Ciência e Natura, Santa Maria v.38 n.1, 2016, Jan.- Abr. p. 264 – 272
Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas - UFSM
ISSN impressa: 0100-8307 ISSN on-line: 2179-460X

CIÊNCIA e NATURA

Sobre o Decaimento Exponencial da Energia de um sistema Termoelástico

On the Exponential Decay of the Energy of a Thermoelastic System

Débora Dalmolin [1] e Marcio Violante Ferreira[2]

[1]Aluna do PPGMat/UFSM , Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria , RS, Brasil
deborasdalmolin@hotmail.com

[2] Professor do Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria , RS, Brasil
marcio.ferreira@ufsm.br

Resumo

Neste trabalho estudamos a existência, unicidade e o comportamento assintótico da solução de um sistema termoelástico linear em dimensão um. Tal sistema é composto por uma equação da onda acoplada com a equação do calor e, fisicamente, modela a ação recíproca entre as vibrações de uma corda elástica e a variação de sua temperatura. Provamos, inicialmente, a existência e unicidade de solução do sistema fazendo uso da Teoria de Semigrupos de Operadores Lineares Limitados. Para a análise do comportamento assintótico da solução, utilizamos um método que consiste em perturbar adequadamente a energia do sistema e, com isso, provamos que a energia total do sistema decai exponencialmente a zero quando $t \to \infty$.

Palavras-chave: *Sistema termoelástico, teoria de semigrupos, decaimento exponencial.*

Abstract

In this paper we study the existence, uniqueness and the asymptotic behavior of the solution of a one dimensional linear thermoelastic system. Such a system is composed of a wave equation coupled with the heat equation and, physically, model the interaction of the vibrations of an elastic string with the variation of its temperature. We prove, first, the existence and uniqueness of solution of the system making use of the Theory of Semigroups of Bounded Linear Operators. For the analysis of the asymptotic behavior of the solution, we use a method consisting of a suitably perturbation to the energy of the system and, with that, we prove that the total energy of the system decays exponentially to zero as $t \to \infty$.

Keywords: *Thermoelastic system, semigroups theory, exponential decay.*

Recebido: 29/10/2015 Aceito: 18/12/2015

1 Introdução

Consideramos neste trabalho o sistema acoplado de equações diferenciais parciais

$$u_{tt} - u_{xx} + \sigma(x)u_t + \alpha\theta_x = 0, \quad (1)$$

$$\theta_t - \theta_{xx} + \beta u_{xt} = 0, \quad (2)$$

para $0 < x < L$ e $0 < t < +\infty$, complementado pelas condições iniciais

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x),$$
$$\theta(x,0) = \theta_0(x),\ \text{em } (0\,,L), \quad (3)$$

e condições de fronteira

$$u(0,t) = u(L,t) = \theta(0,t) = \theta(L,t) = 0, \quad t > 0, \quad (4)$$

onde α e β são constantes de acoplamento reais estritamente positivas. Além disso, supõe-se que $\sigma(x) \in L^\infty(0\,,L)$, com

$$0 < \sigma_0 \leq \sigma(x) \leq \sigma_1, \text{ q.s. em } (0\,,L), \quad (5)$$

onde σ_0 e σ_1 são constantes.

Como pode ser visto em Nowacki (1962), Achenbach (1973) e Ciarlet (1993), o sistema de equações acima modela a ação recíproca entre as vibrações (deformações) de uma corda elástica de comprimento L (cuja amplitude do movimento é dada pela função $u(x,t)$) e a variação de temperatura em cada ponto da mesma em relação a uma temperatura referencial fixa (variação esta dada pela função $\theta(x,t)$). A função $\sigma(x)$, que aparece em (1), representa um mecanismo de dissipação ("damping") interna variável.

A *Energia Total* do sistema (1)-(4) é dada por

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \left(u_t^2 + u_x^2 + \frac{\alpha}{\beta}\theta^2\right)\, dx$$

e um cálculo direto nos dá, pelo menos formalmente,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) = -\int_0^L \sigma(x)u_t^2\, dx - \frac{\alpha}{\beta}\int_0^L \theta_x^2\, dx \leq 0,$$

o que mostra que a Energia decresce com o passar do tempo. O objetivo principal do nosso trabalho é, justamente, mostrar que $\mathcal{E}(t) \to 0$ exponencialmente quando $t \to +\infty$.

Dado o grande interesse em se enterder matematicamente fenômenos físicos como o descrito pelo sistema (1)-(4), é vasta a literatura que trata do assunto. Podemos citar, por exemplo, o trabalho de Dafermos (1968), que deu substanciais contribuições para o estudo da existência de soluções bem como da estabilidade assintótica das soluções do sistema de equações em termoelasticidade linear, em dimensão três. Para este mesmo problema, mas supondo que a força restauradora é proporcional ao vetor velocidade, Pereira e Menzala (1989) provaram que, num meio isotrópico e não-homogêneo, a energia total associada ao sistema decai exponencialmente a zero quando $t \to +\infty$. Ressalte-se que, neste trabalho, os autores consideraram σ como constante.

No caso em que se considera o sistema termoelástico linear em dimensão um, Rivera (1992) obteve resultados de decaimento exponencial para a energia, até terceira ordem, do problema (1)-(4), mas sem considerar mecanismos de dissipação interna, isto é, analisou o caso em que $\sigma \equiv 0$. O resultado obtido é de extrema relevância, haja vista que só a dissipação térmica é suficiente para a estabilização assintótica da energia. No entando, o autor considerou dados iniciais com bem mais regularidade do que a considerada no presente trabalho. Além disso, a prova da existência e unicidade de solução de (1)-(4) que apresentamos aqui difere em alguns aspectos (ferramentas de análise funcional utilizadas) da apresentada por Rivera (1992).

A análise matemática do comportamento da energia total é, obviamente, de grande interesse para outros sistemas de equações diferenciais parciais, que modelam diferentes fenômenos físicos. Por exemplo, utilizando multiplicadores adequados, Ferreira e Menzala (2006) obtiveram a estabilização da solução de um sistema de ondas elásticas semi-linear em domínios exteriores e, em Ferreira e Menzala (2007), resultados análogos para um sistema elasto-eletromagnético não-linear. Obviamente há, nesses casos em que se considera fenômenos em domínios exteriores, a dificuldade adicional de se trabalhar numa região não limitada do espaço.

Problemas ainda mais gerais podem ser estudados, como aqueles em que se consideram mecanismos de dissipação na fronteira ou mesmo dissipação localizada, isto é, atuando apenas numa parte do domínio. Os resultados que apresentamos neste trabalho são um caminho para tratar estes casos e outros ainda mais gerais como, por exemplo, o problema não-linear associado ao modelo (1)-(4).

Nosso trabalho está estruturado da seguinte forma: utilizando a teoria de semigrupos de operadores lineares provamos, na próxima seção, a existência e unicidade de solução de (1)-(4). Na Seção 3, utilizando um funcional adequado para perturbar a energia do sistema, provamos que a mesma decai exponencialmente no tempo. As conclusões e as referências encerram o texto.

2 Existência e unicidade de solução

Inicialmente, faremos uma breve apresentação dos espaços funcionais utilizados ao longo deste trabalho. Para maiores esclarecimentos sobre a notação e propriedades utilizadas em algumas demonstrações, pode-se consultar Adams (1975) e Brezis (2010).

O produto interno e norma usuais no espaço $L^2(0,L)$ serão denotados, respectivamente, por $(.\,,.)$ e $|\,.\,|$. Assim,

$$(u,v) = \int_0^L uv\,dx, \quad \forall\, u,v \in L^2(0,L),$$

e

$$|u| = \left(\int_0^L u^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall\, u \in L^2(0,L).$$

Como se sabe, $L^2(0,L)$, munido do produto interno acima, é um espaço de Hilbert.

Usaremos a notação tradicional $\mathcal{D}(0,L)$ para o espaço das funções testes, definidas em $(0,L)$, e $\mathcal{D}'(0,L)$ para o espaço das distribuições. Os espaços de Sobolev clássicos serão representados por $H^m(0,L)$, m um número inteiro positivo. No subespaço $H_0^1(0,L)$ (fecho de $\mathcal{D}(0,L)$ em $H^1(0,L)$) vale a *Desigualdade de Poincaré*

$$\int_0^L u^2\,dx \le C_0 \int_0^L u_x^2\,dx.$$

Portanto, em $H_0^1(0,L)$, considera-se o produto interno e norma equivalentes a de $H^1(0,L)$ dados por

$$((u,v)) = \int_0^L u_x v_x\,dx, \quad \forall\, u,v \in H_0^1(0,L)$$

e

$$\|u\| = \left(\int_0^L u_x^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall\, u \in H_0^1(0,L).$$

A existência e unicidade de solução do sistema (1)-(4) será estabelecida via Teoria de Semigrupos de Operadores Lineares. A ideia, então, é reescrevê-lo na forma de um problema abstrato de primeira ordem. Para isso, introduzimos o espaço

$$\mathcal{H} = H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times L^2(0,L)$$

que, obviamente, é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\begin{aligned}((u_1,v_1,\theta_1),(u_2,v_2,\theta_2))_{\mathcal{H}} &= \int_0^L (u_1)_x(u_2)_x\,dx \\ &+ \int_0^L v_1v_2\,dx + \int_0^L \theta_1\theta_2\,dx,\end{aligned}$$

com (u_1,v_1,θ_1), $(u_2,v_2,\theta_2) \in \mathcal{H}$.

O sistema (1)-(2), com condições iniciais (3), pode ser reescrito (via a substituição $v = u_t$ na equação (1)) na forma

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = \mathcal{A}U \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{6}$$

onde $U(t) = (u(t),v(t),\theta(t))$, $U_0 = (u_0,u_1,\theta_0)$ e $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é o operador linear não-limitado com domínio

$$\begin{aligned}D(\mathcal{A}) = H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L) &\times H_0^1(0,L) \\ &\times H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)\end{aligned}$$

definido por

$$\mathcal{A}(u,v,\theta) = (v, u_{xx} - \sigma(x)v - \alpha\theta_x, -\beta v_x + \theta_{xx}),$$

para todo $(u,v,\theta) \in D(\mathcal{A})$.

Observemos que não se pode garantir que o operador $\mathcal{A}$ é dissipativo. Com efeito, se $U = (u,v,\theta) \in D(\mathcal{A})$, então

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}U,U)_{\mathcal{H}} = &\int_0^L v_x u_x\,dx + \int_0^L u_{xx}v\,dx - \int_0^L \sigma(x)v^2\,dx \\ &- \alpha\int_0^L v\theta_x\,dx - \beta\int_0^L v_x\theta\,dx + \int_0^L \theta_{xx}\theta\,dx.\end{aligned}$$

Daí, notando que,

$$\int_0^L v_x u_x\,dx + \int_0^L u_{xx}v\,dx = \int_0^L \frac{\partial}{\partial x}(u_x v)\,dx = 0,$$

$$\int_0^L v_x\theta\,dx = -\int_0^L v\theta_x\,dx$$

e

$$\int_0^L \theta_{xx}\theta\,dx = -\int_0^L \theta_x^2\,dx,$$

já que $v,\theta \in H_0^1(0,L)$, obtemos

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}U,U)_{\mathcal{H}} = &-\int_0^L \sigma(x)v^2\,dx + (\beta-\alpha)\int_0^L v\theta_x\,dx \\ &-\int_0^L \theta_x^2\,dx.\end{aligned}$$

Ainda, utilizando a Desigualdade de Young e a hipótese (5), segue que

$$(\mathcal{A}U,U)_{\mathcal{H}} \le -\sigma_0\int_0^L v^2\,dx + \frac{1}{2}(\beta-\alpha)^2\int_0^L v^2\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^L \theta_x^2\,dx$$

e, portanto,

$$(\mathcal{A}U,U)_{\mathcal{H}} \leq -\sigma_0|v|^2 + \frac{1}{2}(\beta-\alpha)^2||U||^2_{\mathcal{H}} - \frac{1}{2}||\theta||^2. \quad (7)$$

A desigualdade anterior nos leva a considerar uma perturbação limitada do operador $\mathcal{A}$, escolhida adequadamente, de modo que o novo operador seja dissipativo (conforme Pazy (1983), pg. 79). Consideremos, pois, o operador $\mathcal{B} : D(\mathcal{B}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, definido por

$$\mathcal{B} = -(\alpha-\beta)^2 I + \mathcal{A},$$

onde $D(\mathcal{B}) = D(\mathcal{A})$ e I é o operador identidade em $\mathcal{H}$.

Proposição 2.1. *$D(\mathcal{B})$ é denso em $\mathcal{H}$.*

Demonstração Segue diretamente da cadeia de inclusões

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}(0,L) \subset H^2(0,L)\cap H_0^1(0,L) \subset H_0^1(0,L),\\
&\mathcal{D}(0,L) \subset H_0^1(0,L) \subset L^2(0,L),\\
&\mathcal{D}(0,L) \subset H^2(0,L)\cap H_0^1(0,L) \subset L^2(0,L),
\end{aligned}$$

e das densidades de $\mathcal{D}(0,L)$ em $H_0^1(0,L)$ e de $\mathcal{D}(0,L)$ em $L^2(0,L)$. ■

Proposição 2.2. *O operador $\mathcal{B}$ é dissipativo, isto é,*

$$(\mathcal{B}U,U)_{\mathcal{H}} \leq 0,\ \forall\, U = (u,v,\theta) \in D(\mathcal{B}).$$

Demonstração Se $U = (u,v,\theta) \in D(\mathcal{B})$, então

$$\begin{aligned}
(\mathcal{B}U,U)_{\mathcal{H}} &= \Big((-(\alpha-\beta)^2 I + \mathcal{A})U,U\Big)_{\mathcal{H}}\\
&= -(\alpha-\beta)^2||U||^2_{\mathcal{H}} + (\mathcal{A}U,U)_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Disto, e da desigualdade (7), obtem-se

$$\begin{aligned}
(\mathcal{B}U,U)_{\mathcal{H}} &\leq -(\alpha-\beta)^2||U||^2_{\mathcal{H}} - \sigma_0|v|^2\\
&\quad + \frac{1}{2}(\beta-\alpha)^2||U||^2_{\mathcal{H}} - \frac{1}{2}||\theta||^2,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$(\mathcal{B}U,U)_{\mathcal{H}} \leq -\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^2||U||^2_{\mathcal{H}} - \sigma_0|v|^2 - \frac{1}{2}||\theta||^2 \leq 0,$$

o que prova o desejado. ■

Proposição 2.3. *$I-\mathcal{B}$ é um operador sobrejetivo, isto é, $\mathcal{R}(I-\mathcal{B}) = \mathcal{H}$, onde I é o operador identidade em $\mathcal{H}$.*

Demonstração Devemos mostrar que para todo $G = (f,g,h) \in \mathcal{H}$, existe $U = (u,v,\theta) \in D(\mathcal{B})$ tal que

$$(I-\mathcal{B})U = G, \quad (8)$$

ou seja, devemos resolver o sistema

$$\begin{cases}
\left[(\alpha-\beta)^2+1\right]u - v = f\\
\left[(\alpha-\beta)^2+1\right]v - u_{xx} + \sigma(x)v + \alpha\theta_x = g\\
\left[(\alpha-\beta)^2+1\right]\theta + \beta v_x - \theta_{xx} = h,
\end{cases} \quad (9)$$

onde $f \in H_0^1(0,L)$, $g \in L^2(0,L)$ e $h \in L^2(0,L)$ são funções dadas.

Chamando $k = [(\alpha-\beta)^2+1]$, sendo $v = ku - f$ e $v_x = ku_x - f_x$, o sistema (9) se resume a encontrar $u,\theta \in H^2(0,L)\cap H_0^1(0,L)$ tais que

$$\begin{cases}
(k^2+\sigma(x)k)u - u_{xx} + \alpha\theta_x = (k+\sigma(x))f + g\\
k\theta + \beta k u_x - \theta_{xx} = \beta f_x + h,
\end{cases} \quad (10)$$

com $f \in H_0^1(0,L)$, $g \in L^2(0,L)$ e $h \in L^2(0,L)$ funções dadas. Assim, resolvendo (10), obtemos a solução procurada $(u,v,\theta) \in D(\mathcal{B})$ do problema (9) e, consequentemente, resolvemos (8).

Com o intuito de resolver o sitema (10), vamos considerar o espaço de Hilbert

$$\mathcal{W} = H_0^1(0,L)\times H_0^1(0,L),$$

a forma bilinear

$$a : \mathcal{W}\times\mathcal{W} \to \mathbb{R},$$

definida por

$$\begin{aligned}
a\left((u,\theta),(\psi,\phi)\right) &= k\beta\int_0^L (k^2+\sigma(x)k)u\psi\,dx\\
&+ k\beta\int_0^L u_x\psi_x\,dx + k\beta\alpha\int_0^L \theta_x\psi\,dx + \alpha k\int_0^L \theta\phi\,dx\\
&+ \alpha\beta k\int_0^L u_x\phi\,dx + \alpha\int_0^L \theta_x\phi_x\,dx,
\end{aligned}$$

e a forma linear

$$F : \mathcal{W} \to \mathbb{R},$$

dada por

$$\begin{aligned}
F(\psi,\phi) &= k\beta\int_0^L (k+\sigma(x))f\psi\,dx + k\beta\int_0^L g\psi\,dx\\
&+ \alpha\beta\int_0^L f_x\phi\,dx + \alpha\int_0^L h\phi\,dx.
\end{aligned}$$

Notemos que, para $(u,\theta) \in \mathcal{W}$ qualquer, temos

$$a\left((u,\theta),(u,\theta)\right) = k\beta\int_0^L (k^2+\sigma(x)k)u^2\,dx$$

$$+k\beta\int_0^L u_x^2\,dx + k\beta\alpha\int_0^L \theta_x u\,dx$$
$$+\alpha k\int_0^L \theta^2\,dx + \alpha\beta k\int_0^L u_x\theta\,dx + \alpha\int_0^L \theta_x^2\,dx,$$

donde, integrando por partes e usando a hipótese (5), obtemos

$$\begin{aligned} a((u,\theta),(u,\theta)) &\geq k\beta(k^2+\sigma_0 k)\int_0^L u^2\,dx \\ &+ k\beta\int_0^L u_x^2\,dx + \alpha k\int_0^L \theta^2\,dx + \alpha\int_0^L \theta_x^2\,dx \\ &\geq k\beta\int_0^L u_x^2\,dx + \alpha\int_0^L \theta_x^2\,dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} a((u,\theta),(u,\theta)) &\geq C(||u||^2+||\theta||^2) \\ &= C||(u,\theta)||^2_{\mathcal{W}}, \end{aligned}$$

onde $C = \min\{k\beta, \alpha\}$, o que mostra que a é coerciva. Além disso, a é contínua. Com efeito, graças à hipótese (5) e a Desigualdade de Cauchy-Schwarz obtemos, para quaisquer $(u,\theta), (\psi,\phi) \in \mathcal{W}$,

$$\begin{aligned} |a((u,\theta),(\psi,\phi))| &\leq k\beta(k^2+\sigma_1 k)|u||\psi| + k\beta\|u\|\|\psi\| \\ &+ k\beta\alpha\|\theta\||\psi| + \alpha k|\theta||\phi| + \alpha\beta k\|u\||\phi| + \alpha\|\theta\|\|\phi\| \end{aligned}$$

e, pela Desigualdade de Poincaré,

$$\begin{aligned} &|a((u,\theta),(\psi,\phi))| \leq \\ &\leq C_1\left(\|u\|\|\psi\| + \|\theta\|\|\psi\| + \|u\|\|\phi\| + \|\theta\|\|\phi\|\right) \\ &\leq C_2\left(\|u\|^2+\|\theta\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\|\psi\|^2+\|\phi\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= C_2||(u,\theta)||_{\mathcal{W}}||(\psi,\phi)||_{\mathcal{W}}. \end{aligned}$$

Finalmente, observemos que, para todo $(\psi,\phi) \in \mathcal{W}$, vale, graças à Desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |F(\psi,\phi)| &\leq k\beta(k+\sigma_1)|f||\psi| + k\beta|g||\psi| \\ &+ \alpha\beta\|f\||\phi| + \alpha|h||\phi| \\ &= k\beta\left[(k+\sigma_1)|f| + |g|\right]|\psi| + \alpha\left[\beta\|f\| + |h|\right]|\phi| \\ &= C_3|\psi| + C_4|\phi| \leq C_5(|\psi|^2+|\phi|^2)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

de onde se obtém, utilizando a Desigualdade de Poincaré,

$$|F(\psi,\phi)| \leq C_6(\|\psi\|^2+\|\phi\|^2)^{\frac{1}{2}} = C_6||(\psi,\phi)||_{\mathcal{W}},$$

isto válido para todo $(\psi,\phi) \in \mathcal{W}$, o que significa que F é contínua.

Mostramos, até aqui, que a forma bilinear a é contínua e coerciva e a forma linear F é contínua. Então, pelo Teorema de Lax-Milgram (veja Brezis (2010)), existe único $(u,\theta) \in \mathcal{W} = H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L)$ tal que

$$a((u,\theta),(\psi,\phi)) = F(\psi,\phi), \tag{11}$$

para todo $(\psi,\phi) \in \mathcal{W}$. Em particular, vale a identidade (11) para todo $(\psi,0)$, com $\psi \in \mathcal{D}(0,L)$. Assim, no sentido das distribuições,

$$\begin{aligned} \langle(k^2+\sigma(x)k)u,\psi\rangle + \langle u_x,\psi_x\rangle + \alpha\langle\theta_x,\psi\rangle \\ = \langle(k+\sigma(x))f,\psi\rangle + \langle g,\psi\rangle, \end{aligned}$$

$\forall\,\psi \in \mathcal{D}(0,L)$ e, portanto, vale em $\mathcal{D}'(0,L)$ a igualdade

$$u_{xx} = (k^2+\sigma(x)k)u + \alpha\theta_x - (k+\sigma(x))f - g.$$

Mas $u \in H_0^1(0,L)$, $\theta \in H_0^1(0,L)$, as funções dadas $f \in H_0^1(0,L)$, $g \in L^2(0,L)$ e $\sigma(x)u \in L^2(0,L)$, donde conclui-se que $u_{xx} \in L^2(0,L)$ e, consequentemente, $u \in H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)$.

Definamos agora

$$v = ku - f.$$

Então $v \in H_0^1(0,L)$ e

$$ku - v = f.$$

Além disso, como

$$k^2u + \sigma(x)ku - u_{xx} + \alpha\theta_x = kf + \sigma(x)f + g,$$

teremos

$$kv + \sigma(x)v - u_{xx} + \alpha\theta_x = g.$$

Por outro lado, vale a identidade (11) para todo $(0,\phi)$, com $\phi \in \mathcal{D}(0,L)$. Assim, no sentido das distribuições,

$$k\langle\theta,\phi\rangle + \beta k\langle u_x,\phi\rangle + \langle\theta_x,\phi_x\rangle = \beta\langle f_x,\phi\rangle + \langle h,\phi\rangle,$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}(0,L)$ e, assim,

$$\theta_{xx} = k\theta + \beta k u_x - \beta f_x - h,$$

igualdade essa no sentido de $\mathcal{D}'(0,L)$. Como $u,\theta,f \in H_0^1(0,L)$ e $h \in L^2(0,L)$, conclui-se que $\theta_{xx} \in L^2(0,L)$. Portanto $\theta \in H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)$ e

$$k\theta + \beta v_x - \theta_{xx} = h.$$

Em resumo, mostramos a existência de $(u,v,\theta) \in D(\mathcal{B})$ satisfazendo as equações (9), o que encerra a demonstração da proposição. ■

Provamos, até aqui, que $\mathcal{B}$ é um operador densamente definido e maximal dissipativo. Segue então, do Teorema de Lumer-Phillips (veja Pazy (1983)), que $\mathcal{B}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de Classe C_0.

Ora, como o operador $(\alpha-\beta)^2 I$ é linear e limitado, podemos utilizar a Teoria da Perturbação de Semigrupos (Pazy (1983), pg. 79) para garantir que o operador $\mathcal{B}+(\alpha-\beta)^2=\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de Classe C_0. Assim, $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de Classe C_0 e $U(t)=S(t)U_0$ é a única solução do problema

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U(t)=\mathcal{A}U(t) \\ U(0)=U_0. \end{cases}$$

Resta provado, pois, o seguinte resultado de existência de solução para o problema (6) e, consequentemente, para o sistema (1)-(4):

Teorema 2.4. *Suponhamos que σ satisfaz a hipótese* (5). *Então, para cada $(u_0,u_1,\theta_0)\in D(\mathcal{A})$, o sistema* (1)-(4) *tem uma única solução global forte (u,θ) tal que*

$$u\in C([0,\infty);\ H^2(0\,,L)\cap H_0^1(0\,,L))\cap \cap C^1([0,\infty);\ H_0^1(0\,,L))\cap C^2((0,\infty);\ L^2(0\,,L))$$

e

$$\theta\in C([0,\infty);\ H^2(0\,,L)\cap H_0^1(0\,,L))\cap \cap C^1((0,\infty);\ L^2(0\,,L)).$$

3 Comportamento assintótico

Como uma apresentação do método a ser utilizado para o estudo do comportamento assintótico da solução do sistema (1)-(4), obtida na seção anterior, vamos analisar o comportamento da solução do problema de valor inicial e de contorno

$$u_{tt}-u_{xx}+\sigma(x)u_t=0,\ \ 0<x<L \text{ e } 0<t<+\infty, \quad (12)$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=u_1(x),\ 0<x<L, \quad (13)$$

$$u(0,t)=u(L,t)=0,\ \ t>0, \quad (14)$$

onde a função $\sigma(x)\in L^\infty(0\,,L)$ satisfaz a hipótese (5), isto é,

$$0<\sigma_0\leq\sigma(x)\leq\sigma_1, \text{ q.s. em } (0\,,L).$$

A existência e unicidade de solução para o problema acima pode ser obtida com aquele mesmo método empregado na seção anterior. De fato, se $(u_0\,,u_1)\in H^2(0\,,L)\cap H_0^1(0\,,L)\times H_0^1(0\,,L)$, então existe uma única solução global forte u de (12)-(14) tal que

$$u\in C([0,\infty),H^2(0\,,L)\cap H_0^1(0\,,L))\cap \cap C^1([0,\infty),H_0^1(0\,,L))\cap C^2((0,\infty),L^2(0\,,L)).$$

A *Energia Total* associada ao modelo (12)-(14) é dada pela integral

$$\mathcal{E}(t)\equiv\frac{1}{2}\int_0^L\left(u_t^2(x,t)+u_x^2(x,t)\right)\,dx \quad (15)$$

e um cálculo simples nos dá

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t)=-\int_0^L\sigma(x)u_t^2(x,t)\,dx \leq -\sigma_0\int_0^L u_t^2(x,t)\,dx\leq 0, \quad (16)$$

o que significa que a energia é decrescente e o modelo tem, pois, caráter dissipativo. O próximo resultado mostra que a energia decai exponencialmente a zero quando $t\to\infty$. A demonstração deste fato se baseia num método que consiste em perturbar adequadamente o funcional energia $\mathcal{E}(t)$.

Teorema 3.1. *Seja $\mathcal{E}(t)$ a energia total do sistema* (12)-(14), *definida pela identidade* (15). *Então, existem constantes $C,\gamma>0$ tais que*

$$\mathcal{E}(t)\leq C\mathcal{E}(0)\exp\left(-\gamma t\right),\ \forall\, t\geq 0.$$

Demonstração Multiplicando ambos os membros da equação (12) por u e integrando em $(0\,,L)$ obtemos

$$\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L u_t u\,dx+\frac{1}{2}\int_0^L\sigma(x)u^2\,dx\right\}= -\int_0^L u_x^2\,dx+\int_0^L u_t^2\,dx.$$

Ponhamos

$$G(t)=\int_0^L u_t u\,dx+\frac{1}{2}\int_0^L\sigma(x)u^2\,dx. \quad (17)$$

Então, obviamente,

$$\frac{d}{dt}G(t)=-\int_0^L u_x^2\,dx+\int_0^L u_t^2\,dx. \quad (18)$$

Agora, definimos o funcional *Energia Perturbada*

$$H(t)=\mathcal{E}(t)+\delta G(t), \quad (19)$$

onde δ é um parâmetro positivo a ser fixado posteriormente. Levando em conta (16) e (18), vemos que

$$\frac{d}{dt}H(t)\leq-\delta\int_0^L u_x^2\,dx-(\sigma_0-\delta)\int_0^L u_t^2\,dx.$$

Se fixarmos δ suficientemente pequeno de modo que $0<\delta<\sigma_0$, obteremos

$$\frac{d}{dt}H(t)\leq -C_1\mathcal{E}(t), \quad (20)$$

onde $C_1 = \min\{2\delta, 2(\sigma_0 - \delta)\} > 0$.

Mostremos agora a equivalência entre $H(t)$ e $\mathcal{E}(t)$. Com efeito, temos

$$|H(t) - \mathcal{E}(t)| \leq \delta \int_0^L |u||u_t| \, dx + \frac{\delta}{2} \int_0^L |\sigma(x)||u|^2 \, dx.$$

Daí, utilizando a Desigualdade de Young, a Desigualdade de Poincaré e a hipótese (5), segue que

$$|H(t) - \mathcal{E}(t)| \leq \frac{\delta}{2} \int_0^L u_t^2 \, dx + \frac{\delta C_0}{2}(1+\sigma_1) \int_0^L u_x^2 \, dx.$$

Tomando $C_2 = \max\{1, C_0(1+\sigma_1)\} > 0$, obtemos

$$|H(t) - \mathcal{E}(t)| \leq \delta C_2 \mathcal{E}(t)$$

e, portanto,

$$(1 - \delta C_2)\mathcal{E}(t) \leq H(t) \leq (1 + \delta C_2)\mathcal{E}(t).$$

Escolhendo δ pequeno de modo que, além de ser $0 < \delta < \sigma_0$, satisfaça $1 - \delta C_2 > 0$, conclui-se que

$$K_1 \mathcal{E}(t) \leq H(t) \leq K_2 \mathcal{E}(t), \tag{21}$$

onde $K_1 = 1 - \delta C_2 > 0$ e $K_2 = 1 + \delta C_2 > 0$.

De (20) e (21) chega-se à desigualdade diferencial

$$\frac{d}{dt} H(t) \leq \frac{-C_1}{K_2} H(t),$$

da qual se obtém

$$H(t) \leq H(0) \exp\left(\frac{-C_1}{K_2} t\right).$$

Combinando a desigualdade acima com a (21), concluímos que

$$\mathcal{E}(t) \leq C\mathcal{E}(0) \exp(-\gamma t), \quad \forall t \geq 0,$$

onde $C = \frac{K_2}{K_1}$ e $\gamma = \frac{C_1}{K_2}$, provando assim o teorema. ■

Nosso próximo passo, objetivo central deste trabalho, é o estudo do comportamento assintótico do par solução (u, θ) do sistema (1)-(4). Algumas considerações e resultados preliminares são necessários antes da apresentação do principal resultado.

Multiplicando ambos os membros da equação (1) por βu_t e da equação (2) por $\alpha\theta$, adicionando ambas e integrando em $(0, L)$, obtemos

$$\beta \int_0^L u_{tt} u_t \, dx - \beta \int_0^L u_{xx} u_t \, dx + \beta \int_0^L \sigma(x) u_t^2 \, dx$$
$$+ \alpha\beta \int_0^L \theta_x u_t \, dx + \alpha \int_0^L \theta_t \theta \, dx - \alpha \int_0^L \theta_{xx} \theta \, dx$$
$$+ \alpha\beta \int_0^L u_{xt} \theta \, dx = 0.$$

Via integração por partes, chega-se facilmente à identidade

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \left(u_t^2 + u_x^2 + \frac{\alpha}{\beta}\theta^2\right) dx =$$
$$- \int_0^L \sigma(x) u_t^2 \, dx - \frac{\alpha}{\beta} \int_0^L \theta_x^2 \, dx.$$

A expressão

$$\mathcal{E}(t) \equiv \frac{1}{2} \int_0^L \left(u_t^2 + u_x^2 + \frac{\alpha}{\beta}\theta^2\right) dx \tag{22}$$

é a *Energia Total* associada ao sistema. Tem-se, então,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = - \int_0^L \sigma(x) u_t^2 \, dx - \frac{\alpha}{\beta} \int_0^L \theta_x^2 \, dx, \; \forall\, t > 0, \tag{23}$$

o que nos leva a concluir que a energia é decrescente. Estamos interessados, pois, em analisar a forma que ocorre esse decaimento. O método utilizado é aquele empregado no início desta seção, quando se obteve o decaimento da energia da equação da onda com dissipação. Com o intuito de encontar a perturbação adequada para a Energia, vamos multiplicar ambos os membros da equação (1) por u e integrar em $(0, L)$. Obtemos, com isso,

$$\int_0^L u_{tt} u \, dx - \int_0^L u_{xx} u \, dx$$
$$+ \int_0^L \sigma(x) u_t u \, dx + \alpha \int_0^L \theta_x u \, dx = 0.$$

Daí, integrando-se por partes o segundo e o quarto termos e utilizando-se as condições de contorno (4), chega-se a

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_0^L u_t u \, dx + \frac{1}{2} \int_0^L \sigma(x) u^2 \, dx \right\} = - \int_0^L u_x^2 \, dx$$
$$+ \int_0^L u_t^2 \, dx + \alpha \int_0^L \theta u_x \, dx.$$

Consideremos, então, o funcional

$$G(t) = \int_0^L u u_t \, dx + \frac{1}{2} \int_0^L \sigma(x) u^2 \, dx. \tag{24}$$

Vale, com isso,

$$\frac{d}{dt}G(t) = -\int_0^L u_x^2\,dx + \int_0^L u_t^2\,dx + \alpha\int_0^L \theta u_x\,dx. \quad (25)$$

Definimos agora a *Energia Perturbada* $H(t)$ pondo

$$H(t) = \mathcal{E}(t) + \delta G(t), \quad (26)$$

onde δ é um parâmetro positivo a ser fixado.

Lema 3.2. *Existe constante $C_1 > 0$ tal que*

$$\frac{d}{dt}H(t) \leq -C_1\mathcal{E}(t), \ \ \forall\, t \geq 0.$$

Demonstração Levando-se em conta a Desigualdade de Poincaré e a hipótese (5) obtemos, de (23),

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) \leq -\sigma_0\int_0^L u_t^2\,dx - \frac{\alpha}{\beta C_0}\int_0^L \theta^2\,dx. \quad (27)$$

Por outro lado temos, de (25), aplicando-se a Desigualdade de Young,

$$\frac{d}{dt}G(t) \leq -\frac{1}{2}\int_0^L u_x^2\,dx + \int_0^L u_t^2\,dx + \frac{\alpha^2}{2}\int_0^L \theta^2\,dx. \quad (28)$$

Segue, de (27)-(28), que

$$\frac{d}{dt}H(t) \leq -2(\sigma_0 - \delta)\frac{1}{2}\int_0^L u_t^2\,dx - \frac{\delta}{2}\int_0^L u_x^2\,dx - \left(\frac{2}{C_0} - \delta\alpha\beta\right)\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\beta}\int_0^L \theta^2\,dx.$$

Agora é só escolher $\delta > 0$ suficientemente pequeno de modo que

$$\sigma_0 - \delta > 0 \ \text{ e } \ \frac{2}{C_0} - \alpha\beta\delta > 0 \quad (29)$$

e fazer

$$C_1 = \min\left\{2(\sigma_0 - \delta)\ ,\ \delta\ ,\ \frac{2}{C_0} - \delta\alpha\beta\right\}$$

que teremos

$$\frac{d}{dt}H(t) \leq -C_1\mathcal{E}(t), \ \ \forall\, t \geq 0,$$

provando o desejado. ∎

Lema 3.3. *Existem constantes $K_1, K_2 > 0$ tais que*

$$K_1\mathcal{E}(t) \leq H(t) \leq K_2\mathcal{E}(t), \ \ \forall\, t \geq 0.$$

Demonstração De (26), utilizando a hipótese (5), a Desigualdade de Hölder e a Desigualdade de Poincaré, segue que

$$\begin{aligned}|H(t) - \mathcal{E}(t)| &\leq \delta\left(\int_0^L |u||u_t|\,dx + \frac{\sigma_1}{2}\int_0^L |u|^2\,dx\right)\\ &\leq \frac{\delta}{2}\int_0^L u_t^2\,dx + (1+\sigma_1)\frac{\delta}{2}\int_0^L u^2\,dx\\ &\leq \frac{\delta}{2}\int_0^L u_t^2\,dx + C_0(1+\sigma_1)\frac{\delta}{2}\int_0^L u_x^2\,dx\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}&(1-\delta)\frac{1}{2}\int_0^L u_t^2\,dx + [1 - C_0(1+\sigma_1)\delta]\frac{1}{2}\int_0^L u_x^2\,dx\\ &+ \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\beta}\int_0^L \theta^2\,dx \leq H(t) \leq (1+\delta)\frac{1}{2}\int_0^L u_t^2\,dx\\ &+ [1 + C_0(1+\sigma_1)\delta]\frac{1}{2}\int_0^L u_x^2\,dx + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\beta}\int_0^L \theta^2\,dx.\end{aligned}$$

Tomando $\delta > 0$ suficientemente pequeno de modo que, além de (29), satisfaça também

$$1 - C_0(1+\sigma_1)\delta > 0 \ \text{ e } \ 1 - \delta > 0,$$

obtemos

$$K_1\mathcal{E}(t) \leq H(t) \leq K_2\mathcal{E}(t),$$

onde

$$K_1 = \min\{(1 - C_0(1+\sigma_1)\delta)\,, 1 - \delta\} > 0$$

e

$$K_2 = \max\{(1 + C_0(1+\sigma_1)\delta)\,, 1 + \delta\} > 0.$$

∎

Finalmente, o próximo resultado mostra que a energia total do sistema decai exponencialmente a zero quando $t \to \infty$.

Teorema 3.4. *Seja $\mathcal{E}(t)$ a Energia do sistema* (1)-(4), *dada pela expressão* (22)*. Então existem constantes $C, \gamma > 0$ tais que*

$$\mathcal{E}(t) \leq C\mathcal{E}(0)\exp(-\gamma t)\,, \forall\, t \geq 0.$$

Demonstração Dos Lemas 3.2 e 3.3 sabemos que

$$\frac{d}{dt}H(t) \leq -C_1\mathcal{E}(t) \leq -\frac{C_1}{K_2}H(t)$$

e, portanto,

$$H(t) \leq H(0)\exp\left(-\frac{C_1}{K_2}t\right).$$

Daí, utilizando novamente o Lema 3.3, obtemos

$$\mathcal{E}(t) \leq \frac{K_2}{K_1}\mathcal{E}(0)\exp\left(-\frac{C_1}{K_2}t\right),$$

isto é,

$$\mathcal{E}(t) \leq C\mathcal{E}(0)\exp\left(-\gamma t\right),$$

onde, $C = \frac{K_2}{K_1}$ e $\gamma = \frac{C_1}{K_2}$. ∎

4 Conclusões

A teoria de Semigrupos de Operadores Lineares Limitados mostrou-se uma ferramenta poderosa na demonstração de existência e unicidade de solução do problema (1)-(4). Na verdade, tal teoria pode ser aplicada a problemas muito mais gerais, incluindo os não-lineares. Quanto ao comportamento assintótico da solução, o método empregado pode ser utilizado em problemas de evolução mais gerais, com outras condições de contorno. O que se precisa, em geral, é encontar multiplicadores mais adequados a cada situação considerada. Claro está que, dependendo do tipo de dissipação considerada no modelo (dissipação localizada ou dissipação na fornteira, por exemplo), o método pode requerer cálculos mais sofisticados. Fica, no entanto, a perspectiva futura de abordar modelos não-lineares associados ao sistema (1)-(2) bem como considerar outros mecanismos de dissipação da energia.

Agradecimentos

O primeiro autor (D. Dalmolin) gostaria de agradecer à CAPES pelo suporte financeiro recebido enquanto cursava o mestrado em Matemática da Universidade Federal de Santa Maria. Ambos autores agradecem aos revisores pelas valiosas sugestões de alterações para a melhoria deste trabalho.

Referências

Achenbach, J. D., 1973. Wave Propagation in Elastic Solids.North-Holland Publishing Company, New York.

Adams, R. A., 1975. Sobolev Spaces. Academic Press.

Brezis, H., 2010. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer.

Ciarlet, P. G., 1993. Mathematical Elasticity. Vol. 1. North-Holland, Amsterdam.

Dafermos, C. M., 1968. On the existence and the asymptotic stability of solutions to the equations of linear thermoelasticity. Arch. Rational Mech. Anal. 29, 241–271.

Ferreira, M. V., Menzala, G. P., 2006. Energy decay for solutions to semilinear systems of elastic waves in exterior domains. Electronic Journal of Differential Equations 2006, 1–13.

Ferreira, M. V., Menzala, G. P., 2007. Uniform stabilization of an electromagnetic-elasticity problem in exterior domains. Discrete and Continuous Dynamical Systems 18 (4), 719–746.

Nowacki, W., 1962. Thermoelasticity. Pergamon Press, Oxford.

Pazy, A., 1983. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Springer-Verlag, New York.

Pereira, D. C., Menzala, G. P., 1989. Exponential decay of solutions to a coupled system of equations of linear thermoelasticity. Comp. Appl. Math. 8, 193–204.

Rivera, J. E. M., 1992. Energy decay rates in linear thermoelasticity. Funkcialaj Ekvacioj 35, 19–30.