УДК 530: 517.956
DOI:10.21209/2308-8761-2016-11-4-11-20

Святослав Евгеньевич Холодовский,
доктор физико-математических наук, профессор,
Забайкальский государственный университет
(672039, Россия, г. Чита, ул. Александро-Заводская, 30),
e-mail: hol47@yandex.ru

О математической модели динамических процессов в биоматериалах с трехслойными наноразмерными пленками[1]

В статье рассмотрена математическая модель процессов теплопроводности, диффузии, фильтрации и т. д. в цилиндрических областях $D = (x \in R) \times (y, z \in Q \subseteq R^2)$, разделенных пленкой на два полуцилиндра $D_1(x < 0)$ и $D_2(x > 0)$. Плёнка состоит из трех сильно- и слабопроницаемых слоев в произвольном их сочетании, что в задачах биологии соответствует многослойным мембранам, дренажам, фильтрующим и защитным экранам и т. д. Дифференциальное уравнение в зонах D_i может быть произвольного типа (эллиптического, параболического, гиперболического). С помощью метода свертывания разложений Фурье решения задач с плёнками выражены через решение аналогичной классической задачи без пленок. Получены аналитические решения конкретных задач в различных областях с трехслойными пленками.

Ключевые слова: краевые задачи, наноразмерные включения, математические методы в биологии, динамические процессы в неоднородных средах

Svyatoslav Ye. Kholodovskii,
Doctor of Physics and Mathematics, Professor,
Transbaikal State University
(30 Aleksandro-Zavodskaya st., Chita, 672039, Russia),
e-mail: hol47@yandex.ru

About Mathematical Models of Dynamic Processes in Biomaterials with Nanoscale Three-Layer Films[2]

The article considers a mathematical model of processes of heat conduction, diffusion, fltration, etc. in the cylindrical regions $D = (x \in R) \times (y, z \in Q \subseteq R^2)$, separated by a film into two half-cylinders $D_1(x < 0)$ and $D_2(x > 0)$. The film consists of three strongly and weakly permeable layers in an arbitrary combination, in problems of biology it corresponds to the multilayered membranes, the drainage tubes, filter and protective screens, etc. The differential equation in the zones Di can be of any type (elliptic, parabolic, hyperbolic). Using the method of Convolution of Fourier expansions, the solution of boundary value problems with the films is expressed through the solution of a similar classical problem without films. We obtained analytical solutions to specific problems in different areas with three-layer films.

Keywords: boundary value problems, nanoscale inclusions, mathematical methods in biology, dynamic processes in inhomogeneous media

[1]Работа выполнена в рамках Государственного задания вузу Министерства образования и науки Российской Федерации (проект 2014/255 НИР 2603.14).

[2]The work is performed in terms of the State task to higher education institution by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project 2014/255 Research work 2603.14).

Введение. Природные биологические материалы не являются однородными и содержат различные составляющие компоненты, в том числе пленочные включения типа мембран, экранов, завес, дренажей и т. д. В частности, организмы человека и животных, а также растения содержат множество пленочных включений. В математических моделях реальные процессы в неоднородных средах описываются краевыми задачами математической физики.

В данной статье рассмотрены задачи математической физики, описывающие достаточно широкий класс процессов (теплопроводности, фильтрации жидкости, диффузии, электростатики), в цилиндрических областях, содержащих трехслойную пленку. Пленка состоит из сильно- и слабопроницаемых прослоек, которые моделируются бесконечно тонкими слоями с бесконечно большой и соответственно бесконечно малой проницаемостью [1–3]. При этом многослойная пленка (мембрана) также является бесконечно тонкой.

Пленки типа (A_1BA_2). Рассмотрим в пространстве R^3 цилиндр $D = (x \in R) \times (y, z \in Q \subseteq R^2)$, разделенный трехслойной пленкой $x = 0$ на два полуцилиндра $D = (x < 0)$ и $D_2(x > 0)$, когда пленка состоит из сильнопроницаемой прослойки $x = -0$ с параметром A_1, слабопроницаемой прослойки $x = 0$ с параметром B и сильнопроницаемой прослойки $x = +0$ с параметром A_2. Параметр сильнопроницаемой прослойки равен пределу произведения бесконечно малой толщины прослойки на ее бесконечно большую проницаемость; параметр слабопроницаемой прослойки равен пределу частного бесконечно малой толщины прослойки на ее бесконечно малую проницаемость [Там же].

Для функций $u_i(x, y, z)$ в полуцилиндрах D_i краевая задача имеет вид [4]:

$$\partial_x^2 u_1 + Lu_1 = 0, \qquad Mu_{1|S} = 0, \qquad x < 0, \tag{1}$$

$$\partial_x^2 u_2 + Lu_2 = H(x, y, z), \qquad Mu_{2|S} = h(x, y, z), \qquad x > 0, \tag{2}$$

$$x = 0: \qquad u_2 - u_1 = B(v_1 + A_1\partial_x^2 u_1), \qquad v_2 - v_1 = A_1\partial_x^2 u_1 + A_2\partial_x^2 u_2, \tag{3}$$

где $\partial_x^n = \partial^n/\partial x^n$, $S = \partial D$ – боковая поверхность цилиндра D; $H = 0$ в окрестности пленки $x = 0$, $v_i = k_i\partial_x u_i$ – нормальные составляющие скорости, k_i – проницаемость зоны D_i, операторы L и M являются линейными дифференциальными оператором по переменным y, z, т. е. операторы L и M не содержат производных по x и коэффициенты при производных не зависят от x. Кроме того, операторы L, M и заданные функции $H(x, y, z)$, $h(x, y, z)$ (1, 2) считаются такими, для которых аналогичная классическая задача в цилиндре D без пленки вида

$$\partial_x^2 f + Lf = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ H(x, y, z) & x > 0, \end{cases} \qquad Mf_{|S} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ h(x, y, z) & x > 0 \end{cases} \tag{4}$$

корректна в некоторых пространствах функций. Отметим, что уравнения (1, 2) могут быть уравнениями любого типа (гиперболического, параболического, эллиптического), т. е. класс задач (1–3) достаточно широкий.

Выразим решение задачи (1–3) с пленкой через решение классической задачи (4) без пленки. Для вывода общих формул применим метод свертывания разложений Фурье [1–3]. В соответствии с указанным методом рассмотрим частные модельные случаи задач (1–4), допускающие применение метода Фурье. В качестве модельных задач рассмотрим простейшие случаи задач (1–3) и (4) на плоскости с декартовыми координатами x, y для оператора

Лапласа вида

$$\Delta u_1 = 0, \qquad x < 0; \qquad \Delta u_2 = H(x,y), \qquad x > 0 \tag{5}$$

с условиями сопряжения (3) и соответствующую задачу

$$\Delta f = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ H(x,y) & x > 0, \end{cases} \qquad |f| = O(1), \qquad x^2 + y^2 \to \infty, \tag{6}$$

где $H \in C(x > 0)$. Выразим решение задачи (5), (3) через решение $f(x,y)$ классической задачи (6).

Предположим сначала, что функция $f(0,y)$ разлагается в интеграл Фурье с коэффициентами Фурье $f_i(\lambda)$ [5, с. 529]

$$f(0,y) = \int_0^\infty g\, d\lambda, \qquad g(y,\lambda) = f_1(\lambda)\sin\lambda y + f_2(\lambda)\cos\lambda y, \tag{7}$$

где

$$f_i(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(0,y)\sigma_i(y,\lambda)dy, \qquad f(0,y) \to 0, \qquad |y| \to \infty,$$

$\sigma_1(y,\lambda) = \sin\lambda y$, $\sigma_2(y,\lambda) = \cos\lambda y$ (в окончательных формулах данное предположение несущественно). Отсюда функция $f(x,y)$ в полуплоскости $x < 0$, где она удовлетворяет уравнению Лапласа (6), представима в виде

$$f(x,y) = \int_0^\infty e^{\lambda x} g(y,\lambda)\, d\lambda, \qquad x \le 0 \tag{8}$$

(левая и правая части последнего равенства являются ограниченными решениями однозначно разрешимой задачи Дирихле в полуплоскости $\Delta u = 0$, $x < 0$, $u_{|x=0} = f(0,y)$).

Представим решение модельной задачи (5, 3) также в виде разложений Фурье:

$$u_1(x,y) = \int_0^\infty a_1 e^{\lambda x} g\, d\lambda, \qquad u_2(x,y) = f(x,y) + \int_0^\infty a_2 e^{-\lambda x} g\, d\lambda, \tag{9}$$

где функция $g(y,\lambda)$ имеет вид (7), $a_i(\lambda)$ – неизвестные параметры. Отсюда функции $u_i(x,y)$ удовлетворяют соответствующему уравнению (5) (при условии сходимости и дифференцируемости интегралов).

Из условий сопряжения (3) с учетом (8) находим

$$a_1(\lambda) = \frac{2k_2}{d(\lambda)}, \qquad a_2(\lambda) = -1 + \frac{2k_2(A_1 B\lambda^2 + k_1 B\lambda + 1)}{d(\lambda)}, \tag{10}$$

где

$$d(\lambda) = s\lambda^3 + B(k_1 A_2 + k_2 A_1)\lambda^2 + (A_1 + A_2 + Bk_1 k_2)\lambda + k_1 + k_2, \tag{11}$$

$s = A_1BA_2$.

Из разложения функции $f(x,y)$ (8) следует равенство $f(x-t,y) = \int_0^\infty e^{\lambda(x-t)}gd\lambda$, $x < 0$, $t > 0$. Умножая это равенство на $e^{-\gamma t}t^n$ и интегрируя по $t \in (0,\infty)$, с учетом $\int_0^\infty e^{-at}t^n dt = n!a^{-n-1}$, $a > 0$ получим формулу

$$\frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-\gamma t}t^n f(x-t,y)dt = \int_0^\infty \frac{e^{\lambda x}g(y,\lambda)}{(\lambda+\gamma)^{n+1}}d\lambda, \qquad x<0, \tag{12}$$

где $Re\gamma > 0$, $n = 0,1,2,...$; $g(y,\lambda)$ имеет вид (7). Отсюда, раскладывая правильные дроби (10) на простейшие, в случаях $d = s(\lambda+\gamma_1)(\lambda+\gamma_2)(\lambda+\gamma_3)$, $\gamma_i \neq \gamma_j$; $d = s(\lambda+\gamma_1)^2(\lambda+\gamma_2)$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$ и $d = s(\lambda+\gamma_1)^3$ приведем функции u_i (9) соответственно к виду (без разложений Фурье, т. е. без сильных осцилляций)

$$u_1 = \frac{2k_2}{s}\int_0^\infty f(x-t,y)\left(\frac{e^{-\gamma_1 t}}{\gamma_{21}\gamma_{31}} - \frac{e^{-\gamma_2 t}}{\gamma_{21}\gamma_{32}} + \frac{e^{-\gamma_3 t}}{\gamma_{31}\gamma_{32}}\right)dt, \tag{13}$$

$$u_2 = f(x,y) - f(-x,y) +$$

$$+\frac{2k_2}{s}\int_0^\infty f(-x-t,y)\left[\frac{N(\gamma_1)e^{-\gamma_1 t}}{\gamma_{21}\gamma_{31}} - \frac{N(\gamma_2)e^{-\gamma_2 t}}{\gamma_{21}\gamma_{32}} + \frac{N(\gamma_3)e^{-\gamma_3 t}}{\gamma_{31}\gamma_{32}}\right]dt; \tag{14}$$

$$u_1 = \frac{2k_2}{\gamma_{21}^2 s}\int_0^\infty f(x-t,y)[e^{-\gamma_1 t}(\gamma_{21}t-1) + e^{-\gamma_2 t}]dt, \tag{15}$$

$$u_2 = f(x,y) - f(-x,y) +$$

$$+\frac{2k_2}{\gamma_{21}^2 s}\int_0^\infty f(-x-t,y)\left(e^{-\gamma_2 t}N(\gamma_2) + e^{-\gamma_1 t}[\gamma_{21}N(\gamma_1)t - N(\gamma_2) + \gamma_{21}^2 A_1B]\right)dt \tag{16}$$

и

$$u_1 = \frac{k_2}{s}\int_0^\infty f(x-t,y)e^{-\gamma_1 t}t^2 dt, \tag{17}$$

$$u_2 = f(x,y) - f(-x,y) +$$

$$+\frac{2k_2}{s}\int_0^\infty f(-x-t,y)e^{-\gamma_1 t}[2^{-1}N(\gamma_1)t^2 + B(k_1 - 2A_1\gamma_1)t + A_1B]dt, \tag{18}$$

где $\gamma_{ij} = \gamma_i - \gamma_j$, $N(\gamma) = A_1B\gamma^2 - k_1B\gamma + 1$, постоянная s определена в (11), $-\gamma_i$ – корни многочлена $d(\lambda)$ (11), т. е.

$$-s\gamma_i^3 + B(k_1A_2 + k_2A_1)\gamma_i^2 - (A_1 + A_2 + Bk_1k_2)\gamma_i + k_1 + k_2 = 0. \tag{19}$$

Полученные формулы (13–18) справедливы для общего случая задач (1–3) и (4), при этом в указанных формулах переменная y заменяется на y, z.

Теорема 1. *Если функция $f(x,y,z)$ является решением корректной задачи (4) и при $x \to -\infty$ функция $f(x,y,z)$ вместе с производными, входящими в задачу (4), имеет асимп-*

тотику

$$|f(x,y,z)| = O(e^{\gamma|x|}), \qquad 0 < \gamma < \min Re\gamma_i, \tag{20}$$

где $-\gamma_i$ – корни многочлена (11), то решение задачи (1–3) существует, единственно и в соответствующих случаях корней многочлена (11) выражается через функцию $f(x,y,z)$ по формулам (13–18).

Доказательство. Если корни $-\gamma_i$ многочлена $d(\lambda)$ (11) действительны, то из неравенства $d(\lambda) > 0$ при $0 \le \lambda < \infty$ следует $\gamma_i > 0$, при этом интегралы (13–18) при условии (20) сходятся и допускают дифференцирование необходимое число раз.

В случае комплексных корней $-\gamma_{2,3} = -\delta \pm i\beta$ многочлена $d(\lambda)$ (11) функции u_j (13, 14) действительны. При этом $d = s(\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c) = s(\lambda + \gamma_1)(\lambda^2 + p\lambda + q)$, где квадратный трехчлен $\lambda^2 + p\lambda + q$ имеет комплексные корни $-\delta \pm i\beta$, $a = k_1 A_1^{-1} + k_2 A_2^{-1}$, $b = (A_1 + A_2 + Bk_1k_2)/s$, $c = (k_1 + k_2)/s$, $\delta = p/2$, $p = a - \gamma_1$. Отсюда $ab > c$, $d(0) = sc > 0$, $d(-a) = s(c - ab) < 0$. Тогда действительный корень $-\gamma_1$ многочлена $d(\lambda)$ лежит в интервале $(-a, 0)$, т. е. $-a < -\gamma_1 < 0$. При этом $p = 2\delta = a - \gamma_1 > 0$ или $\delta > 0$. Отсюда в интегралах (13, 14) $Re\gamma_{2,3} = \delta > 0$, т. е. эти интегралы при выполнении условия (20) (где $0 < \gamma < \delta$) сходятся.

Условия сопряжения (3) для функций (13–18) выполняются тождественно, что проверяется непосредственно. Аргументы функции $f(x,y,z)$ в формулах (13–18), кроме первого слагаемого в формулах (14, 16, 18) принадлежат области $D_1(x < 0)$, где условия задачи (4) для функции $f(x,y,z)$ однородны. При этом если функция $f(x,y,z)$ удовлетворяет однородному уравнению (4): $\partial_x^2 f + Lf = 0$ при $x < 0$, то функция $f(-x,y,z)$ удовлетворяет этому уравнению при $x > 0$. Отсюда условия задачи (1, 2) для функций (13–18) проверяются непосредственно.

Правые части формул (13–18) являются операторами, действующими на функцию $f(x,y,z)$ по одной переменной x (y, z – свободные параметры). Указанные операторы отображают решения задач (4) без пленки на решения задач (1–3) с пленкой. Построим обратные операторы, отображающие решения задач (1–3) с пленкой на решения классических задач (4), т. е. решим интегральные уравнения (13–18) относительно $f(x,y,z)$. Дифференцируя функцию $u_1(x,y,z)$ (13) по x и вычисляя интегралы по частям, получим

$$\frac{s}{2k_2}\partial_x u_1 = \int_0^\infty f(x-t,y,z)\left(-\frac{\gamma_1 e^{-\gamma_1 t}}{\gamma_{21}\gamma_{31}} + \frac{\gamma_2 e^{-\gamma_2 t}}{\gamma_{21}\gamma_{32}} - \frac{\gamma_3 e^{-\gamma_3 t}}{\gamma_{31}\gamma_{32}}\right) dt, \tag{21}$$

$$\frac{s}{2k_2}\partial_x^2 u_1 = \int_0^\infty f(x-t,y,z)\left(\frac{\gamma_1^2 e^{-\gamma_1 t}}{\gamma_{21}\gamma_{31}} - \frac{\gamma_2^2 e^{-\gamma_2 t}}{\gamma_{21}\gamma_{32}} + \frac{\gamma_3^2 e^{-\gamma_3 t}}{\gamma_{31}\gamma_{32}}\right) dt, \tag{22}$$

$$\frac{s}{2k_2}\partial_x^3 u_1 = f(x,y,z) - \int_0^\infty f(x-t,y,z)\left(\frac{\gamma_1^3 e^{\gamma_1 t}}{\gamma_{21}\gamma_{31}} - \frac{\gamma_2^3 e^{-\gamma_2 t}}{\gamma_{21}\gamma_{32}} + \frac{\gamma_3^3 e^{-\gamma_3 t}}{\gamma_{31}\gamma_{32}}\right) dt. \tag{23}$$

Умножая функции $\partial_x^i u_1(x,y,z)$ при $i = 0,1,2,3$ (13, 21–23) соответственно на $s(k_1 + k_2)/(2k_2)$, $A_1 + A_2 + Bk_1k_2$, $B(k_1A_2 + k_2A_1)$, s и складывая, с учетом равенства (19) найдем

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2k_2}[s\partial_x^3 u_1(x,y,z) + B(k_1A_2 + k_2A_1)\partial_x^2 u_1(x,y,z) +$$

$$+(A_1 + A_2 + Bk_1k_2)\partial_x u_1(x,y,z) + (k_1 + k_2)u_1(x,y,z)], \qquad x < 0. \tag{24}$$

Подставляя функцию $f(-x,y,z)$ (24) при $x>0$ в равенство (14), с учетом равенств (13, 21, 22) получим

$$f(x,y,z)=u_2(x,y,z)+\frac{1}{2k_2}[s\partial_\xi^3 u_1(\xi,y,z)+B(k_1A_2-k_2A_1)\partial_\xi^2 u_1(\xi,y,z)+$$

$$+(A_1+A_2-Bk_1k_2)\partial_\xi u_1(\xi,y,z)+(k_1-k_2)u_1(\xi,y,z)],\qquad x>0, \tag{25}$$

где $\xi=-x$. Для других случаев корней $-\gamma_i$ многочлена (19) из формул (15–18) функцию $f(x,y,z)$ также получим в виде (24, 25). С учетом условий сопряжения (3) для функции $f(x,y,z)$ (24, 25) при $x=0$ выполняются необходимые условия

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}_{|x=-0}=\frac{\partial^k f}{\partial x^k}_{|x=+0},\qquad k=0,1,2,$$

т. е. функция $f(x,y,z)$ непрерывная и достаточно гладкая. При этом если функции $u_{1,2}(x,y,z)$ являются решением задач (1–3), то функция $f(x,y,z)$ (24, 25) удовлетворяет условиям задачи (4), что проверяется непосредственно. Из единственности решения $f(x,y,z)$ задачи (4) следует единственность решения (13–18) задач (1–3). Теорема доказана.

Пленки типа (B_1AB_2). Рассмотрим для функций $u_i(x,y,z)$ в полуцилиндрах D_i класс задач (1, 2),

$$x=0:\qquad u_2-u_1=B_1v_1+B_2v_2,\qquad v_2-v_1=A\partial_x^2(u_1+B_1v_1), \tag{26}$$

где $v_i=k_i\partial_x u_i$. В данном случае полуцилиндры D_i разделены трехслойной пленкой, состоящей из слабопроницаемой прослойки $x=-0$ с параметром B_1, сильнопроницаемой прослойки $x=0$ с параметром A и слабопроницаемой прослойки $x=+0$ с параметром B_2 [4]. Решение соответствующей модельной задачи (5, 26) имеет вид (9), где

$$a_1(\lambda)=\frac{2k_2}{d(\lambda)},\qquad a_2(\lambda)=1-\frac{2(AB_1k_1\lambda^2+A\lambda+k_1)}{d(\lambda)}, \tag{27}$$

$$d(\lambda)=s\lambda^3+A(k_1B_1+k_2B_2)\lambda^2+(A+\beta_1+\beta_2)\lambda+k_1+k_2, \tag{28}$$

$s=B_1AB_2k_1k_2$, $\beta_i=B_ik_1k_2$, $f(x,y)$ – решение задачи (6). Отсюда, раскладывая правильные дроби (27) на простейшие, в случаях $d=s(\lambda+\gamma_1)(\lambda+\gamma_2)(\lambda+\gamma_3)$, $\gamma_i\neq\gamma_j$; $d=s(\lambda+\gamma_1)^2(\lambda+\gamma_2)$, $\gamma_1\neq\gamma_2$ и $d=s(\lambda+\gamma_1)^3$ функции u_i (9) с учетом формулы (12) приведем соответственно к виду

$$u_1=\frac{2k_2}{s}\int_0^\infty f(x-t,y,z)\left(\frac{e^{-\gamma_1 t}}{\gamma_{21}\gamma_{31}}-\frac{e^{-\gamma_2 t}}{\gamma_{21}\gamma_{32}}+\frac{e^{-\gamma_3 t}}{\gamma_{31}\gamma_{32}}\right)dt, \tag{29}$$

$$u_2=f(x,y,z)+f(-x,y,z)-$$

$$-\frac{2}{s}\int_0^\infty f(-x-t,y,z)\left[\frac{N(\gamma_1)e^{-\gamma_1 t}}{\gamma_{21}\gamma_{31}}-\frac{N(\gamma_2)e^{-\gamma_2 t}}{\gamma_{21}\gamma_{32}}+\frac{N(\gamma_3)e^{-\gamma_3 t}}{\gamma_{31}\gamma_{32}}\right]dt; \qquad (30)$$

$$u_1=\frac{2k_2}{\gamma_{21}^2 s}\int_0^\infty f(x-t,y,z)[e^{-\gamma_1 t}(\gamma_{21}t-1)+e^{-\gamma_2 t}]dt, \qquad (31)$$

$$u_2=f(x,y,z)+f(-x,y,z)-$$

$$-\frac{2k_2}{\gamma_{21}^2 s}\int_0^\infty f(-x-t,y,z)\left(e^{-\gamma_2 t}N(\gamma_2)+e^{-\gamma_1 t}[\gamma_{21}N(\gamma_1)t-N(\gamma_2)+\gamma_{21}^2AB_1k_1]\right)dt \qquad (32)$$

и

$$u_1=\frac{k_2}{s}\int_0^\infty f(x-t,y,z)e^{-\gamma_1 t}t^2dt, \qquad (33)$$

$$u_2=f(x,y,z)+f(-x,y,z)-$$

$$-\frac{2}{s}\int_0^\infty f(-x-t,y,z)e^{-\gamma_1 t}[2^{-1}N(\gamma_1)t^2+A(1-2B_1k_1\gamma_1)t+AB_1k_1]dt, \qquad (34)$$

где $-\gamma_i$ – корни многочлена $d(\lambda)$ (28), т. е.

$$-s\gamma_i^3+A(k_1B_1+k_2B_2)\gamma_i^2-(A+\beta_1+\beta_2)\gamma_i+k_1+k_2=0,$$

$\gamma_{ij}=\gamma_i-\gamma_j$, $N(\gamma)=AB_1k_1\gamma^2-A\gamma+k_1$; s и β_i определены в (28).

Теорема 2. *Если функция $f(x,y,z)$ является решением корректной задачи (4) и при $x\to-\infty$ функция $f(x,y,z)$ вместе с производными, входящими в задачу (4), имеет асимптотику (20), то решение задач (1, 2, 26) существует, единственно и в соответствующих случаях корней многочлена (28) выражается через функцию $f(x,y,z)$ по формулам (29–34).*

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы, при этом оператор, обратный операторам (29–34) имеет вид

$$f(x,y,z)=\frac{1}{2k_2}[s\partial_x^3u_1(x,y,z)+A(k_1B_1+k_2B_2)\partial_x^2u_1(x,y,z)+$$

$$+(A+\beta_1+\beta_2)\partial_xu_1(x,y,z)+(k_1+k_2)u_1(x,y,z)], \qquad x<0,$$

$$f(x,y,z)=u_2(x,y,z)-\frac{1}{2k_2}[s\partial_\xi^3u_1(\xi,y,z)+A(k_2B_2-k_1B_1)\partial_\xi^2u_1(\xi,y,z)+$$

$$+(\beta_1+\beta_2-A)\partial_\xi u_1(\xi,y,z)+(k_2-k_1)u_1(\xi,y,z)], \qquad x>0,$$

где $\xi=-x$.

Отметим, что условие на бесконечности (20) для функции $f(x,y,z)$ в рассмотренных случаях является достаточно слабым, т. е. полученные несобственные интегралы (13–18), (29–34) для функций $u_i(x,y,z)$ сходятся достаточно быстро.

Таким образом, формулы (13–18), (29–34) устанавливают взаимнооднозначное соответствие между решениями рассмотренных задач с пленками и решениями аналогичных классических задач вида (4) без пленки при сохранении области D, уравнения и внешних граничных условий.

Частные случаи. Рассмотрим конкретные задачи в различных областях с пленочными включениями, для которых решение соответствующей задачи без пленки, т. е. функция $f(x,y,z)$, строится в конечном виде, при этом решение задач с пленками строится по выведенным формулам в однократных квадратурах.

Фундаментальные решения для уравнения Лапласа на всей плоскости $P_0 = R^2$, в полуплоскости $P_1 = (x \in R) \times (0 < y < \infty)$ и в полосе $P_2 = (x \in R) \times (0 < y < \pi)$ с однородными граничными условиями Дирихле на $\partial P_{1,2}$ имеют соответственно вид

$$f(x,y) = \frac{1}{4\pi} \ln[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2], \qquad x_0 > 0, \tag{35}$$

$$f(x,y) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2}, \qquad x_0 > 0, \qquad y_0 > 0 \tag{36}$$

и

$$f(x,y) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\operatorname{ch}(x-x_0) - \cos(y-y_0)}{\operatorname{ch}(x-x_0) - \cos(y+y_0)}, \qquad x_0 > 0, \qquad 0 < y_0 < \pi, \tag{37}$$

при этом функция $f(x,y)$ в соответствующей области удовлетворяет условиям $\Delta f = \delta(x-x_0, y-y_0)$, $f_{|\partial P_{1,2}} = 0$, где $\delta(x,y)$ – функция Дирака. Тогда фундаментальные решения аналогичных задач в кусочно-однородных областях P_j, $j = 0,1,2$ проницаемости k_i в D_{ij}, $i = 1,2$, с трехслойными пленками $x = 0$ строятся по найденным формулам (13–18), (29–34), где $D_{1j}(x < 0)$, $D_{2j}(x > 0)$; переменная $y \in R$, $0 < y < \infty$, $0 < y < \pi$ соответственно при $j = 0,1,2$ и в указанных формулах функция $f(x,y)$ соответственно равна (35–37).

Рассмотрим в полуплоскости $P_1(y > 0)$ задачу Дирихле

$$\Delta f = 0, \qquad f_{|y=0} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ h(x) & x > 0, \end{cases} \qquad |f(x,y)| = O(1), \tag{38}$$

решение которой имеет вид

$$f(x,y) = \frac{y}{\pi} \int_0^\infty \frac{h(t)dt}{(x-t)^2 + y^2}.$$

При этом для граничной функции вида «ступеньки»

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (x_1, x_2), \\ c & x \in (x_1, x_2), \end{cases} \qquad x_1 > 0, \tag{39}$$

решение задачи (38) строится в конечном виде

$$f(x,y) = \frac{c}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{x-x_1}{y} - \operatorname{arctg}\frac{x-x_2}{y}\right). \tag{40}$$

Также решение задачи Дирихле в полосе $P_2(0 < y < \pi)$

$$\Delta f = 0, \qquad f_{|y=0} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ h(x) & x > 0, \end{cases} \qquad f_{|y=\pi} = 0$$

строится по формуле

$$f(x,y) = \frac{\sin y}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{h(t)dt}{\operatorname{ch}(x-t) - \cos y}$$

и для граничной функции (39) имеет конечный вид

$$f(x,y) = \frac{c}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{\cos y - e^{x_1 - x}}{\sin y} - \operatorname{arctg}\frac{\cos y - e^{x_2 - x}}{\sin y}\right). \tag{41}$$

Функция Грина $f(x,t,\xi)$ задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности: $\partial_t f - \partial_x^2 f = 0$, $f_{|t=0} = \delta(x-\xi)$, имеет вид [6, с. 222]:

$$f(x,t,\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right], \qquad \xi > 0, \qquad x \in R, \qquad t > 0. \tag{42}$$

Тогда решения аналогичных задач в соответствующих кусочно-однородных областях с трехслойными пленками $x = 0$ выражаются через функции f (40–42) в однократных квадратурах (13–18), (29–34).

Если пленка отсутствует (идеальный контакт полуцилиндров D_i), то решение задачи (1, 2) с классическими условиями сопряжения

$$x = 0: \qquad u_1 = u_2, \qquad k_1\partial_x u_1 = k_2\partial_x u_2$$

получим в виде

$$u_1 = \frac{2k_2}{k_1+k_2}f(x,y,z), \qquad u_2 = f(x,y,z) + \frac{k_2-k_1}{k_1+k_2}f(-x,y,z),$$

где $f(x,y,z)$ – решение задачи (4). Отсюда в частном случае уравнения Лапласа следуют формулы, полученные методом отражения особых точек [7].

Список литературы

1. Kholodovskii S. E. A Method of Convolution of Fourier Expansions as Applied to Solving Boundary Value Problems with Intersecting Interface Lines // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2007. Vol. 47, No. 9. P. 1489–1495.

2. Kholodovskii S. E. The Convolution Method of Fourier Expansions. The Case of Generalized Transmission Conditions of Crack (Screen) Type in Piecewise Inhomogeneous Media // Differential Equations. 2009. Vol. 45, No. 6. P. 873–877.

3. Холодовский С. Е. О многослойных пленках на границе полупространства // Математические заметки. 2016. Т. 99. Вып. 3. С. 421–427.

4. Холодовский С. Е. Задачи математической физики в областях с пленочными включениями. Чита: Забайкал. гос. ун-т, 2015. 232 с.

5. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1962. Т. 3. 656 с.

6. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 с.

7. Голубева О.В. Обобщение теоремы об окружности на фильтрационные течения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 1. С. 113–116.

References

1. Kholodovskii S. E. A Method of Convolution of Fourier Expansions as Applied to Solving Boundary Value Problems with Intersecting Interface Lines // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2007. Vol. 47, No. 9. P. 1489–1495.

2. Kholodovskii S. E. The Convolution Method of Fourier Expansions. The Case of Generalized Transmission Conditions of Crack (Screen) Type in Piecewise Inhomogeneous Media // Differential Equations. 2009. Vol. 45, No. 6. P. 873–877.

3. Kholodovskii S. E. O mnogosloinykh plenkakh na granitse poluprostranstva // Matematicheskie zametki. 2016. T. 99. Vyp. 3. S. 421–427.

4. Kholodovskii S. E. Zadachi matematicheskoi fiziki v oblastyakh s plenochnymi vklyucheniyami. Chita: Zabaikal. gos, un-t, 2015. 232 s.

5. Fikhtengol'ts G. M. Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. M.: Nauka, 1962. T. 3. 656 s.

6. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Uravneniya matematicheskoi fiziki. M.: Nauka, 1972. 736 s.

7. Golubeva O.V. Obobshchenie teoremy ob okruzhnosti na fil'tratsionnye techeniya // Izv. AN SSSR. MZhG. 1966. No 1. S. 113–116.

Библиографическое описание статьи

Холодовский С. Е. О математической модели динамических процессов в биоматериалах с трехслойными наноразмерными пленками // Ученые записки Забайкальского государственного университета. Сер. Физика, математика, техника, технология. 2016. Т. 11, № 4. С. 11–20.
DOI:10.21209/2308-8761-2016-11-4-11-20.

Reference to article

Kholodovskii S. Ye. About Mathematical Models of Dynamic Processes in Biomaterials with Nanoscale Three-Layer Films // Scholarly Notes Of Transbaikal State University. Series Physics, Mathematics, Engineering, Technology. 2016. Vol. 11, No 4. P. 11–20.
DOI:10.21209/2308-8761-2016-11-4-11-20.

Статья поступила в редакцию 25.05.2016