Ljiljana Cvetković, Maja Kovačević, Vladimir Kostić [♣]
Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet

MATEMATIKA U FUNKCIJI OSAVREMENJAVANJA TEORIJE SPORTA

Matematički metodi se vrlo često primenjuju i u drugim oblastima ljudske delatnosti-ne samo u srodnim prirodnim naukama, već i u privredi, industriji, svakodnevnom životu. Danas kada smo svesni višestruke funkcije i značaja sportskih dogadjanja, neophodno je sagledati teoriju sporta i iz naučne perspektive. U okviru predvidjanja sportskih rezultata, odredjivanja optimalnih uslova treninga, sastavljanja timova, analize uspeha sportista i trenera, rangiranja timova i obrade rezultata, matematički metodi mogu dati značajan doprinos.

Naravno, matematički modeli zanemaruju mnoge faktore koji mogu presudno uticati na ishod sportskih takmičenja.To su, pre svega, psihološki faktori-motivacija, stres, uticaj publike, zatim vremenski uslovi, i druge okolnosti. Stoga za isti problem možemo napraviti više različitih modela, u zavisnosti od toga koje faktore ističemo, a koje zanemarujemo. Na sportskim stručnjacima ostaje da ocene koji od ponudjenih modela najbolje odgovara stvarnosti.

U ovom radu razmotrićemo različite načine rangiranja timova.

Naime, kada se završi neko sportsko nadmetanje, ili se okonča sezona, i svi rezultati su poznati, ostaje još da se na osnovu datih rezultata formira rang-lista za protekli period, tj. za dato takmičenje. Postoje razni načini da se takva lista sastavi-od anketa koje sprovode mediji, i koje su samim tim u najvećoj meri subjektivne, pa do različitih sistema bodovanja. Poželjno je da sistemi bodovanja budu matematički zasnovani, tj. da imaju odgovarajuće matematičko opravdanje.

Posmatrajmo problem rangiranja na primeru fudbalskog prvenstva.

U sezonama 1994-1995 i 1995-1996, Prva A liga sastojala se od 10 timova. Prvenstvo je bilo podeljeno na dva dela, i nakon prvog dela neki timovi bi napustili Prvu A ligu, dok bi drugi postali njeni novi članovi. U okviru jednog dela, svaka dva tima su se susrela po dva puta. Naredne dve sezone prvenstvo je igrano po novom sistemu-trokružno (svaka dva tima su se susrela po tri puta) i bez prelazaka u polusezoni, a liga je proširena na 12 članova.

[♣] Ovaj rad delimično je finansiran od strane Ministarstva za nauku i zaštitu životne sredine Republike Srbije, projekat 1771.

Ako posmatramo jedan period bez prelazaka (jednu polusezonu, odnosno jednu sezonu), sistem bodovanja 3-1-0 (3 boda za pobedu, 1 bod za nerešen rezultat i 0 bodova za poraz) je dovoljan da obezbedi fer rangiranje. Medjutim, ako želimo da sagledamo duži vremenski period, npr. da rangiramo timove na osnovu učinka u Prvoj A ligi za sve četiri sezone, situacija se znatno komplikuje. Prvo, sistem takmičenja je promenjen, kao i sastav Prve A lige. Timovi koji su bili članovi lige u različitim periodima imali su drugačiji sastav protivnika, tako da su i njihovi bodovi za poraz odnosno pobedu različite težine-u zavisnosti od jačine njihovih protivnika.

Dakle, pošto se timovi nisu susretali svako sa svakim jednak broj puta, moramo uzeti u obzir i jačinu protivnika.

Dalje, tim koji je duže vreme bio član lige (čak i ako nije postigao zavidan rezultat) ne sme biti oštećen u odnosu na tim koji je u medjusobnim susretima bio bolji, ili je ostvario nešto veći broj pobeda, ali se zadržao na listi samo jednu sezonu (pogotovu ako je te sezone struktura lige bila slabija), a to je upravo ono što bi se desilo ako bismo uvažavali samo pobede i poraze. Takođe, tim koji je u susretu sa jakim protivnikom postigao dosta pogodaka (čak i ako je konačan ishod meča poraz), mora dobiti nešto više od nule za svoj učinak.

Matematički model za datu situaciju možemo postaviti na sledeći način-pretpostavimo da svakom timu koji je u nekom periodu u toku ove četiri sezone bio član Prve A lige odgovara neki koeficijent snage. Što je taj koeficijent veći, to je tim jači i bolje rangiran. Neka je r pozitivan vektor čija i -ta komponenta, r_i, predstavlja koeficijent snage i -tog tima, u nekoj numeraciji. Ukupan skor i -tog tima tada možemo predstaviti izrazom:

$$s_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} r_j$$

gde je N ukupan broj timova, a a_{ij} je nenegativan broj koji zavisi od ishoda utakmica izmedju i -tog i j -tog tima. Neka je $A = \left[a_{ij} \right]$ matrica čiji su elementi a_{ij}. Pretpostavimo da je koeficijent snage svakog tima proporcionalan njegovom ukupnom skoru. Tada je

$$Ar = \lambda r$$

tj. r je pozitivan karakteristični vektor matrice A.

U [1] , Keener koristi sledeću teoremu da bi odgovorio na pitanje egzistencije rešenja ovakvog problema.

Teorema(Perron-Frobenius). Ako je A netrivijalna, nenegativna matrica, ona ima nenegativan karakteristični vektor r, koji odgovara pozitivnom karakterističnom korenu λ. Štaviše, ako je matrica A nerazloživa, tada je karakteristični vektor r strogo pozitivan, jedinstven i jednostruk, a odgovarajući karakteristični koren je po apsolutnoj vrednosti najveći karakteristični koren matrice A (tj. to je spektralni radijus matrice A).

Za izračunavanje rang-vektora r u tom slučaju možemo koristiti metod stepenovanja:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A^n r_0}{\left|A^n r_0\right|}=r$$

za proizvoljan nenegativan vektor r_0.

Preostaje da odredimo elemente matrice A. Ovaj deo modela je u najvećoj meri subjektivan, i zahteva sud sportskih eksperata. Da li vrednovati samo pobede i poraze, broj golova ili nešto treće?

Za rangiranje u američkom fudbalu, Keener predlaže više mogućnosti.

Jedan način je da za element a_{ij} uzimamo 1, 0.5 ili 0, u zavisnosti od toga da li je utakmica izmedju i -tog i j -tog tima završena pobedom, nerešenim rezultatom ili porazom i -tog tima. Ukoliko su se timovi i i j susreli više puta, a_{ij} je ukupan broj pobeda tima i . Pri tome, svaki element i -te vrste matrice podeljen je ukupnim brojem utakmica i -tog tima, da bi se sprečilo nagomilavanje bodova putem igranja dodatnih utakmica.

U našem slučaju, broj odigranih utakmica zavisi od toga koliko se tim zadržao u ligi, tj. takodje je jedan od pokazatelja jačine tima. Dalje, broj pobeda daje previše grubu ocenu, tako da ćemo posmatrati ukupan rezultat svih susreta i -tog i j -tog tima u toku četiri godine, i na osnovu toga odrediti elemente matrice. Ukoliko se timovi nisu susreli, odgovarajući element matrice je jednak nuli.

U toku posmatranog perioda, 21 tim se pojavio na listi Prve A lige. Numerišimo timove na sledeći način:

1.Partizan	11.Borac
2.Crvena Zvezda	12.Bečej
3.Vojvodina	13.Radnički BG

4.Rad
5.Zemun
6.OFK Beograd
7.Radnički Niš
8.Napredak
9.Rudar
10.Spartak
14.Hajduk Kula
15.Budućnost Podgorica
16.Proleter Zrenjanin
17.Čukarički
18.Mladost Lučani
19.Sloboda Užice
20.Obilić
21.Železnik

Matrica sa elementima 0, 1, 0.5 za ukupan skor tada ima sledeći oblik:

0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0.5
0	0	0	0	0	1	0.5	0	0.5	1	1	1	1	0	1	0.5	1	0	1	0	0
0	0	0	1	0	1	0.5	0.5	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0.5	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0.5	0.5	0	0	1	1	1	0	0.5	0	0	1	1	0	0	1	0	0
0	0	0	1	0.5	0	0	0	1	0.5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0.5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0.5	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0.5	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0.5	0	0	0	0	1	1	0.5	0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1
0	0	0	0.5	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0.5
0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
0	0	0.5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0.5	0	0	0	0

Primetimo da gornja matrica nije nerazloživa-vrsta koja odgovara timu Slobode sadrži sve nule (svi porazi), kao i kolona koja odgovara timu Obilića (sve pobede).

Koristeći programski paket Mathematica, lako nalazimo traženi rang vektor, i na osnovu njega dobijamo sledeću rang listu:

1.Crvena Zvezda
2.Obilić
3.Partizan
4.Vojvodina
5.Zemun
6.Bečej
7.Rad
11.OFK Beograd
12.Radnički Beograd
13.Radnički Niš
14.Proleter Zrenjanin
15.Železnik
16.Budućnost Podgorica
17.Napredak

8.Hajduk Kula	18.Borac
9.Mladost Lučani	19.Rudar
10.Čukarički	20.Spartak
	21.Sloboda Užice

Primećujemo da ovaj model ne vrednuje dovoljno vreme koje je tim proveo u Prvoj A ligi. Time se može objasniti visok plasman Obilića, (koji je bio član lige samo jednu sezonu), ili npr. bolji plasman Radničkog BG (samo pola sezone na listi) u odnosu na Radnički Niš. Ovakav izbor elemenata matrice ne pravi razliku izmedju poraza (u ukupnom skoru) i ispadanja sa liste-u oba slučaja tim dobija koeficijent nula. Takodje, metod zanemaruje gol razliku u ukupnom skoru-tim sa većim brojem pogodaka u medjusobnim susretima dobija 1 bod, dok protivnik dobija nulu bez obzira na to koliko je rezultat tesan.

Da bismo donekle ublažili ove nedostatke, moramo korigovati elemente matrice A.

Drugi način za odabir elemenata matrice je linearna raspodela jednog boda na dva tima, zavisno od ukupnog skora. Elemente matrice dobijamo na sledeći način:

$$a_{ij} = \frac{G_{ij} + 1}{G_{ij} + G_{ji} + 2}$$

gde je G_{ij} ukupan broj golova koje je i-ti tim postigao protiv j-tog tima.

Prednost ovakvog izbora je u tome što uvažava gol razliku. Takodje, tim dobija nenula koeficijent ukoliko je došlo do bar jednog susreta, čak i ako nije postigao nijedan pogodak. Medjutim, ovakav izbor omogućava boljim timovima da značajno poprave plasman postizanjem ogromne gol razlike protiv znatno slabijih protivnika.

Matrica A za ovakav izbor a_{ij} je nerazloživa, jer je ispunjen sledeći uslov:

Za svaka dva indeksa i i j postoji ceo broj $p \geq 0$ i niz indeksa $k_1, k_2, ..., k_p$, tako da važi $a_{ik_1} a_{k_1 k_2} ... a_{k_p j} \neq 0$.

Matrica A:

0	21/43	37/62	5/7	36/47	25/29	16/23	13/15	2/3	5/6	7/8	25/31	8/11	3/4	25/29	13/16	19/27	5/6	11/13	4/9	9/11
22/43	0	41/58	27/34	3/4	3/4	7/9	6/7	5/8	4/5	29/34	2/3	8/9	19/22	13/16	31/40	3/4	19/27	6/7	3/7	4/7
25/62	17/58	0	7/12	24/35	11/14	13/19	4/5	2/3	5/7	13/16	16/21	6/13	2/3	14/23	19/31	13/21	22/31	5/7	2/9	1/2
2/7	7/34	5/12	0	11/26	8/11	1/2	1/3	1/2	5/8	3/4	9/17	5/7	5/13	10/11	1/2	15/26	9/22	6/7	1/5	2/7
11/47	1/4	11/35	15/26	0	15/22	1/2	1/2	5/8	2/3	7/9	8/19	5/11	13/24	2/3	10/19	5/11	8/11	0	1/3	7/13
4/29	1/4	3/14	3/11	7/22	0	2/5	5/8	3/4	3/4	4/5	4/15	5/8	1/2	5/9	6/11	0	0	0	0	0
7/23	2/9	6/19	1/2	1/2	3/5	0	11/15	2/3	9/14	0	1/2	0	0	3/5	5/7	2/9	4/9	4/7	0	0
2/15	1/7	1/5	2/3	1/2	3/8	4/15	0	2/3	1/2	0	3/4	0	0	3/5	2/9	0	0	0	0	0
1/3	3/8	1/3	1/2	3/8	1/4	1/3	1/3	0	2/3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1/6	1/5	2/7	3/8	1/3	1/4	5/14	1/2	1/3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1/8	5/34	3/16	1/4	2/9	1/5	0	0	0	0	0	7/16	2/3	5/16	5/8	2/3	1/8	6/17	0	0	0
6/31	1/3	5/21	8/17	11/19	11/15	1/2	3/4	0	0	9/16	0	3/4	6/13	9/14	5/9	7/10	3/11	3/5	0	0
3/11	1/9	7/13	2/7	6/11	3/8	0	0	0	0	1/3	1/4	0	1/2	0	0	0	0	0	0	0
1/4	3/22	1/3	8/13	11/24	1/2	0	0	0	0	11/16	7/13	1/2	0	5/8	10/23	6/13	10/17	0	1/14	4/9
4/29	3/16	9/23	1/11	1/3	4/9	2/5	2/5	0	0	3/8	5/14	0	3/8	0	13/25	6/11	2/3	0	1/6	6/11
3/16	9/40	12/31	1/2	9/19	5/11	2/7	7/9	0	0	1/3	4/9	0	13/23	12/25	0	3/7	7/12	5/8	3/8	2/3
8/27	1/4	8/21	11/26	6/11	0	7/9	0	0	0	7/8	3/10	0	7/13	5/11	4/7	0	10/21	4/5	1/4	1/2
1/6	8/27	9/31	13/22	3/11	0	5/9	0	0	0	11/17	8/11	0	7/17	1/3	5/12	11/21	0	3/5	1/7	7/11
2/13	1/7	2/7	1/7	0	0	3/7	0	0	0	0	2/5	0	0	0	3/8	1/5	2/5	0	0	0
5/9	4/7	7/9	4/5	2/3	0	0	0	0	0	0	0	0	13/14	5/6	5/8	3/4	6/7	0	0	2/3
2/11	3/7	1/2	5/7	6/13	0	0	0	0	0	0	0	0	5/9	5/11	1/3	1/2	4/11	0	1/3	0

Rang lista dobijena metodom stepenovanja izgleda ovako:

1.Partizan	11.Hajduk Kula
2.Crvena Zvezda	12.Mladost Lučani
3.Vojvodina	13.Budućnost Podgorica
4.Obilić	14.OFK Beograd
5.Zemun	15.Železnik
6.Rad	16.Napredak
7.Bečej	17.Borac
8.Proleter Zrenjanin	18.Rudar
9.Čukarički	19.Radnički Beograd
10.Radnički Niš	20.Spartak
	21.Sloboda Užice

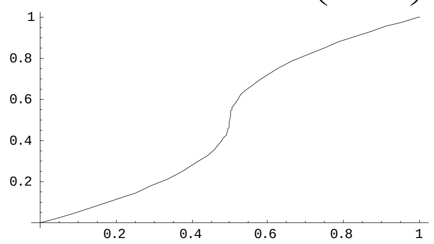
Partizan je izbio na čelo liste zahvaljujući boljoj gol razlici, bez obzira na manji broj pogodaka u medjusobnim susretima (21:20 u korist Crvene Zvezde).

Proleter je ostvario značajan pomak (sa13. na 8. mesto) jer je u duelima sa Zemunom, OFK Beogradom kao i protiv Budućnosti i Bečeja ostvario tesan rezultat, iako manji broj pogodaka od svojih protivnika (redom- 8:9, 4:5, 11:12, 7:9).Sa druge strane, gol razlika u susretima sa izrazito slabijim protivnicima ne bi smela previše da utiče na plasman jakih timova. Rezultati 6:0, 7:0, 8:0 moraju se vrlo slično tretirati. Stoga, treći način da odaberemo elemente matrice je nelinearna raspodela bodova:

$$a_{ij} = w\left(\frac{G_{ij}+1}{G_{ij}+G_{ji}+2}\right)$$

gde je funkcija w data sa:

$$w(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}\left(x - \frac{1}{2}\right)\sqrt{|2x-1|}$$



Uz takav izbor elemenata matrice značajno je pobediti, ali ne i ostvariti ogromnu gol razliku. Nova matrica je takodje nerazloživa, jer funkcija w očuvava raspored nula i nenula elemenata.Primenom metoda stepenovanja, rang lista dobija sledeći oblik:

1.Crvena Zvezda
2.Partizan
3.Vojvodina
4.Obilić
5.Zemun
6.Rad
7.Bečej
8.Proleter Zrenjanin
9.Čukarički
10.Radnički Niš
11.Mladost Lučani
12.Hajduk Kula
13.Železnik
14.OFK Beograd
15.Budućnost Podgorica
16.Napredak
17.Radnički Beograd
18.Borac
19.Rudar
20.Spartak
21.Sloboda Užice

Pošto je uticaj gol razlike sveden na manju meru, Partizan je ponovo na drugom mestu, i javlja se niz manjih pomeranja u donjem delu tabele.

Dakle, korigovanjem koeficijenata a_{ij} možemo stavljati naglasak na različite faktore. Za prvi izbor matrice, vrednujemo veći broj pogodaka u medjusobnim susretima, dok su gol razlika i vreme provedeno na listi zanemareni. U drugom slučaju gol razlika je u prvom planu, da bi njen uticaj bio donekle ublažen u trećoj varijanti modela. Naravno, postoje i druge mogućnosti za formiranje matrice. Pri tome neophodno je da sportski eksperti daju svoj sud o tome koji faktori su najbolji pokazatelji stvarnog kvaliteta timova.

LITERATURA

[1] Keener, J.P., The Perron-Frobenius Theorem and the Ranking of Football Teams, SIAM Review 35 (1993), 80-93.

[2] Sadovskiĭ,L.E., Sadovskiĭ, A.L., Mathematics and Sports, American Mathematical Society, 1993.

[3] Trefethen, L., Bau, D. III, Numerical Linear Algebra, SIAM 1997.

„Pobjeda”, 1. april 2005.

ПОЧЕО ПРВИ КОНГРЕС ЦРНОГОРСКЕ СПОРТСКЕ АКАДЕМИЈЕ

Свестрано о спорту

Котор, 31. марта - Први конгрес Црногорске спортске академије који је вечерас почео у Котору отворио је др **Душко Бјелица** у име организатора а одржавање овог научног скупа подржали су у име покровитеља директор Управе за спорт и омладину у Влади Црне Горе **Драган Дробњак** и предсједник ЦОК-а **Душан Симоновић**.

Конгрес који ће радити до недјеље окупио је бројне ауторе са простора екс Југославије и других земаља а 120 радова припремљено је на задате теме: технологија у спорту, друштвено економски односи у спорту и методологија рада у спорту.

Учеснике Конгреса писмом је поздравио црногорски премијер Мило Ђукановић истичући да је Црна Гора увијек показивала посебну пажњу и разумијевање за спорт као битну област промоције властитих потенцијала и укупне међународне афирмације. **Д. Д.**