ISSN 2303-5366
http://www.bijeljinamc.org

БМЧ
Бијељински методички часопис
Вол. 2(2015), 14-20

ТЕОРИЈА ЕФРАИМА ФИШБЕИНА О ФИГУРАЛНИМ КОНЦЕПТИМА

Сњежана Јовичић[1]

Универзитет у Источном Сарајеву, Педагошки факултет Бијељина,
76 300 Бијељина, Семберских ратара б.б., БиХ
e-mail: snjezanajovicic@hotmail.com

Сажетак: За формирање геометријских појмова у настави геометрије значајну улогу имају геометријске фигуре. Геометријске фигуре имају двије основне функције: концептуалну и фигуралну**.** Постоје три категорије менталних ентитета који се односе на геометријске фигуре: дефиниција, слика и фигурални концепт. Ефраим Фишбеин уводи термин „фигурални концепт“. Наведени појам образложен је помоћу једнакокраког троугла.

Кључне ријечи и фразе: геометрија, геометријска фигура, фигурални концепт

Abstract. For the formation of geometric concepts in geometry have a significant role geometric figures. Geometrical figures have two basic functions : conceptual and figural. There are three categories of mental entities related to geometric figures: definition, image and figural concept . Efraim Fishbein introduces the concept of " figural concept ". The term is explained by means of an isosceles triangle.

Key words and phrases: geometry , geometric figures , figural concept

Math. Subj. Classification (2010): **96G50**
ZDM Subject Classification (2010): **G10, G80**

1. Увод

Геометријске фигуре су један од основних елемената који има улогу у историји геометрије и уопште математике од Еуклидске геометрије па све до данас. У настави геометрије у образовању, геометријске фигуре су неопходна средства за формирање геометријских појмова. Све европске и америчке земље у наставним програмима математике садрже геометрију у којој геометријске фигуре имају значајну улогу. Многа истраживања (на примјер: Parzyzs, 1988; Duval, 1988; Fischbein, 1993, Laborde, 1994) истичу двије функције геометријске фигуре: концептуалну и фигуралну.

[1] Текст представља нешто промијењени и допуњени семинарски рад што сам га радила у оквирима курса Савремена методика наставе математике 2 на мастер студију Педагошког факултета Универзитета у Источном Сарајеву

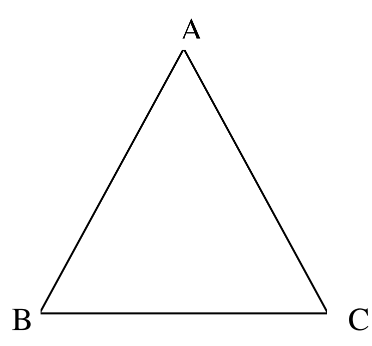
Ефраим Фишбеин[2] уводи термин „фигурални концепт“. Предмет истраживања и манипулације у геометријском образложењу су ментални ентитети названи фигурални концепти, који одражавају просторна својства (облик, положај, величину), а истовремено посједују концептуалне особине као што су идеалитет, мисаоност, општост, савршенство (Fischbein, 1993).
Ове карактеристике геометријских фигура истакао је Ефраим Фишбеин (Fischbein,1993), који сматра да припадају домену концепата. Идеалитет, мисаоност, апсолутно савршенство, универзалност су особине које имају смисла у домену концепти (Fischbein, 1993).

Истраживања улоге визуелизације у математичком мишљењу, нарочито у рјешавању геометријских проблема, почела су давно (Bishop, 1983), а наставила су се и касније (Fischbein, 1993, Duval, 1998). Доказати однос између теоријског и фигуралног аспекта у геометрији постаје кључно питање.

Према Фишбеину (1993), активности у геометрији укључују менталне субјекте, који се не могу сматрати ни само као чисти концепти или само слике. Геометријске фигуре посједују истовремено и концептуална и фигурална својства. Теорија фигуралних концепата нам пружа ефикасно теоријско средство погодно за анализу когнитивних процеса узимајући у обзир слику и концепт.

2. Појам фигуралног концепта

У савременим психолошким теоријама прави се разлика између појма и менталне слике. Пиерон , у свом „Vocabulaire de la Psychologie “, дефинише појам на сљедећи начин: „Појам је симболичка репрезентација (скоро увијек вербална) употребљена у процесу апстрактног мишљења и посједује општи значај који одговара ансамблу конкретних репрезентација са освртом шта имају заједничко“ (Pieron, 1957). На основу ове дефиниције јасно је да сам појам карактерише односно да је изражен неком идејом тј. савршенством класификације објеката, заснованом на њиховим заједничким чињеницама. Насупрот томе, слика тј. ментална слика је сензорна репрезентација објекта или феномена. На примјер појам је метал и то је општа идеја односно заједничка идеја, назив за групу супстанци које имају иста својства, док слика металног објекта је сензорна репрезентација датог објекта (има боју, величину...). Да би ово још боље објаснили размотрићемо сљедећи примјер: Посматрајмо једнакокраки троугао ABC ($AB = AC$) као што је на датој слици, гдје желимо да докажемо да је B = C. Можемо да конструишемо сљедећи доказ**:**



Слика 1
(Преузето из: Fischbein, E., 1993: The theory of figural concepts, Educational Studies in Mathematics 24(2), 139-162)

[2] Efraim Fischbein, 1920 (Руминија)-1998 (Израел)

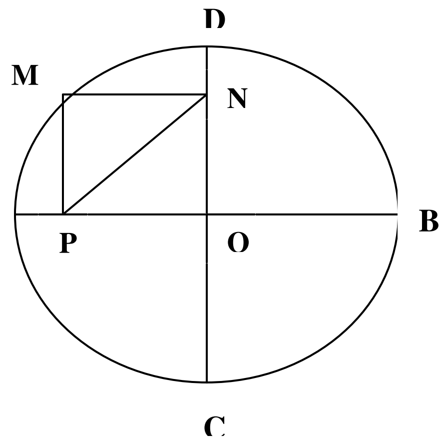
Одвојимо једну страницу троугла од самог троугла (рецимо AC) затим је окренимо тако да је сада AC на лијевој страни, а АС на десној, док страница BC је помјерена тако да спаја ове двије, затим странице спојимо. Угао A остаје исти јер странице AB и AC имају исту дужину, такође страница AC ће бити савршено подударна са AB на лијевој страни, а AB и AC исто тако савршено подударне на десној. Послије тога ротирајмо дати троугао и видјећемо да се подудара са оригиналом у потпуности. Као последица тога долази да А мора бити једнак В. У овоме примјеру употребили смо одређену суму знања коју смо изразили појмовима: двије странице AB и AC су проглашене једнаким, једном је употријебљен појам тачке, странице, угла, троугла, а једном смо споменули вербално процес супротног смијера- ротације. Али, у исто вријеме, једном смо употребили фигуралне информације и фигурално репрезентовали операције- главна идеја одвојити страницу троугла од троугла, ротирати троугао и упоредити га са оригиналним. Јасно је да се овдје бавимо мјешавином два независна, дефинисана ентитета, у једну руку апстрактне идеје и у другу руку сензорне операције која се одражава кроз конкретне операције.

Сада размотримо саму срж доказа, дакле имамо операцију одвајања странице троугла, па затим операцију спајања страница троугла. Појмови не могу бити одвојени, окренути или спојени. Овдје се бавимо само са описивањем тренутних практичних операција, али у стварности да ли је могуће да одвојимо неки објекат од њега самог.

Наравно да је одговор негативан. Такве операције немају конкретно значење. Дакле бавимо се са свијетом идеја, са значењем идеја. Објекти на које се ово односи- тачке, странице, углови и операције са њима имају једино идејно постојање. Они су појмовна природа. У исто вријеме они имају унутрашњу појмовну природу: једну док се односе на слику, а једну кад се разматрају операције попут одвајања, промјене смера итд. Углавном троугао који смо споменули као и његови елементи не може бити разматран или чистим појмовима или пуким заједничким сликама. Ипак, ови ентитети и операције који су учествовали у формалним, логичким доказима, математичкој исправности и у исто вријеме у закључивању, једнаких углова B и C могу бити провјерени практично. Ентитети који су поменути изнад- тачка, странице (дио линије), углови, сам троугао и операције са њима посједују појмовне квалитете. У математичком резоновању појединац се не односи на њих као на материјалне објекте или цртеже. Материјални објекти, цртежи и слично једино се могу материјализовати моделима менталних ентитета са којима се математичар бави. Друго, једино осећај за појам код појединаца може се сматрати као апсолутна перфекција геометријских ентитета: правих линија, кругова, квадрата, коцки, итд. Треће, ови геометријски ентитети немају изворни материал који им одговара. Тачке (нула- димензионални објекти), праве (једно-димензионални објекти), равни (без-димензионални објекат) не постоји у стварности. Док реално објекти са којима имамо практично искуство су тродимензионални. Четврто, сви ови конструкти су углавном репрезентације, попут сваког појма и никад менталне копије одређеног конкретног објекта.

Када се нацрта одређени троугао ABC на листу папира да би провјерили нека од његових својстава (на примјер својство његове висине) ми се не бавимо толико цртежом него одређеним обликом који може бити облик у бесконачној класи објеката. Уствари ми се бавимо хијерархијом облика, од тренутно одређеног али уствари који одговара бесконачности могућих објеката- универзалној категорији троуглова. Постоји и једно својство које карактерише геометријске фигуре и које се такође односи на концептуалну природу. Својству геометријских фигура наметнуле су се или потичу из дефиниције у краљевству одређеног система аксиома. С ове тачке гледишта геометријске фигуре имају појмовну природу. Квадрат није слика нацртана на листу папира него је то облик који је одређен дефиницијом (лако може бити инспирисан и реалним објектом). Квадрат је правоугаоник који има једнаке стране. Почевши од ових својстава можемо да наставимо са откривањем других својстава квадрата (сви једнаки, прави углови, једнаке дијагонале, итд).

Сви ови појмови који су споменути, или боље речено све геометријске фигуре представљене су менталним конструкцијама које поседују истовремена концептуална и фигурална својства. Када замислимо круг, замишљамо цртеж круга (укључујући на примјер боју оловке), а не идеал савршеног круга, али математички круг који је објекат нашег математичког резоновања, нема боју, нема материју, нема масу и то је наводно идеална перфекција. Она има сва својства појма који може учествовати у математичком резоновању, те упркос овој чињеници још увијек укључује репрезентацију просторних својстава. Размотримо сљедећи примјер 2: У кружници са центром у тачки *O* нацртајмо два окомита пречника *AB* и *CD*. Изаберимо тачку *M* на кружници и онда нацртајмо двије окомите дужи *MP* и *MN* на два пречника (сл. 2). Сада поставимо питање колика је дужина дужи *PN*? На први поглед, чини се да проблем не може бити ријешен зато што дужина исјечака *MP* и *MN* зависи од позиције тачке *M*. Али одједном, појединац опажа да је фигура MPON правоугаоник, те да је исјечак *MO* полупречник круга. Једнакост дијагонале није питање, једнакост полупречника није питање, такође.



Слика 2.

(Преузето из Fischbein, E., 1993: The theory of figural concepts,
Educational Studies in Mathematics 24(2), 139-162)

Ове везе не зависе од самог цртежа, него су наметнуте дефиницијама и теоремама. Битан аспект који желимо да нагласимо је да закључак није нацртан разматрањем одвојених слика и формалним ограничењима, него јединственим процесом у којем су дестиловане фигуре разматране, откривајући логичке везе. Ми не морамо да се трудимо да би "дотјерали " фигуру тј. пречистили ментално од њених непотребних детаља и нејасноћа. Процес идеализовања фигуре одиграо се аутоматски тако како се поставе интегрална, активна компонента стриктног логичког резоновања. Чињеница је да смо одједном скочили на закључак PN = MN = полупречник = константа. У моменту када смо схватили правоугаоник PONM, без интервенције или истраживања, подржани идејом да је разматрана фигура, од почетка, не обична слика него логички контролисана структура. У овом случају удруживање између појма и фигуре тежи да буде довршено, комплетно. Објекти истраживања и манипулације у геометријском резоновању су тада ментални етитети, названи фигуралним концептима, који одражавају просторне способности (облик, позиција, висина) и у исто вријеме, посједовање генерализације и савршенства. Историја математике свједочи сложеним динамичким процесима концептуализације и аксиоматизације фигуралних информација. Многи аксиоми употријебљени у Еуклидовим Елементима експлицитно исказаним.

Како је Гаус забиљежио, Еуклид говори о тачкама да леже између других тачака а линије леже између других линија, али никада се не бави појмом "између и његовим својствима" (Kline, 1982).

Сада ћемо се сусрести са сукобљеним феноменом који се одиграва у извору фигуралног концепта код појединца. Шепард цитира многе интроспективне извјештаје научника који описују начине на које се открива нова идеја заснована на замишљеном покретачу (Shepard, 1978). На примјер, односећи се на Ајнштајнов рад, он пише: " По свему судећи, Ајнштајнов рад у теоретској физици обиљежило је узајамно дејство између конкретних и перцептиалних визуелизација на једној страни, и на другој између немилосрдног вођења према апстрактној естетици принципа симетрије или инваријантности. Ово узајамно дејство чини се да је посредник, не вербалном дедукцијом, нити логичким мостовима и математичким формализмом, него узлетним скоковима између просторне и физичке интуиције" (Shepard, 1978).

2.1. Дефиниција, слика и фигурални концепт

Имамо три категорије менталних ентитета који се односе на геометријске фигуре: дефиницију, слику (засновану на перцептивно-сензорским искуствима, попут слике на цртежу) и фигурални концепт. Фигурални концепт је ментална стварност, то је конструкција обрађивана математичким резоновањем у домену геометрије, лишена било каквих конкретних-сензорских своcјтава (попут боје, тежине, густине, итд) али изложена фигуралним својствима. Ова фигурална конструкција је контролисана и манипулисана у принципу без остатака логичким правилима и процедурама у краљевству одређеног аксиоматичког система. Тешкоћа да се прихвати постојање трећег типа менталних ентитета је одређена чињеницом да смо директно једино свјесни менталне репрезентације (укључујући различита сензорна својства попут боје) и одговарајуће појмове.

Потребан нам је интелектуални напор да би разумјели да математичко-логичке операције манипулишу једино са прочишћеном верзијом слике, тј. просторно- фигуралним садржајем слике. Када манипулишемо са ријечима у вербалној активности, звукови (које чујемо или изражавамо) су спољашњи, материјалне репрезентације ријечи: значење лежи изван материјалног изражавања ријечи, значење је идеја фиксирана комплексом веза. Фигурални концепт је такође значење. Нарочито овај тип значења је онај који укључује фигуре као унутрашње својство. Изворно значење ријечи круг у геометрији, руковођено је процесом нашег резоновања и није смањено чистом формалном дефиницијом. То је слика потпуно контролисана дефиницијом. Без овог типа просторне слике геометрија не би постојала као грана математике.

3. Закључак

Фигурални концепти су апстрактни, уопштени, нестварни, чисти, логично детерминисани ентитети, иако они још увијек одражавају манипулативну менталну репрезентацију просторних својстава (попут облика, позиције, метричког изражавања величине). Фигурални концепт одређеног облика је код сваког појединца јединствен и састоји се од менталних слика везаних за формалне дефиниције тог облика (Fishbein, 1993).

Сам појам фигурални концепт који нам је представљен тежи да нагласи чињеницу да се бавимо одређеним типом менталних ентитета који нису сводљиви, нити обичним сликама-перцептивно нити изворним концептима. Бавимо се са фигурама чија су својства једино одређена, да ли директно или индиректно, дефиницијом или оквирно у одређеном систему аксиома. У нашој интерпретацији, концептуална контрола требало би да буде унутрашња тако да слика и појам треба да су сједињени у јединствен ментални објекат. У математичком резоновању ми такође јасно примјењујемо дефиниције и теореме да би директним резоновањем провјерили наше претпоставке и закључке. Али обично у процесу математичког тражења идеје ми покушавамо, експериментишемо, примјењујемо аналогију и индуктивне процесе манипулишући не крутим сликама, не примењујући формалне аксиоме, него фигуралне концепте, слике суштински контролисане појмовима. Без појма фигурални концепт, процес рјешавања проблема и тражењу идеја у геометрији не би био задовољавајуће описан, као ни објашњен. Током процеса тражења идеја главну улогу игра наслућивање које је у основи надахнуће и није објашњено логичким ланцем аргумената.

Грешке ученика у њиховим геометријским резоновањима често могу бити објашњене на неки начин раздвајањем концептуалног и фигуралног аспекта фигуралних концепата. Фигурална структура је доминанта динамика резеновања умјесто да буде под контролом одговарајућих формалних примјера. Према томе, велики број ученика не разумије изворну природу геометријског доказа и тражи да испуни потребу за допуну са емпиријском провјером. Слике и појмови у интеракцији понекад могу да подржавају једни друге а понекад да се супростављају када се налазе у когнитивној активности дјетета али и одрасле особе. Осим овога развој фигуралних концепата уопште није природан процесс.

Један од главних разлога зашто је геометрија тешка сама по себи за ученике јесте да се фигурални концепти не развијају са природним развојем. Према томе један од основних задатака математичког образовања у домену геометрије јесте да се стварају типови дидактичких ситуација које би систематски захтијевале стриктну сарадњу ова два аспекта све до њиховог спајања у јединствене менталне објекте.

Литература:

[1] Antonini, S. & Mariotti, M.A. (2008). Indirect proof: what is specific to this way of proving. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 40 (3), 401-412.

[2] Bishop, A. J. (1983). Space and geometry. In R. Lesh and M. Landau (Eds.) *Acquisition Of Mathematics Concepts And Processes*, 175-203, New york: Academic press.

[3] Clements, D. H. & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A Grouws, (ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 420-464, New York: Macmillan.

[4] Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point a view. У: C. Mammana and V. Villani (уредници): *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century,* pp.37-52. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

[5] Fischbein, E (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics,* 24(2), 139-162

[6] Gorgorio, N and Jones, K. (1996). Elements of the Visualisation Process within a Dynamic Geometry Environment. *Invited paper presented to Topic group on The Future of Geometry at the 8th International Congress on Mathematical Education*, Spain: Seville.

[7] Hitt, F. (2002). *Representations and Mathematics Visualization.* North American Chapter of IGPME. Mexico: Cinvestav-IPN.

[8] Jones, K. (1998). Theoretical Frameworks for the Learning of Geometrical Reasoning, *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 18(1&2), 29-34.

[9] Laborde, C. (1993). Do the pupils learn and what do they learn in a computer based environment? The case of Cabri-geometre, technology in mathematics teaching: A bridge between teaching and learning. Birmingham.

[10] Lehrer, R., Jenkins, M. & Osana, H. (1998). Longitudinal study in children's reasoning about space and geometry. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 137-167). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

[11] Lemonidis, C. (1993). Influence of the typical representation on the behaviour of the student. Examples from geometry. *Presentation at the 4o Panhellenic Congress Psychological Research*, 27-30.

[12] Maier, S. & Benz, C. (2013). Selecting shapes –how to children identify familiar shapes in two different educational settings. In: Behiye Ubuz, Çiğdem Haser, Maria Alessandra Mariotti (eds.) *Proceeding of CERME 8, Working group 13.* pp. 2186-2177, Turkey: Antalya.

[13] Mariotti, M. A. (1995). Images and Concepts in Geometrical Reasoning. *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education.* Berlin: Springer.

[14] Mariotti M.A. & Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities, *Educational Studies in Mathematics,* 34, 219-24.

[15] Mariotti, M.A. and Antonini, S. (2006). Reasoning in an absurd world: difficulties with proof by contradiction. In: Jarmila Novotná, Hana Moraová, Magdalena Krátká, Naďa Stehlíková (eds.) *Procedings of the 30th PME Conference,* v.2, 65-72. Czech Republic, Prague.

[16] Pieron, H. (1957): Vocabulaire de la psihologie, PUF, Paris.

[17] Parzysz, B. (1988). Knowing vs Seeing. Problems of the plane representation of space geometry figures. *Education Studies in Matematics*, 19(1), 79-92

[18] Romano, D. A. (2009). O geometrijskom mišljenju. *Nastava matematike*, LIV (2-3), 1-11.

[19] Rouandi, N. & Husni, N. (2014). Demonstration in Euclidean Geometry. *American International Journal of Social Science,* Vol. 3 No. 1*,* 130-138.

[20] Shepard, R. N. (1978). Externalization of mental images and the act of creation, in B.S. Randhawa and W. E. Coffman (eds.), *Visual Learning, Thinking and Communication*. pp 133-403. Academic Press , New York.

[21] Shepard, R. N. & Cooper, L. A. (1982). Mental Images and Their Transformations. *MIT Press*. MA: Cambridge.

[22] Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and insight. A theory of Mathematics Education*. Academic Press. USA: Orlando.