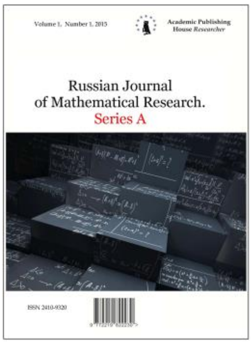
Published in the Russian Federation
Russian Journal of Mathematical Research. Series A
Has been issued since 2015.
ISSN: 2410-9320
E-ISSN: 2413-7529
Vol. 4, Is. 2, pp. 93-105, 2016

DOI: 10.13187/rjmr.a.2016.4.93
www.ejournal30.com



UDC 51

Quantile Hedging in Arbitrage-Free Market.
Cases of Complete and Incomplete Market

Irina A. Zemlyakova

Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation
Post-graduate student
E-mail: ira-korenovsk@rambler.ru

Abstract

In this paper we will find the solution of quantile hedging problem using the duality theory of linear programming. This problem is relevant because market of financial options is just beginning its development. It is necessary to determine the capital, portfolio and the initial capital value as the value of the option for which current payment obligation is performed.

So, was built hedging strategy, that maximizes the probability of a successful hedging, given the restriction on the required cost. These solutions have been applied in practice for CRR-model (case of complete market) and trinomial model (case of incomplete market).

Keywords: hedging, quantile hedging, complete market, incomplete market.

Введение

В настоящее время стала возрастать важность механизма хеджирования для участников экономических отношений. Рынок финансовых опционов, отличительной особенностью которого является гибкость управления рисками, только начинает своё развитие. Поэтому становится актуальным поиск удобного решения задачи квантильного хеджирования. Необходимо определить капитал, соответствующий ему портфель, и начальное значение капитала как стоимости опциона, для которых выполняется заданное платёжное обязательство.

Данной проблематике посвящён ряд работ B.Rudloff, H.Follmer [1],[2]. Ими был получен ряд важных теоретических выводов. В данной работе предлагается другой, более простой и применимый с практической точки зрения подход, основанный на теории двойственных задач линейного программирования. Рассмотрены примеры, как для полного, так и для неполного рынка (вычисления проводились с помощью PyCharm и Maple).

Проблема ценообразования и хеджирования платёжных обязательств хорошо понимается в контексте безарбитражных моделей, которые являются полными. В таких моделях каждое платёжное обязательство достижимо.

Что делать, если инвестора не устраивает первоначальная часть капитала, необходимая для идеального хеджа или суперхеджа? Какова максимальная вероятность успешного хеджирования, которую инвестор может достичь с использованием наименьшего капитала?

В данной работе была построена стратегия хеджирования, которая максимизирует вероятность успешного хеджирования, учитывая ограничение на требуемую стоимость. Полученные решения были применены на практике при рассмотрении модели Кокса-Росса-Рубинштейна.

В случае неполного рынка уже не всякое финансовое обязательство воспроизводимо. В связи с этим можно говорить о верхней цене хеджирования:

$V = \sup E^{P^*} f$, причём супремум ищется по всем мартингальным мерам. Поскольку существует такой портфель, что $X_N = V + \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \Delta S_i \geq f$,

цена V обеспечивает безрисковое поведение на рынке. Если цена V слишком высока и есть готовность рисковать, то можно применить другие виды хеджирования. Мы можем заменить платёжное обязательство и строить портфель таким образом, чтобы

$X_N = C + \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \Delta S_i \geq f'$, причём $f' \leq f$ и, как следствие, $C < V$.

Данная задача построения портфеля, начального значения капитала, как стоимости опциона, для которых выполняется заданное платёжное обязательство, была решена с помощью метода двойственных задач линейного программирования. Полученные формулы были применены на практике для триномиальной модели.

Для триномиальной модели был получен интересный результат. Если представлять стоимости рисковых активов и капитала в виде дерева, то некоторые ветви приводят к одним и тем же результатам на данном шаге. Мы будем сортировать значения, полученные на *i-м* шаге, начиная с корня дерева, во избежание таких повторений. Приведённый в работе вычислительный пример позволяет заметить, что значения на одной ветке для стоимости акций и капитала становятся равными нулю уже с момента времени $i=1$.

Поэтому в данной модели для неполного рынка рассмотрение триномиальной модели излишне – вместо неё можно рассматривать биномиальную модель.

Таким образом, в данном докладе представлено более практичное решение задачи квантильного хеджирования как для полного, так и для неполного рынков; рассмотрены вычислительные примеры (биномиальная и триномиальная модель); был получен интересный вывод о том, что триномиальную модель можно свести к биномиальной.

Результаты

Случай полного рынка

Строим стратегию хеджирования, которая максимизирует вероятность успешного хеджирования в соответствии с мерой P, учитывая ограничение на требуемую стоимость.

Дисконтированный процесс цен определяется уравнениями

$S_n = S_{n-1}(1+\rho_n), \quad \rho_n \in \{a,b\}, \; a<0, \; b>0$

Рынок рассматривается на полном вероятностном пространстве с естественной фильтрацией.

Капитал самофинансируемого портфеля

$X_N = X_0 + \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \Delta S_i,$

где γ - предсказуемая последовательность, X_0 – начальный капитал, $X_0 \geq 0$

Пусть задано финансовое обязательство и требуется выбрать портфель таким образом, чтобы

$X_N \geq f$, где f – неотрицательная ограниченная случайная величина.

Полнота, как было отмечено ранее, означает, что существует совершенный хедж, т.е. предсказуемый процесс γ^* и существует C^*:

$X_N^{\gamma^*} = C^* + \sum_{i=1}^{N} \gamma_i^* \Delta S_i, \quad X_N^{\gamma^*} = f$

Что делать, если инвестора не устраивает начальный капитал C^* ? Какой наилучший результат может получить инвестор, используя начальный капитал $U_0 < C^*$?

Так как начальный капитал $U_0 < C^*$, то его можно представить в виде:
$U_0 \leq \alpha C^*, \quad 0 < \alpha < 1$

Итак:
$$X_N^{\gamma} = U_0 + \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \Delta S_i,$$

Поскольку $U_0 \leq \alpha C^* < C^*$, то следует ожидать, что равенство, $X_N = f_N$ выполняться не будет.

Один из вариантов решения этой проблемы заключается в минимизации риска по Марковицу:
$$\min_{\gamma} E^P (X_N^{\gamma} - f)^2$$

Решение этой задачи известно, но мы будем рассматривать другую постановку. Для этого рассмотрим рисунок:

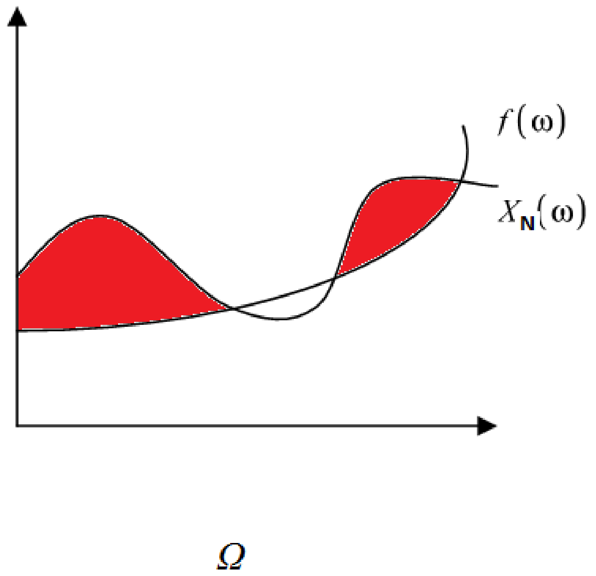


Рис. 1.

Для выделенных областей капитал в конечный момент времени больше, чем финансовое обязательство *f*. Нас же будет интересовать оставшаяся «плохая» область, для которой капитал в конечный момент времени меньше, чем *f*.

Таким образом, альтернативой сформулированной ранее задаче является задача квантильного хеджирования:

max p(A) при ограничении $q(A) \leq \alpha$,

где $q(d\omega) = \dfrac{f(\omega)}{C^*} p^*(d\omega)$

$A = \{\omega : X_N \geq f\}$ – множество успешного хеджирования

Решение данной задачи можно попытаться найти с помощью леммы Неймана-Пирсона:
$$A_{\lambda} = \{\omega : z(\omega) \geq \lambda\}, \text{где } p(d\omega) = z(\omega) q(d\omega)$$
$$q(A_{\lambda}) = \alpha$$

Допустим, что не существует такого λ, что выполняется последнее равенство, тогда задача квантильного хеджирования сводится к задаче о рюкзаке:

$$\max \sum_i p(\omega_i)x(\omega_i) \text{ при ограничениях } \sum_i q(\omega_i)x(\omega_i) \le \alpha, \;\; x(\omega_i) \in \{0,1\}$$

Этой задаче посвящена обширная литература. Существуют различные алгоритмы её решения, но все они имеют достаточно высокую сложность.

Вернёмся к первой постановке задачи. Изменим критерий. Постараемся не штрафовать в тех случаях, когда $X_N(\omega) > f(\omega)$ (см. Рис. 1), в результате получим упрощённую задачу:

$$\min_x E^P(f - xf) \text{ при ограничениях } 0 \le x(\omega) \le 1 \;\; и \;\; E^* xf \le C^*$$

То есть финансовое обязательство f заменяем на xf, тогда $E^P(f - xf)$ оценивает погрешность такой замены. В результате получаем задачу $\max\limits_x E^P xf$ при ограничениях: $0 \le x(\omega) \le 1$ и $E^* xf \le C^*$

Поскольку целевая функция ограничена сверху и множество допустимых решений непусто, задача имеет решение, поэтому и двойственная задача

тоже имеет решение.

Двойственная задача: $\min\limits_{\lambda \ge 0} [\sum\limits_i \max(r(\omega_i) - \lambda q(\omega_i), 0) + \lambda\alpha]$, где $r(d\omega) = \dfrac{f(\omega)}{E^P f} p(d\omega)$

В результате:

$$\textbf{Решение упрощенной задачи}: x(\omega) = \begin{cases} 1, r(\omega) - \lambda^* q(\omega) > 0 \\ 0, r(\omega) - \lambda^* q(\omega) < 0 \end{cases}, E^q x = \alpha.$$

где:

Оптимальное значение: $\lambda_i = \dfrac{r(\omega_{(i)})}{q(\omega_{(i)})}$, $\lambda^* = \arg\min\limits_{\lambda_i} [\sum\limits_i \max(r(\omega_i) - \lambda_i q(\omega_i), 0) + \lambda_i \alpha]$

Пример. Модель Кокса-Росса-Рубинштейна

Рассмотрим пример - модель Кокса-Росса-Рубинштейна.

Модель Кокса - Росса – Рубинштейна - это модель полного $(B,S)-$рынка. Эволюция стоимости единицы банковского счета и акции определяется в модели следующим образом:

$$B_n = (1+r)B_{n-1}, S_n = (1+\rho_n)S_{n-1}$$

где $B_0 > 0$, $S_0 > 0$, $r > -1$ - постоянная процентная ставка, $\rho_n > -1$ - последовательность одинаково распределенных, независимых в совокупности случайных величин, принимающих два значения: a и b, причем $-1 < a < r < b$.

Дисконтированная стоимость акции удовлетворяет разностному уравнению:

$$\frac{S_n}{B_n} = \left(\frac{1+b}{1+r}\right)^{\delta_n} \left(\frac{1+a}{1+r}\right)^{n-\delta_n} \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}}$$, где δ_n - бинарная случайная величина.

Отсюда дисконтированная стоимость акции:

$$\frac{S_n}{B_n} = \left(\frac{1+b}{1+r}\right)^{\xi_n} \left(\frac{1+a}{1+r}\right)^{n-\xi_n} \frac{S_0}{B_0}$$, где $\xi_n = \sum_{i=1}^n \delta_i$.

При выполнении условия: $-1 < a < r < b$ существует единственная мартингальная вероятность, при которой случайные величины δ_n независимые и одинаково распределены:

$$p^* = P(\delta_n = 1) = \frac{r-a}{b-a}, q^* = P(\delta_n = 0) = \frac{b-r}{b-a}.$$

Для мартингальной вероятности случайная величина ξ_n распределена по биномиальному закону, поэтому модель Кокса-Росса-Рубинштейна также называют биномиальной моделью, а рынок биномиальным $(B,S)-$рынком.

Не нарушая общности, будем считать, что $B_n \equiv 1$ для любого момента времени n

N – финальный момент времени, тогда S_N – стоимость рискового актива в финальный момент времени.

Пусть $f = (S_N - K)^+$ - европейский опцион call, K – контрактная цена

$$S_N = S_0(1+b)^{\omega}(1+a)^{N-\omega}$$

$$f(\omega)= (S_N - K)^+= (S_0(1+b)^{\omega}(1+a)^{N-\omega} - K)^+$$

Естественная мера, определяемая рынком, P:

$$p(\omega = k) = C_N^k p^k q^{N-k}$$

$$E^P f = \sum_{j=0}^{N} f(j)P(\omega = j)$$

Мартингальная мера:

$$p^*(\omega = k) = C_N^k (p^*)^k (q^*)^{N-k}$$

$$E^* f = \sum_{j=0}^{N} f(j)p^*(\omega = j)$$

Новые меры:

$$r(\omega)= \frac{f(\omega)}{\mathrm{E}^{\mathrm{P}} f} p(\omega)$$

$$q(\omega)= \frac{f(\omega)}{E^{P^*} f} \quad p^*(\omega)$$

Напомним вид двойственной задачи и её решения:

Двойственная задача: $\min\limits_{\lambda \ge 0} [\sum\limits_i \max(r(\omega_i) - \lambda q(\omega_i), 0) + \lambda\alpha]$, где $r(d\omega) = \dfrac{f(\omega)}{E^P f} p(d\omega)$

Решение упрощенной задачи : $x(\omega) = \begin{cases} 1, r(\omega) - \lambda^* q(\omega) > 0 \\ 0, r(\omega) - \lambda^* q(\omega) < 0 \end{cases}, E^q x = \alpha.$

Упорядоченные значения: $x_i=1,\ i=0..t-1$; $x_i=0,\ i=t+1..N$

найдём, чему равно x_i в момент времени t:

$q(1) < \alpha$

$q(1) + q(2) < \alpha$

…………………

$q(1) + q(2) + \ldots + x_t\, q(t) = \alpha$

…………………

Отсюда получаем $x_t = \dfrac{(\alpha - \sum\limits_{i=0}^{t-1} q(i))}{q(t)}$

Пусть $q(k)$ – объём вещи, $r(k)$ – её стоимость. Отличие задачи квантильного хеджирования от «задачи о рюкзаке» состоит в том, что мы можем «разбить» объём нашей вещи *q(k),* который не помещается в рюкзак (умножаем на $0 \le x_t \le 1$), а в задаче о рюкзаке «дробить» объём нельзя ($x_i \in \{0,1\}$).

Вычислительный пример

$\alpha := 0.7;$ - параметр
$S0 := 6$ - стоимость рискового актива в начальный момент времени.
$KK := 5$ - контрактная цена
$N := 10$ - число дней
$a := -0.2$
$b := 0.8$
$Pa := 0.6$
$Pb := 0.4$

Мартингальные вероятности:

$$qstar := \frac{b}{b-a};\ pstar := -\frac{a}{b-a};$$

qstar = 0.8
pstar = 0.8

Рассчитаем новую меру q_i и упорядочим *q(i)* по возрастанию:
0
0
0
0.0000742
0.0013169
0.0104660
0.0488751
0.1468650
0.1598129
0.2883949
0.3441945

Формируем массив отношений $rat[i] := \frac{r(i)}{q(i)};$

где $q := (k) \to Z(k) \cdot Pk(k)$; *#новая мера*

q(i) может равняться нулю, если это так, полагаем *rat[i] = 0*
Упорядочив массив *rat[i]* по убыванию и получим:
92.728607
11.734835
8.480532
4.057600
1.833744
1.495491
0.473228
0.133048
0
0
0

В *z* будем накапливать сумму *q(i),* если в какой-то момент времени *t* α станет меньше накопленной суммы *q(i),* то это – искомый момент времени.

z = 0
z = 0
z = 0.159812

z = 0.504007
z = 0.792402
5

Получили, что $t=5$

До момента времени t $x_i = 1$, после $x_i = 0$, а в сам момент $x[t] := \dfrac{\left(\alpha - \sum_{ii=1}^{t-1} q(ii)\right)}{q(t)}$;

В итоге получились упорядоченные значения для x_i:
1
1
1
1
1
0.679597
0
0
0
0
0

Вернёмся к изначальной нумерации, используя таблицу перехода индексов:

$q_{упор}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$q_{исх}$	0	1	2	10	9	8	7	6	3	5	4

$x_0 := 1$
$x_1 := 1$
$x_2 := 1$
$x_3 := 0$
$x_4 := 0$
$x_5 := 0$
$x_6 := 0$
$x_7 := 0$
$x_8 := 0.679597398$
$x_9 := 1$
$x_{10} := 1$

То есть, если проводить аналогию с «задачей о рюкзаке», получим ,что нужно взять вещи объёмом $q(i)$, $i=0,1,2,9,10$ и $0.67959739^*\ q(8)$ (в нашей задаче это можно себе позволить).

Случай неполного рынка

Процесс цен определяется уравнениями

$S_n = S_{n-1}(1+\rho_n)$, $\rho_n \in \Gamma$, где $\Gamma = \{a_1, a_2, a_3\}$

Рынок рассматривается на полном вероятностном пространстве с естественной фильтрацией.

Капитал самофинансируемого портфеля

$X_N = X_0 + \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \Delta S_i,$

где γ - предсказуемая последовательность, X_0 – начальный капитал, $X_0 \geq 0$

Пусть задано финансовое обязательство и требуется выбрать портфель таким образом, чтобы $X_N \geq f$, где f – неотрицательная ограниченная случайная величина.

Так как рынок неполный, то не всякое финансовое обязательство воспроизводимо. В связи с этим можно говорить о верхней цене хеджирования: $V = \sup_{P^* \in U} E^{P^*} f$, причём

супремум ищется по всем мартингальным мерам. Поскольку существует такой портфель, что $X_N = V + \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \Delta S_i \geq f,$

цена V обеспечивает безрисковое поведение на рынке. Если цена V слишком высока и есть готовность рисковать, то можно применить другие виды хеджирования. Мы можем заменить платёжное обязательство и строить портфель таким образом, чтобы $X_N = C + \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \Delta S_i \geq f'$, причём $f' \leq f$ и, как следствие, $C < V$.

Как было сказано ранее, Ω - конечное множество. В связи с этим положим $f'(\omega_i) = x_i f(\omega_i)$, *где* $x_i \in [0,1]$.

Пусть Q – естественная мера, определяемая рынком. Рассмотрим естественную меру близости f *и* f':

$$E^Q(f - f') = \sum_i Q_i (f(\omega_i) - f'(\omega_i)) = \sum_i Q_i f(\omega_i) - \sum_i Q_i f(\omega_i) x_i$$

В результате возникает оптимизационная задача:

$$\sum_i Q_i f(\omega_i) x_i \to \max_x, \quad \sup_{P^* \in U} \sum_i P_i^* f(\omega_i) x_i \leq C, \quad x_i \in [0,1] \qquad (1)$$

Множество U мартингальных мер на конечном вероятностном пространстве является выпуклым многогранником, и любая мартингальная мера выражается в виде выпуклой комбинации экстремальных мер: $P^* = \sum_j y_j R^j$

Отсюда задача *(1)* трансформируется в задачу:

$$\sum_i Q_i f(\omega_i) x_i \to \max_x, \quad \sum_i R_i^j f(\omega_i) x_i \leq C, \quad x_i \in [0,1] \qquad (2)$$

Введём обозначения:

$L_i = Q_i f(\omega_i)$, $M_i^j = R_i^j f(\omega_i)$

В таких обозначениях задача *(2)* примет вид:

$$\sum_i L_i x_i \to \max_x, \quad \sum_i M_i^j x_i \leq C, \quad x_i \in [0,1] \qquad (3)$$

Поскольку целевая функция ограничена сверху и множество допустимых решений непусто, задача *(3)* имеет решение, поэтому и двойственная задача

$$\min_{\lambda \geq 0} F(\lambda) = \min_{\lambda \geq 0} \max_{0 \leq x \leq 1} [(L - \sum_j \lambda_j M^j, x) + C \sum_j \lambda_j \qquad (4)$$

также имеет решение. Анализ задачи *(4)* позволяет определить структуру решения внутренней задачи:

$$x_i(\lambda) = \begin{cases} 1, & t_i > 0, \\ 0, & t_i < 0, \quad \text{где } t_i = L_i - \sum_j \lambda_j M_i^j, \\ \text{любое число из } [0,1], & t_i = 0. \end{cases}$$

$F(\lambda)$ – выпуклая недифференцируемая функция, её минимум можно найти обобщённым градиентным спуском.

Определим экстремальные мартингальные меры. Любая мартингальная мера является продакт-мерой: $P = P^{(1)} \times \ldots \times P^{(N)}$. Отсюда мартингальные меры получаются из неотрицательных решений системы линейных уравнений:

$$\sum_i a_i y_i^j = 0 \text{ для всех j}, \quad \sum_i y_i^j = 1 \qquad (5)$$

Допустимые базисные решения *(5)* имеют следующую структуру:

$$y_i(r_j, s_j) = \begin{cases} 0, & i \neq r_j,\ i \neq s_j, \\ \dfrac{a_{s_j}}{a_{s_j} - a_{r_j}}, & i = r_j, \\ \dfrac{-a_{r_j}}{a_{s_j} - a_{r_j}}, & i = s_j, \end{cases}$$

для всех r_j и s_j , удовлетворяющих условию $a_{rj} < 0 < a_{sj}$. В связи с этим множество экстремальных мер $U^l = \{P : P^{(j)}(a_i) = y_i(r_j, s_j)\}$.

Пример. Триномиальная модель

Не нарушая общности, будем считать, что $B_n \equiv 1$ для любого момента времени n

N – финальный момент времени и S_N – стоимость рискового актива в финальный момент времени

Пусть N = 3;

Пусть $f = (S_N - K)^+$ - европейский опцион call, K – контрактная цена

$S_N = (1+a_1)^{k1}(1+a_2)^{k2}(1+a_3)^{k3}S_0$

$k1+k2+k3 = 3$

Рассмотрим два типа экстремальных мартингальных мер P^1 *и* P^2, которые порождают все экстремальные мартингальные меры в количестве 8 элементов, зададим вероятности попадания в следующий атом дерева:

$P^1(\rho_1 = a_1) = \dfrac{a2}{a2 - a1} = p^1$

$P^1(\rho_1 = a_2) = -\dfrac{a1}{a2 - a1} = q^1$

$P^1(\rho_1 = a_3) = 0$

$P^2(\rho_2 = a_1) = \dfrac{a3}{a3 - a1} = p^2$

$P^2(\rho_2 = a_2) = 0$

$P^2(\rho_2 = a_3) = -\dfrac{a1}{a3 - a1} = q^2$

Возможные траектории обхода дерева:

$\omega 1$ - (0,1,2) // $S_N = (1+a_2)^1(1+a_3)^2S_0$ $\omega 2$ - (0,2,1) // $S_N = (1+a_2)^2(1+a_3)^1S_0$

$\omega 3$ - (1,1,1) // $S_N = (1+a_1)^1(1+a_2)^1(1+a_3)^1S_0$ $\omega 4$ - (1,2,0) // $S_N = (1+a_1)^1(1+a_2)^2S_0$

$\omega 5$ - (1,0,2) // $S_N = (1+a_1)^1 (1+a_3)^2S_0$ $\omega 6$ - (2,1,0) // $S_N = (1+a_1)^2(1+a_2)^1S_0$

$\omega 7$ - (2,0,1) // $S_N = (1+a_1)^2 (1+a_3)^1S_0$ $\omega 8$ - (3,0,0) // $S_N = (1+a_1)^3S_0$

$\omega 9$ - (0,3,0) // $S_N = (1+a_2)^3S_0$ $\omega 10$ - (0,0,3) // $S_N = (1+a_3)^3S_0$

Будем рассматривать различные комбинации мартингальных мер. Всего их будет $2^3 = 8$ комбинаций

1) P^1 (1,1,1) 2) P^2 (1,1,2) 3) P^3 (1,2,1)

4) P^4 (1,2,2) 5) P^5 (2,1,1) 6) P^6 (2,1,2)

7) P^7 (2,2,1) 8) P^8 (2,2,2)

Для каждой траектории ω_i находим значения опциона в финальный момент времени*:*

$f(\omega_i) = (S_N(\omega_i) - K)^+$

Выбираем произвольную рыночную меру Q*,* рассчитываем вероятности обхода дерева этой произвольной рыночной меры

Находим произведение

$L_i = Q_i f(\omega_i)$, $M_i^j = R_i^j f(\omega_i)$, *где* R_i^j *– матрица всех возможных вероятностей обхода дерева*

Будем решать двойственную задачу *(4)* с помощью метода обобщённого градиентного спуска. Координаты обобщённого градиента имеют вид:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \lambda_k}\right|_{\lambda=\lambda^*} = -\sum_i M_i^k x_i^* + C$$

С помощью итерационного метода вычисляем λ^t: задаём значения вектора λ^0, решаем внутреннюю задачу и находим $x_i(\lambda^0)$. Находим все остальные λ^t по формуле:

$\lambda^t = \lambda^{t-1} - h\nabla F$, *где h - шаг*

при этом учитываем условие $\lambda^t_i \geq 0$

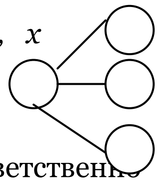
Шаг h_t удовлетворяет условиям: $\sum h_t = \infty$; $\sum h^2_t < \infty$

Алгоритм продолжаем до тех пор, пока значения λ_i^t *и* λ_i^{t+1} будут мало отличаться друг от друга $\forall i$.

В итоге получаем искомый вектор λ^t и находим решение задачи – вектор x^*.

Зная вектор x^*, можем построить вектор значений капитала в конечный момент времени, он будет иметь вид: $X_N^\pi = f(\omega_i)\cdot x^*$

Зная значение капитала портфеля в конечный момент времени, мы можем восстановить значения капитала и для предыдущих моментов времени.



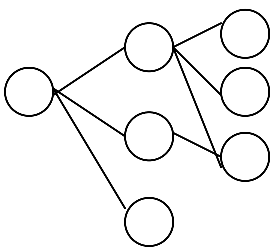
Пусть A,B,C – значения на атомах в момент времени N,
x – в момент времени N-1,
найдём значение x, решив минимаксную задачу:
$x = \min\max\{A-\gamma\Delta S_A, B-\gamma\Delta S_B, C-\gamma\Delta S_C\}$
где $\Delta S_A, \Delta S_B, \Delta S_C$ - приращения стоимости акций соответственно на атомах A,B,C
γ – коэффициент, для нахождения которого переходим от поставленной выше задачи на минимакс к двойственной к ней задаче:

$$\begin{rcases} P_A + P_B + P_C = 1 \\ P_A\Delta S_A + P_B\Delta S_B + P_C\Delta S_C = 0 \end{rcases}$$

где P_A, P_B, P_C – вероятности попадания в атомы A,B,C соответственно, $P_i \geq 0$, $i=1..3$

Таким образом, мы нашли значения портфеля в $(N-1)$-й момент времени. Аналогично находим значения вплоть до X_0 - корня дерева.

Рассмотрим особенность триномиальной модели – некоторые ветви деревьев приводят к одним и тем же результатам на данном шаге, схематически это можно показать так:



В дальнейшем это приведёт к получению нескольких одинаковых значений стоимости акций и стоимости капитала в i-й день. Мы будем сортировать значения, полученные на i-*м* шаге, начиная с корня дерева, во избежание таких повторений. Рассмотрев вычислительный пример, можно заметить, что значения на одной ветке для стоимости акций и капитала становятся равными нулю уже с момента времени $i=1$.

Поэтому можно сделать предположение, что в задаче квантильного хеджирования для неполного рынка рассмотрение триномиальной модели излишне – вместо неё можно рассматривать биномиальную модель.

Вычислительный пример (реализован с помощью Python)

Пусть N=3 $S_0 = 5$ – начальное значение стоимости акции
$K = 2$ – контрактная цена
$C = 6$ - премия
Доля изменения атома при переходе в следующий слой: a: [-0.3, 0.5, 0.8]

p: [0.625, 0.727, 0]
q: [0.375, 0, 2.667]
r: [0, 0.273, -1.667]

Стоимости акций во все моменты времени (отсортированные значения – повторения были убраны):
0: 5
1: 3.5 7.5 9.0
2: 2.45 5.25 6.3 11.25 13.5 16.2
3: 1.715 3.675 4.41 7.875 9.45 11.34 16.875 20.25 24.3 29.16

Множество значений опциона в финальный момент времени $(f(\omega_i))$ (отсортированные значения):
0.0 1.675 2.41 5.875 7.45 9.34 14.875 18.25 22.3 27.16

Матрица всех возможных вероятностей обхода (R):

0.244	0.438	0.0	0.264	0.0	0.0	0.053	0.0	0.0	0
0.244	0.438	0.321	0.264	0.384	0.141	0.053	0.114	0.084	0.02
0.244	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0	0	0	0
0.244	0.0	0.321	0.0	0.0	0.141	0	0.0	0.0	0.02
0.384	0.594	0.0	0.306	0.0	0.0	0.053	0.0	0.0	0
0.384	0.594	0.432	0.306	0.444	0.162	0.053	0.114	0.084	0.02
0.384	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0	0	0	0
0.384	0.432	0.432	0.162	0.324	0.162	0.02	0.06	0.06	0.02

Вероятности обхода для произвольной рыночной меры (Q):
0.037 0.028 0.046 0.021 0.035 0.058 0.016 0.026 0.043 0.073

step = 401
lambda1:
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.36872288638092190.0 0.0
lambda2:
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.363735355208852030.0 0.0

На шаге с номером 401 получили, что разница между lambda меньше заданного ε, формируем массив:

tstar list:
0.0 -0.32 -0.273 -0.539 -0.959 -0.016 -0.053 -0.293 0.268 1.782

И по указанной выше формуле вычисляем решение внутренней задачи (x*):
0.5 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 1.0

Находим капитал в конечный момент времени:
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 22.3 27.16

Исходя из этих значений (они отсортированные) будем восстанавливать полную картину для значений капитала. Для этого сначала рассчитаем прирост стоимости акции ΔS:

Разница между текущим значением стоимости акции и значением в предыдущий день (delthaS):

0: 0
1: -1.5 2.5 4.0
2: -1.05 1.75 2.8 -2.25 3.75 6.0 -2.7 4.5 7.2
3: -0.735 1.225 1.96 -1.575 2.625 4.2 -1.89 3.15 5.04
-1.575 2.625 4.2 -3.375 5.625 9.0 -4.05 6.75 10.8
-1.89 3.15 5.04 -4.05 6.75 10.8 -4.86 8.1 12.96

Стоимость портфеля в последний день:
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 22.3 27.16

Значения портфеля (XP) (полный вариант):
0: 10.878
1: 0.0 15.145 26.563
2: 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 24.656 0.0 0.0 36.037
3: 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 22.3
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 27.16

Таким образом, явно видим, что одна ветвь дерева полностью обнулена, т.е. смысла её рассматривать нет. Мы пришли к выводу, что триномиальная модель сводится к биномиальной.

Выводы

В результате получено решение задачи квантильного хеджирования для полного и неполного рынков, написано соответствующее программное обеспечение, просчитан пример для биномиальной и триномиальной модели. Для триномиальной модели было сделано предположение о возможности сведения её к биномиальной.

Примечания:

1. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Том 1 / А.Н. Ширяев. М.: Фазис, 1998. 489 с.
2. Мельников А.В. Математические методы финансового анализа/ А.В. Мельников, Н.В. Попова, В.С. Скорнякова. М.: Анкил, 2006. 440 с.
3. R. Pliska Introduction to Mathematical Finance. Discrete time models/ R. Pliska. Oxford: Blackwell Publishing Limited, 1997. 262 p.
4. H. Follmer, P. Leukert. Quantile Hedging/ H. Follmer, P. Leukert // Finance and Stochastics, 1999, N3, pp. 251-273.
5. B. Rudloff. A generalized Neyman-Pearson lemma for hedge problems in incomplete markets/ B. Rudloff // Workshop „Stochastische Analysis“, 27.09.2004 – 29.09.2004, pp. 241-249.
6. Бурков, В.Н. Прикладные задачи теории графов/ В. Н. Бурков, И. А. Горгидзе, С. Е. Ловецкий. Тбилиси: Мецниереба, 1974. 234 с.
6. Dantzig G.B. Discrete variable extremum problems/ Dantzig G.B. // Operations Research, 1957. № 2, pp. 266-277.
7. Neyman J, Pearson E. On the Problem of the Most Efficient Tests of Statistical Hypotheses // Neyman J, Pearson E. // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1933, № 231, pp. 289–337.
8. Калиткин Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. М.: Наука, 1978. 512 с.

References:

1. Shiryaev A.N. Osnovy stokhasticheskoi finansovoi matematiki. Tom 1 / A.N. Shiryaev. M.: Fazis, 1998. 489 s.
2. Mel'nikov A.V. Matematicheskie metody finansovogo analiza/ A.V. Mel'nikov, N.V. Popova, V.S. Skornyakova. M.: Ankil, 2006. 440 s.
3. R. Pliska Introduction to Mathematical Finance. Discrete time models/ R. Pliska. Oxford: Blackwell Publishing Limited, 1997. 262 p.

4. H. Follmer, P. Leukert. Quantile Hedging/ H. Follmer, P. Leukert // Finance and Stochastics, 1999, N3, pp. 251-273.

5. B. Rudloff. A generalized Neyman-Pearson lemma for hedge problems in incomplete markets / B. Rudloff // Workshop „Stochastische Analysis“, 27.09.2004 – 29.09.2004, pp. 241-249.

6. Burkov, V.N. Prikladnye zadachi teorii grafov/ V. N. Burkov, I. A. Gorgidze, S. E. Lovetskii. Tbilisi: Metsniereba, 1974. 234 s.

6. Dantzig G.B. Discrete variable extremum problems/ Dantzig G.B. // Operations Research, 1957. № 2, pp. 266-277.

7. Neyman J, Pearson E. On the Problem of the Most Efficient Tests of Statistical Hypotheses//Neyman J, Pearson E. // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1933, N231, pp. 289–337.

8. Kalitkin N.N. Chislennye metody / N.N. Kalitkin. M.: Nauka, 1978. 512 s.

УДК 51

Квантильное хеджирование на безарбитражном рынке. Случаи полного и неполного рынка

Ирина Александровна Землякова

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация
E-mail: ira-korenovsk@rambler.ru

Аннотация. В данной статье мы будем искать решение задачи квантильного хеджирования с помощью теории двойственных задач линейного программирования. Эта проблема актуальна, потому что рынок финансовых опционов, отличительной особенностью которого является гибкость управления рисками, только начинает своё развитие. Необходимо определить капитал, соответствующий ему портфель, и начальное значение капитала как стоимости опциона, для которых выполняется заданное платёжное обязательство. В данной работе была построена стратегия хеджирования, которая максимизирует вероятность успешного хеджирования, учитывая ограничение на требуемую стоимость. Эти решения были применены на практике для модели Кокса-Росса-Рубинштейна (случай полного рынка) и для триномиальной модели (случай неполного рынка).

Ключевые слова: хеджирование, квантильное хеждирование, полный рынок, неполный рынок.