LJILJANA CVETKOVIĆ, VLADIMIR KOSTIĆ
Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad

MODEL KOŠARKAŠKE UTAKMICE

Apstrakt: *Na osnovu faktora koji određuju košarkašku igru i koji se na osnovu prethodno odigranih utakmica mogu izraziti verovatnoćama, biće konstruisan matematički model jedne košarkaške utakmice, na osnovu koga se mogu izvršiti predviđanja rezultata. On, takođe, može poslužiti i za poboljšanje strategije igre u budućim susretima, jer daje odgovor na pitanje koliko značajno promene u pojedinim faktorima igre utiču na krajnji rezultat.*

Abstract: *Based on factors that govern basketball game, which can be expressed as probabilities upon already played games, a mathematical model of a paticular basketball game will be constructed in order to predict results. Moreover, it could be used for developing future strategies, because it gives the answer how significant changes in particular factors could affect the final result.*

Key words and phrases: *Basketball, mathematical modeling, Markov chains, iterative methods.*

1. UVOD

Mogućnosti primene matematike u oblasti sporta su brojne. O tome svedoči veliki broj publikacija (naučnih radova, monografija, na primer, [3]), specijalizovane konferencije, pa čak i organizacije, odnosno udruženja, kakvo je, na primer, *MathSport - special interest group of ANZIAM (Australia and New Zealand Industrial Applied Mathematics)*, o kome se informacije mogu potražiti na njeb adresi *www.anziam.org.au/MathSport*. Oblasti matematike koje nalaze primenu u sportu su, pre svega, verovatnoća i statistika, zatim linearno programiranje, optimizacija, rešavanje sistema linearnih i nelinearnih jednačina, iterativni postupci, i brojni

Ovaj rad delimično je finansiran od strane Ministarstva za nauku, tehnologiju i razvoj Republike Srbije, projekat 1771

drugi. Često je u okviru jednog matematičkog modela potrebno primeniti znanja iz više oblasti. Jedan upravo takav matematički model biće prezentovan u ovom radu, uz napomenu da nećemo, bar ne previše, naglašavati teoriju koja prati i podržava izlaganje koje sledi. Ona se, naime, može naći u odgovarajućim referencama ([1],[2]).

Matematički model koji ćemo predstaviti jeste model košarkaške utakmice. On, svakako, može doprineti adekvatnijem i preciznijem praćenju rezultata određenog tima, međutim, informacije koje se mogu dobiti pri implementaciji modela mogu ukazati, kako na trenutnu uspešnost tima, tako i na moguće strategije daljeg razvoja.

Rad je organizovan u četiri dela. U drugom delu dajemo pregled neophodnog matematičkog aparata. U trećem delu predstavljamo sam model i algoritam njegove implementacije. Četvrti deo sadrži numeričke oglede i zaključke izvedene na osnovu njih.

2. LANCI MARKOVA

Osnova našeg matematičkog modela jesu *homogeni lanci Markova.* Oni su posebna vrsta stohastičkih procesa, odnosno procesa koji opisuju događaje odigravane na slučajan način. Tipičan stohastički proces predviđa kretanje objekta koji se može nalaziti u tačno jednom stanju u datom trenutku. Verovatnoća koju je potrebno proceniti zavisi od:

- vremena,
- stanja u kojem se objekat nalazi i u koje se premešta,
- nekih ili svih stanja u kojima se objekat već nalazio i
- stanja u kojima se nalaze (ili su se nalazili) drugi objekti.

Neformalno rečeno, proces kod koga verovatnoća premeštanja objekta iz jednog stanja u drugo zavisi samo od ova dva stanja (u kome se objekat nalazi i u koji se premešta), a ne i od ostalih faktora, naziva se *homogeni proces Markova.* Pošto su ova premeštanja diskretna (u vremenu), korektna matematička definicija glasi ovako:

Definicija: *Konačnim homogenim lancem Markova nazivamo sistem koji se sastoji od*

Definicija: *Konačnim homogenim lancem Markova nazivamo sistem koji se sastoji od*

1) *skupa stanja* $S=\{s_1,s_2,...,s_n\}$,

2) *matrice prelaza* $T=[t_{ij}]\in \mathbb{R}^{n\times n}$, *gde je* t_{ij} *verovatnoća da će se sistem premestiti u stanje* s_j *ako se pre toga nalazio u stanju* s_i, *i*

3) *vektora* $p^0=[p_1^0,p_2^0,...,p_n^0]^T$, *gde je* p_i^0 *verovatnoća da se sistem na početku nalazi u stanju* s_i.

Iz prethodne definicije mogu se pročitati neke osobine matrice prelaza i vektora p^0:

- za svako $i\in N:=\{1,2,...,n\}$ važi $\sum_{j=1} t_{ij}=1$,
- $\sum_{i=1}^{n} p_i^0=1$.

Obeležimo sa S_k^m događaj da se u trenutku i sistem nalazi u stanju s_k. Tada je

$$p_i^0=P(S_i^0) \quad \text{i} \quad t_{ij}=P(S_j^{m+1}\mid S_i^m),\ i,j\in N$$

za proizvoljan trenutak m, jer verovatnoće prelaza ne zavise od vremena.

Dalje, ukoliko u trenutku m sa p_i^m označimo verovatnoću da se sistem nađe u stanju s_i tada se verovatnoća da se u sledećem trenutku sistem nađe u stanju s_i izračunava na sledeći način:

$$p_i^{m+1}=P(S_i^{m+1})=\sum_{j=1}^{n} P(S_i^{m+1}\mid S_j^m)P(S_j^m)=\sum_{j=1}^{n} t_{ji}p_j^m .$$

Ako je $p^m=[p_1^m,p_2^m,...,p_n^m]^T$ vektor raspodele verovatnoća u trenutku m, veza između dva uzastopna takva vektora može se izraziti pomoću transponovane matrice za matricu T :

$$p^{m+1}=T^T p^m . \tag{1}$$

Već na osnovu ovoga možemo zaključiti da, polazeći od inicijalne raspodele verovatnoća, poznajući matricu prelaza T, možemo izračunati raspodelu verovatnoća u željenom (proizvoljnom) trenutku. Međutim, za prognoziranje na osnovu modela nije dovoljno poznavanje samo ovih raspodela verovatnoća. Potrebno je znati i tzv. vektor graničnih verovatnoća, tj. vektor p^*, za koji je $p^* = T^T p^*$. On se može izračunati iterativnim postupkom (1), pod određenim pretpostavkama o matrici prelaza T.

3. MODEL KOŠARKAŠKE UTAKMICE

U toku jedne košarkaške utakmice između tima A i tima B uočimo sledeća stanja:

s_1 - tim A prelazi u napad,

s_2 - probijajući napad tima A,

s_3 - koš postignut za tim A,

s_4 - slobodno bacanje presuđeno u korist tima A,

s_5 - loptu poseduje tim B u odbrani,

s_6 - tim B prelazi u napad,

s_7 - probijajući napad tima B,

s_8 - koš postignut za tim B,

s_9 - slobodno bacanje presuđeno u korist tima B,

s_{10} - loptu poseduje tim A u odbrani,

i sledeće verovatnoće koje opisuju uspešnost, odnosno spremnost timova:

p_{effA}, p_{effB} - verovatnoća organizovanja probijajućeg napada tima A odnosno tima B,

p_{dA}, p_{dB} - verovatnoća uspešne odbrane tima A odnosno tima B,

p_{tA}, p_{tB} - verovatnoća ostajanja u napadu tima A odnosno tima B,

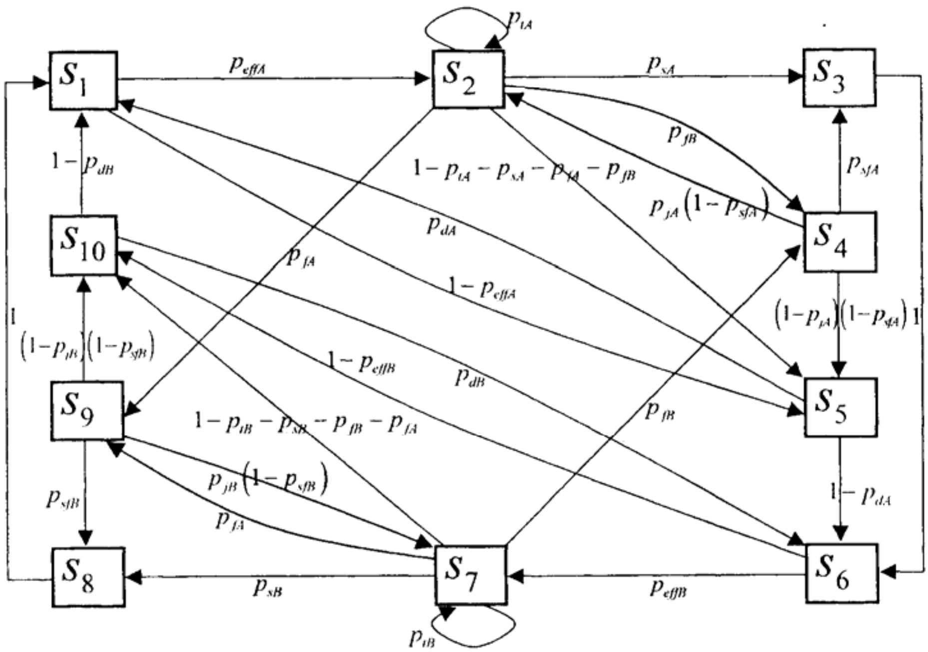
p_{sA}, p_{sB} - verovatnoća postizanja koša tima A odnosno tima B iz napada,

p_{sfA}, p_{sfB} - verovatnoća postizanja koša tima A odnosno tima B iz slobodnog bacanja,

p_{fA}, p_{fB} - verovatnoća pravljenja prekršaja koji dovodi do slobodnog bacanja tima A odnosno tima B ,

p_{jA}, p_{jB} - verovatnoća uspešnog skoka nakon svog slobodnog bacanja za tim A odnosno tim B .

Tada model možemo prikazati sledećim grafom:



gde su na strelicama ispisane odgovarajuće verovatnoće prelaza. Matrica prelaza je, dakle:

$$T=\begin{bmatrix}
0 & p_{effA} & 0 & 0 & 1-p_{effA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & p_{tA} & p_{sA} & p_{fB} & 1-p_{tA}-p_{sA}-p_{fA}-p_{fB} & 0 & 0 & 0 & p_{fA} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & p_{jA}(1-p_{sfA}) & p_{sfA} & 0 & (1-p_{jA})(1-p_{sfA}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
p_{dA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p_{dA} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{effB} & 0 & 0 & 1-p_{effB}\\
0 & 0 & 0 & p_{fB} & 0 & 0 & p_{tB} & p_{sB} & p_{fA} & 1-p_{tB}-p_{sB}-p_{fB}-p_{fA}\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{jB}(1-p_{sfB}) & p_{sfB} & 0 & (1-p_{jB})(1-p_{sfB})\\
1-p_{dB} & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{dB} & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

Već smo napomenuli da je potrebno, ukoliko je to moguće, izračunati vektor p^*, tj. ispitati konvergenciju iterativnog postupka

$$p^{k+1}=T^T p^k,\quad k=0,1,2,\ldots \tag{2}$$

za dato p^0. Pri tome se pozivamo na teoriju konvergencije iterativnih postupaka za rešavanje singularnih sistema linearnih jednačina, pogledati, na primer, [1].

Za matricu T^T možemo zaključiti sledeće:

- $T^T \geq 0$ pod uslovom da verovatnoće koje opisuju uspešnost, odnosno spremnost timova:

$$p_{effA}, p_{effB}, p_{dA}, p_{dB}, p_{tA}, p_{tB}, p_{sA}, p_{sB}, p_{sfA}, p_{sfB}, p_{fA}, p_{fB}, p_{jA}, p_{jB}$$

predstavljaju realno moguće verovatnoće;

- $\left\|T^T\right\|_1 = 1$;
- $\rho\left(T^T\right)=1$;
- T^T je nerazloživa matrica;
- $\lambda=1$ je jednostruk karakteristični koren matrice T^T;
- $\delta\left(T^T\right):=\max\left\{|\lambda| : \lambda\in\sigma\left(T^T\right), \lambda\neq\rho\left(T^T\right)\right\}<1$.
- T^T je semikonvergentna.

Na osnovu ovih osobina matrice T^T sledi konvergencija iterativnog postupka (2) ka jedinstvenom pozitivnom vektoru p^*, koji se može približno izračunati pomoću sledećeg algoritma.

Algoritam:

Korak 1. **Biraj proizvoljno p^0 sa osobinom $\sum_{i=1}^{n} p_i^0 = 1$ i stavi $p^k = p^0$**

Korak 2. **Unesi vrednosti za**

$$p_{effA}, p_{effB}, p_{dA}, p_{dB}, p_{tA}, p_{tB}, p_{sA}, p_{sB}, p_{sfA}, p_{sfB}, p_{fA}, p_{fB}, p_{jA}, p_{jB},$$

sve iz intervala $[0,1]$, tako da je

$$p_{tA} + p_{sA} + p_{fA} + p_{fB} \le 1, \; p_{tB} + p_{sB} + p_{fB} + p_{fA} \le 1$$

Korak 3. **Formiraj matricu T**

Korak 4. **Računaj $p^{k+1} = T^T p^k$**

Korak 5. **Ako je $\| p^{k+1} - p^k \|$ manje od unapred zadate tačnosti, proglasi $p^* = p^k$**

KRAJ. **Inače, stavi $p^k = p^{k+1}$ i pređi na Korak 4.**

4. NUMERIČKI OGLEDI

Da bismo uočili uticaj pojedinih faktora igre na ukupan rezultat (on se ogleda u trećoj i osmoj komponenti vektora p^*), podatke o ekipi B nećemo menjati, a u podacima ekipe A menjaćemo jedan po jedan faktor. Rezultat utakmice prognoziraćemo tako što ćemo verovatnoće postizanja koša (p_3^* i p_8^*) množiti sa pretpostavljenim brojem "ciklusa" igre (800-1000).

Podaci za tim B neka su:

$$p_{effB} = 0.6, \; p_{dB} = 0.4, \; p_{tB} = 0.2, \; p_{sB} = 0.6, \; p_{sfB} = 0.75, \; p_{jB} = 0.4, \; p_{fB} = 0.05$$

Menjajući jedan po jedan faktor igre tima *A* zaključujemo koliko je značajan njegov uticaj na ukupan rezultat:

p_{effA}	p_{dA}	p_{tA}	p_{sA}	p_{sfA}	p_{jA}	p_{fA}	Prognozirani rezultat	
							800 ciklusa	1000 ciklusa
0.6	0.4	0.2	0.6	0.75	0.4	0.05	**72:72**	**90:90**
0.7	0.4	0.2	0.6	0.75	0.4	0.05	**80:72**	**100:91**
0.75	0.4	0.2	0.6	0.75	0.4	0.05	**84:73**	**105:91**
0.6	**0.5**	0.2	0.6	0.75	0.4	0.05	**74:70**	**93:88**
0.6	**0.6**	0.2	0.6	0.75	0.4	0.05	**77:68**	**98:85**
0.6	0.4	**0.3**	0.6	0.75	0.4	0.05	**79:72**	**99:91**
0.6	0.4	0.2	**0.7**	0.75	0.4	0.05	**82:74**	**102:92**
0.6	0.4	0.2	**0.75**	0.75	0.4	0.05	**86:74**	**108:93**
0.6	0.4	0.2	0.6	**0.8**	0.4	0.05	**73:72**	**91:90**
0.6	0.4	0.2	0.6	0.75	**0.6**	0.05	**73:72**	**91:90**
0.6	0.4	0.2	0.6	0.75	0.4	**0**	**72:66**	**90:82**
0.6	0.4	0.2	0.6	0.75	0.4	**0.1**	**73:79**	**91:98**
0.55	**0.5**	0.2	0.6	0.75	0.4	0.05	**70:70**	**88:87**
0.55	0.4	**0.3**	0.6	0.75	0.4	0.05	**75:72**	**93:90**
0.55	0.4	0.2	**0.7**	0.75	0.4	0.05	**77:73**	**96:92**

Iz tabele možemo zaključiti sledeće:

- Povećanje efikasnosti napada i povećanje efikasnosti šuta najviše utiču na poboljšanje rezultata.
- Pojačanje odbrane i produženje napada nešto manje, ali takođe značajno poboljšavaju rezultat.
- Kod relativno fer igre, uticaj efikasnosti slobodnih bacanja i efikasnosti skoka pod protivničkim košem je mali, ali može doneti pobedu.
- Ako su svi ostali faktori podjednaki kod oba tima, treba igrati sa što manje faula.
- Ako je efikasnost napada iz nekih razloga smanjena, ona se može "nadoknaditi" ili pojačanjem odbrane ili produženjem napada ili poboljšanjem šuta iz igre. Pri tome ova poboljšanja ne daju isti efekat...

LITERATURA:

[1] Berman, A., Plemmons, R.J., *Nonnegative matrices in the mathematical sciences*, SIAM, Philadelphia, 1994.
[2] Cvetković, Lj., *Convergence theory for the relaxation methods to solve systems of equations*, MB-5 PAMM, Technical University of Budapest, 1998.
[3] Sadovskii, L.E., Sadovskii, A.L., *Mathematics and Sports*, Mathematical World, Vol.3, American Mathematical Society, 1993.