру дужина почетних речи. Резултат конкатенације било које речи са празном речју је та иста реч.

У неким применама, посебно у логици, азбука је позната и као речник а речи су познате као формуле или реченице; ово прекида метафору слово / реч и замењује је метафором реч / реченица.

Формални језик \mathcal{L} над азбуком Σ је само подскуп од Σ^* , то јест, скуп речи над азбуком. У рачунарству и математици, који се не баве природним језицима, придев 'формални' се често не користи већ се подразумева.

Иако се теорија формалних језика углавном бави формалним језицима који су описани неким синтаксним правилима, стварна дефиниција формалног језика је управо она дата изнад: (могуће бесконачан) скуп ниски коначне дужине. Ништа више од тога, ништа мање од тога. Међутим, у пракси постоји много језика који могу да буду описани правилима, као што су регуларни језици или контекстно-слободни језици. Појам формалне граматике може бити ближи интуитивном појму језика, описаног синтаксним правилима. Злоупотребом дефиниције, за одређени формални језик се често сматра да поседује формалну граматiku која га описује.

Теорија формалних језика се ретко бави појединачним језицима (осим као примерима), већ се углавном бави проучавањем различитих врста формализама за описивање језика. Извесне операције над језицима су уобичајене. Оне укључују стандардни скуп операција као што су унија, пресек и комплемент.

Закључак

Математика није говорно подручје једног народа, али математички језик је међународни језик и представљен симболима је језик који може да разуме цео свет. У овом раду су приказана

истраживања о математици као језику и сличностима и разликама са природним језиком. Без говорног језика не могу се разумети основни појмови математике, али симболи математике могу разумети сви говорни језици.

Многобројни фактори утичу на учениково знање из математике. Разумевање језика је важно приликом предавања и усвајања знања математике. У природном језику постоје непрецизности и у овом раду је указано на пример хомонима и синонима при чему се у разумевању математичких појмова јављају парадокси. У математици дефиниција треба да су прецизно и јасно речено, јер због непрецизне дефиниције, појма, исказа (тврђења, става) може доћи до неразумевања датог појма и зато је за разумевање истог потребно разумети и природни и математички језик.

Парадокси у математици се решавају тако што се користи симболички језик, уместо природног језика, користе се прецизније дефиниције и правила доказивања, као и формализацијом језика, дефиниција, и правила доказивања.

Важно је рећи да за разумевање градива је важно познавање и природног и математичког језика јер није могуће ни све дефинисати, па се нешто мора оставити недефинисано и то су основни појмови који се не могу разумети без разумевања природног језика.

Литература

- [1] Richard Barwell (2013): *Formal and informal language in mathematics classroom interaction: a dialogic perspective*, Proceedings of 37th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), vol. 2, pp. 73-80.
- [2] José Carrillo, Leonor Santos, Liz Bills, Alain Marchive: 'From a study of teaching practice to issues of teacher education', CERME 5(2007), WG 12, 1821-1826
- [3] Konrad Krainer and Fred Goffree: *On research in mathematics teacher education*, CERME 1(1998), WG3, 293-303
- [4] Милијана Миловановић, Даниел А. Романо, Владан Тодић (2011): *Различити теоријски аспекти у истраживању наставе математике*, Нова школа (Бијељина), 9/10(2012), 89-109
- [5] Daniel A.Romano (2007): *Razmišljanje o matematičkom obrazovanju*; IV Symposium "Technology, Informatics and Education for Learning and Knowledge Society", Novi Sad, 26-27.01.2007. (str. 82-90) Institut za pedagoška istraživanja Beograd, Centar za primenu nauke, tehnologije i informatike Novi Sad, Prirodno-matematički fakultet Novi Sad.
- [6] Adanur Yunus, Yagiz Oktay, Isik Ahmet (2004): *Mathematics and Language*, Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: 8(1), 31-37
- [7] Anke Walzebug (2009): *Mind the gap! – Language based item difficulties in mathematics as a "cultural gap"?*, CERME 8, WG9