

Copyright © 2016 by Academic Publishing House *Researcher*

Published in the Russian Federation
 Russian Journal of Mathematical Research. Series A
 Has been issued since 2015.
 ISSN: 2410-9320
 E-ISSN: 2413-7529
 Vol. 4, Is. 2, pp. 64-70, 2016

DOI: 10.13187/rjmr.a.2016.4.64
www.ejournal30.com



UDC 539.3

The Bending Problem of Hinged Circular Plate on an Elastic Foundation

Seyran P. Stepanyan

Yerevan State University, Armenia
 Alek Manukyan Str. 1, Yerevan 0025
 PhD (Physics and mathematical), associate professor
 E-mail: seyran.stepanyan@ysu.am

Abstract

We consider the axisymmetric bending problem of orthotropic circular plate resting, with the whole area, on an elastic foundation. The plate edge is simply supported. On the basis of the Fuss-Winkler hypothesis, within the framework of the Hambartsumyan revised theory that takes into account the effect of transverse shear and compression, the differential equations of the problem are obtained. On the basis of the numerical analysis of the dimensionless results of the problem solution certain qualitative conclusions are made.

Keywords: orthotropy, round plate, swivel bearing, axisymmetric bending, elastic base, transverse shear, compression.

1. В правой системе цилиндрических координат r, θ, z рассмотрим ортотропную круглую пластинку радиуса R и постоянной толщины h опирающейся на упругом основании. На поверхности пластинки $z = -h/2$ действует равномерно распределенная поперечная нагрузка интенсивности q . Пользуясь гипотезой Фусса – Винклера будем считать, что реакция основания, действующая на поверхности пластинки $z = h/2$, прямо пропорционально прогибу. Следовательно, грузовой член, участвующий в задаче изгиба пластинки [1] (стр. 74), будет

$$Z_2 = q - kw, \quad (1.1) \text{ где } w -$$

прогиб, k - жесткость упругого основания.

Край пластинки шарнирно оперта. Условия этой опоры примем в виде:

$$w|_{r=R} = 0, \quad M_r|_{r=R} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь w - изгиб пластинки, M_r - изгибающий момент.

Учитывая, что рассматриваемая задача изгиба круглой пластинки осесимметричная, тогда из систем дифференциальных уравнений равновесия пластинки [1] (стр. 74) получим:

$$\frac{dN_r}{dr} + \frac{1}{r} N_r = -Z_2, \quad \frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_0}{r} = N_r$$

(1.3) где N_r -поперечная сила.

Введем следующие обозначение, которые приводят к безразмерным величинам:

$$r = R\rho, \quad s = \frac{h}{R}, \quad w = h\bar{w}, \quad k = \frac{B_r}{h} \bar{k}, \quad B_0 = mB_r, \quad \varphi = \frac{B_r}{h^2} \bar{\varphi},$$

$$N_r = \frac{h^3}{12} \varphi = \bar{N}_r B_r h \left(\bar{N}_r = \frac{\bar{\varphi}}{12} \right), \quad M_r = B_r h^2 \bar{M}_r, \quad M_0 = B_r h^2 \bar{M}_0, \quad (1.4)$$

$$q = B_r \bar{q}, \quad B_r a_r = \chi,$$

B_r , B_0 и a_r выражаются упругими постоянными материала пластинки по известным формулам [1] (стр.72).

Безразмерная поперечная сила и безразмерные изгибающие моменты в обозначениях (1.4) будут:

$$\bar{N}_r = \frac{\bar{\varphi}}{12},$$

$$\bar{M}_r = -\frac{s^2}{12} \left[\rho \frac{d^2 w}{d\rho^2} + v_0 \frac{d\bar{w}}{d\rho} - \frac{\chi}{10s} \left(\rho \frac{d\bar{\varphi}}{d\rho} + v_0 \bar{\varphi} \right) + \frac{6A_1 \rho}{5s^2} (\bar{q} - \bar{k}\bar{w}) \right] \quad (1.5)$$

$$\bar{M}_0 = -\frac{ms^2}{12\rho} \left[\frac{d\bar{w}}{d\rho} + v_r \rho \frac{d^2 w}{d\rho^2} - \frac{\chi}{10s} \left(\bar{\varphi} + v_r \rho \frac{d\bar{\varphi}}{d\rho} \right) + \frac{6A_2 \rho}{5ms^2} (\bar{q} - \bar{k}\bar{w}) \right]$$

Параметры A_1 и A_2 учитывают влияние обжатия, а χ - влияние поперечного сдвига[1] (стр.72).

С учетом (1.1) и (1.4) систему разрешающих дифференциальных уравнений задачи [1] (стр.74) можно привести к виду:

$$\rho \frac{d\bar{\varphi}}{d\rho} + \bar{\varphi} - \frac{12}{s} \bar{k} \rho \bar{w} = -\frac{12\bar{q}}{s} \rho,$$

$$\rho^2 \frac{d^3 \bar{w}}{d\rho^3} + \rho \frac{d^2 \bar{w}}{d\rho^2} - \left(m + \frac{6A_1 \bar{k}}{5s^2} \rho^2 \right) \frac{d\bar{w}}{d\rho} + \frac{6\bar{k}}{5s^2} (A_2 - A_1) \rho \bar{w} -$$

$$-\frac{\chi}{10s} \rho^2 \frac{d^2 \bar{\varphi}}{d\rho^2} - \frac{\chi \rho}{10s} \frac{d\bar{\varphi}}{d\rho} + \frac{1}{s^3} \left(\rho^2 + \frac{\chi ms^2}{10} \right) \bar{\varphi} = \frac{6(A_2 - A_1)}{5s^2} \rho \bar{q} \quad (1.6)$$

Краевые условия (1.2) в безразмерном виде будут:

$$\bar{w}|_{\rho=1} = 0, \quad \bar{M}|_{\rho=1} = 0 \quad (1.7) \text{ Очевидно, что}$$

система (1.6) имеет четвертый порядок, по этому кроме условий (1.7) нужны еще два условия. Эти условия относятся к центру пластинки. Имея в виду что в центре осесимметрично изгибаемой пластинки производная прогиба равна нулю, а из-за отсутствия сосредоточенной центральной силы равна нулю еще и поперечная сила, можно написать:

$$\left. \frac{d\bar{w}}{d\rho} \right|_{\rho=0} = \bar{\varphi}|_{\rho=0} = 0 \quad (1.8)$$

Таким образом, задача сводилась к интегрированию системы (1.6) при условиях (1.7) и (1.8).

2. Для решения задач применим методом коллокаций. С этой целью положим:

$$\bar{w} = a_1 + \sum_{i=2}^n a_i \rho^i, \quad \bar{\varphi} = \sum_{i=1}^n b_i \rho^i \quad (2.1)$$

Эти выражения удовлетворяют условиям (1.8). Число неизвестных постоянных

a_1, a_i и b_i равно $2n$, для определения которых интервал $0 < \rho < 1$ разделим на n части. Удовлетворив уравнениям (1.6) в точках деления и условиям (1.7) получим систему $2n$ линейных алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами относительно отмечанных неизвестных. После решения этой системы можно определить значения всех расчетных величин пластинки в виде многочленов порядка n . Вычисления надо проводить с увеличением число n до наступления практической сходимости. Так как в силу линейности задачи результаты решения прямо пропорциональны \bar{q} , то целесообразно считать $\bar{q} = 1$. В каждом конкретном случае умножив результаты решения на действительное значение \bar{q} получим их значения для этого случая.

Рассмотрим пример общего случая.

Пусть:

$$m = 2(E_0 = 2E_r); \quad E_z = \frac{2}{3}E_r; \quad \nu_{\theta r} = \nu_r = 0.15; \quad \nu_{zr} = 0.4; \quad \nu_{\theta z} = 0.2 \quad (2.2)$$

Из условий симметрии упругих свойств ортотропного тела [1] (стр. 23) с учетом (2.2) находим:

$$E_0 \nu_{\theta r} = E_r \nu_{r\theta} \Rightarrow \nu_{r\theta} = \nu_{\theta} = 0.3; \quad E_z \nu_{zr} = E_r \nu_{rz} \Rightarrow \nu_{rz} = 0.2667$$

$$E_z \nu_{z\theta} = E_0 \nu_{\theta z} \Rightarrow \nu_{z\theta} = 0.6$$

(2.3)

Следовательно, значения A_1 и A_2 будут [1] (стр. 72):

$$A_1 = -\frac{E_r \nu_{rz} + \nu_{r\theta} \nu_{\theta z}}{E_z (1 - \nu_{\theta r} \nu_{r\theta})} = -0.5131, \quad A_2 = -\frac{E_0 \nu_{\theta z} + \nu_{\theta r} \nu_{rz}}{E_z (1 - \nu_{\theta r} \nu_{r\theta})} = -0.7539 \quad (2.4)$$

Принятые механические параметры удовлетворяют условиям положительности энергии деформирования ортотропного тела [1] (стр. 24).

Рассмотрим следующие случаи.

1. $\chi = 5, A_1 = -0.5131, A_2 = -0.7539$ (учитываются влияния поперечного сдвига и ожатия)
2. $\chi = 0, A_1 = 0, A_2 = 0$ (отмеченные влияния не учитываются, т.е. классический случай)
3. $\chi = 5, A_1 = 0, A_2 = 0$ (учитывается только влияние поперечного сдвига)
4. $\chi = 0, A_1 = -0.5131, A_2 = -0.7539$ (учитывается только влияние обжатия)

Во всех случаях примем, что:

$$s = 0.25; \quad \alpha = 0.5; \quad \bar{q} = 1 \quad (2.5)$$

Данные таблицы 1 показывают, что в случае $\chi = 5; \quad \bar{k} = 0.15;$ сходимость процесса вычислений достигается при $n = 13$.

Ниже приводятся окончательные выражения расчетных величин пластинки при некоторых значениях $\chi, \bar{k}, A_1,$ и A_2 .

При $m = 2, \chi = 5, A_1 = -0.5131, A_2 = -0.7539, k = 0.1$

$$\bar{w} = 11.09 + 2.361\rho^2 - 34.92\rho^3 + 202.4\rho^4 - 1016\rho^5 +$$

$$+ 3619\rho^6 - 9523\rho^7 + 18570\rho^8 - 26756\rho^9 + 28109\rho^{10} - \quad (2.6)$$

$$- 20920\rho^{11} + 10447\rho^{12} - 3138\rho^{13} + 428.5\rho^{14},$$

$$\begin{aligned} \bar{N}_r = & 0.219\rho + 0.239\rho^2 - 5.232\rho^3 + 55.98\rho^4 - 370.9\rho^5 + \\ & + 1630\rho^6 - 5040\rho^7 + 11205\rho^8 - 18032\rho^9 + 20841\rho^{10} - \\ & - 16870\rho^{11} + 9080\rho^{12} - 2918\rho^{13} + 423.8\rho^{14}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_r = & -0.002 + 1.324\rho - 16.09\rho^2 + 144.1\rho^3 - 846.3\rho^4 + 3477\rho^5 - \\ & - 10267\rho^6 + 22084\rho^7 - 34673\rho^8 + 39316\rho^9 - 31352\rho^{10} + \\ & + 16682\rho^{11} - 5321\rho^{12} + 773.7\rho^{13} - 2.198\rho^{14}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_\theta = & -0.002 + 1.496\rho - 14.14\rho^2 + 107.4\rho^3 - 559.7\rho^4 + 2102\rho^5 - \\ & - 5783\rho^6 + 11753\rho^7 - 17615\rho^8 + 19220\rho^9 - 14849\rho^{10} + \\ & + 7704\rho^{11} - 2415\rho^{12} + 352.1\rho^{13} - 3.231\rho^{14}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

В таблице 2 приведены полученные значения основных величин при $k=0$; $\chi=5$

Для наглядности на фигурах 1÷4 приведены графики \bar{w} , \bar{N}_r , \bar{M}_r и \bar{M}_θ в случае «1» т.е. при $\chi=5$, $A_1=-0.5131$, $A_2=-0.7539$.

В таблице 3 приведены полученные значения основных величин при $k=0.15$; $\chi=5$

Заключение

Анализ полученных результатов решения приводит к следующим заключениям.

1. При возрастании параметра k реакция упругого основания увеличивается, в результате чего прогибы пластинки уменьшаются.
2. При $k=0$, т. е. при отсутствии упругого основания, наименьшие значения прогиба получаются, если учитывается только обжатие.
3. При учете поперечного сдвига, т. е. при $\chi > 0$, прогибы пластинки увеличиваются если упругое основание отсутствует ($k=0$), а если параметр k заметно больше нуля например $k=0.15$, то это закономерность нарушается.

Примечания:

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука. 1987. 360 с.
2. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. Издательство. М.: Наука. 1966. 636 с.
3. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. Издательство технико-теоретической литературы. Москва. 1957. 464 с.
4. Киракосян Р.М. Об одной неклассической задаче изгиба упруго защемленной круглой пластинки. ДНАН РА, 2015, том 115, с. 284-289.

References:

1. Ambartsumyan S. A. Teoriya anizotropnykh plastin. M. Nauka. 1987. 360 s.
2. Timoshenko S. P. i Voynovskii- Kriger. Plastinki i obolochek. Izdatelstvo. M.: Nauka. 1966. 636 s.
3. Lekhnitskii S. G. anizotropnye plastinki. M.-L. OGIZ-gostekhizdat. 1947. 355 s.
4. Kirakosyan R. M. Ob odnoi neklassicheskoi zadache izgiba uprugozashchmennoi krugloi plastinki // DNAN RA, 2015, tom 115, s. 284-289.

Таблица 1.

m=2, A1= - 0.5131, A2= -0.7539		ρ											
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
X=5, k=0.15	n=13	\bar{w}	7.288	7.299	7.305	7.276	7.166	6.914	6.436	5.624	4.357	2.513	0
		\bar{N}_r	0	0.019	0.038	0.057	0.072	0.078	0.067	-	-0.073	-	-0.528
		\bar{M}_r	-	0.026	0.045	0.068	0.098	0.131	0.164	0.186	0.184	0.134	0
		\bar{M}_θ	-	0.034	0.056	0.080	0.109	0.144	0.181	0.218	0.245	0.252	0.219
	n=14	\bar{w}	7.288	7.297	7.303	7.273	7.164	6.911	6.431	5.619	4.352	2.509	-0.000
		\bar{N}_r	0	0.019	0.038	0.057	0.072	0.078	0.066	0.022	-0.073	-	-0.528
		\bar{M}_r	-	0.026	0.045	0.068	0.098	0.131	0.163	0.186	0.184	0.133	0.0003
		\bar{M}_θ	-	0.034	0.056	0.080	0.109	0.144	0.181	0.217	0.2456	0.251	0.218

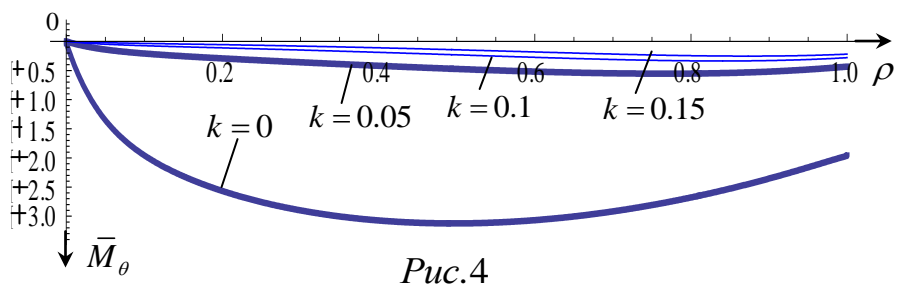
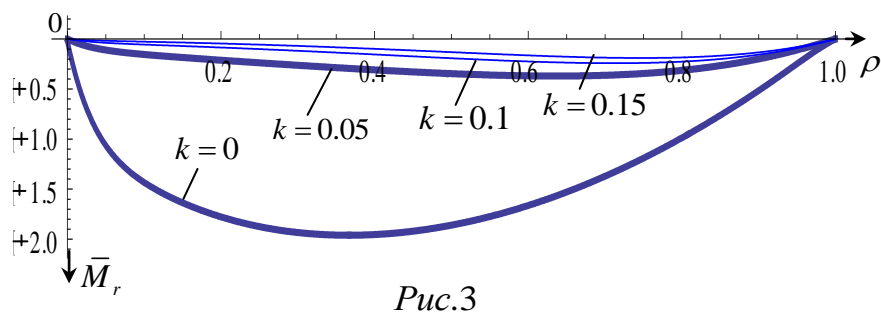
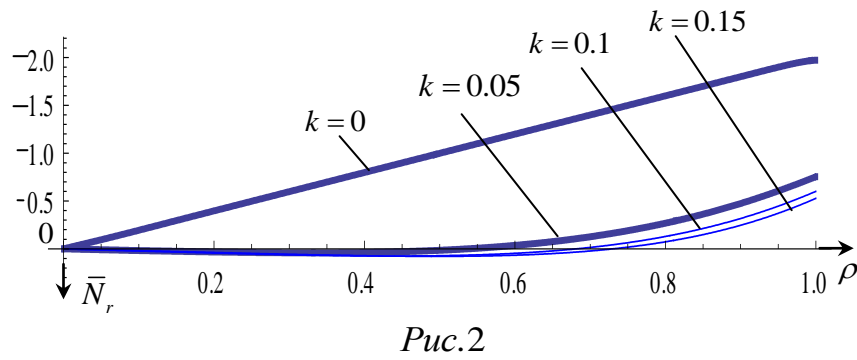
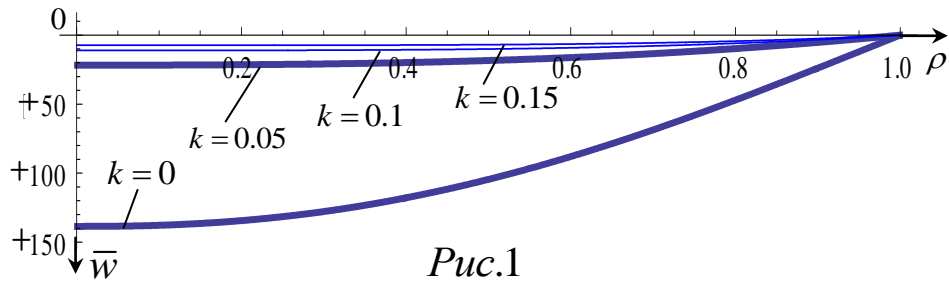
Таблица 2.

	случай	ρ										
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
\bar{w}	1	136.9	136.1	132.9	126.4	116.6	103.4	86.99	67.85	46.47	23.56	0
	2	116.3	115.9	113.5	108.4	100.3	89.28	75.34	58.86	40.34	20.44	0
	3	140.1	139.3	135.9	129.4	119.3	105.8	89.12	69.55	47.68	24.20	0
	4	113.1	112.7	110.4	105.4	97.59	86.80	73.21	57.15	39.12	19.79	0
\bar{N}_r	1	0	-0.184	-0.387	-0.592	-0.794	-0.995	-1.196	-1.396	-1.597	-1.799	-1.936
	2	0	0.186	-0.077	-0.395	-0.643	-0.876	-1.095	-1.313	-1.516	-1.768	-0.401
	3	0	-0.184	-0.387	-0.592	-0.794	-0.995	-1.196	-1.396	-1.596	-1.799	-1.935
	4	0	0.184	-0.079	-0.396	-0.644	-0.877	-1.095	-1.313	-1.516	-1.768	-0.409
\bar{M}_r	1	0.023	1.409	1.776	1.920	1.937	1.841	1.643	1.349	0.966	0.491	0
	2	0.002	1.257	1.702	1.898	1.956	1.894	1.727	1.461	1.102	0.653	0
	3	0.003	1.397	1.767	1.912	1.931	1.836	1.639	1.347	0.963	0.489	0
	4	0.022	1.270	1.713	1.907	1.963	1.899	1.731	1.464	1.103	0.653	0
\bar{M}_θ	1	0.025	1.839	2.522	2.864	3.039	3.089	3.034	2.883	2.643	2.317	1.934
	2	0.004	1.596	2.332	2.738	2.967	3.065	3.052	2.939	2.734	2.443	2.026
	3	0.005	1.829	2.516	2.861	3.038	3.090	3.036	2.887	2.648	2.324	1.942
	4	0.024	1.607	2.339	2.742	2.968	3.064	3.049	2.935	2.728	2.435	2.018

Таблица 3.

	случай	ρ										
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
\bar{w}	1	7.283	7.294	7.302	7.273	7.163	6.910	6.430	5.618	4.351	2.509	0
	2	7.739	7.734	7.701	7.599	7.375	6.955	6.262	5.224	3.799	2.013	0
	3	7.260	7.272	7.283	7.261	7.162	6.926	6.467	5.677	4.425	2.573	0
	4	7.801	7.793	7.749	7.631	7.381	6.929	6.199	5.128	3.689	1.925	0
\bar{N}_r	1	0.	0.019	0.038	0.057	0.072	0.078	0.066	0.022	-0.074	-0.247	-0.528
	2	0	0.035	0.066	0.093	0.113	0.118	0.096	0.032	-0.092	-0.294	-0.575
	3	0	0.018	0.037	0.055	0.070	0.077	0.067	0.025	-0.067	-0.237	-0.516

	4	0	0.037	0.069	0.097	0.117	0.121	0.096	0.027	-0.102	-0.309	-0.593
\bar{M}_r	1	-0.002	0.026	0.045	0.068	0.098	0.131	0.163	0.186	0.183	0.133	0
	2	0.000	0.016	0.039	0.072	0.113	0.159	0.203	0.231	0.225	0.159	0
	3	0.000	0.028	0.047	0.070	0.099	0.131	0.163	0.185	0.183	0.132	0
	4	-0.003	0.012	0.036	0.069	0.113	0.161	0.206	0.235	0.228	0.161	0
\bar{M}_θ	1	-0.002	0.033	0.056	0.080	0.109	0.144	0.181	0.217	0.244	0.251	0.218
	2	0.000	0.018	0.041	0.072	0.111	0.156	0.203	0.244	0.268	0.261	0.203
	3	0.000	0.035	0.058	0.082	0.110	0.142	0.175	0.206	0.225	0.219	0.171
	4	-0.003	0.014	0.037	0.069	0.112	0.161	0.214	0.263	0.296	0.299	0.250



УДК 539.3

Задача изгиба шарнирно опертой круглой пластинки на упругом основании

Сейран Павлович Степанян

Ереванский государственный университет, Армения

ул. Алек Манукян 1, г. Ереван 0025

Кандидат физико-математических наук, доцент

E-mail: seyran.stepanyan@ysu.am

Аннотация. Рассматривается осесимметричная задача изгиба ортотропной круглой пластинки, опирающейся всей площадью на упругое основание. Край пластинки шарнирно оперт. На основе гипотезы Фусса-Винклера, в рамках уточненной теории Амбарцумяна, получаются разрешающие дифференциальные уравнения, при учете влияния поперечного сдвига и обжатия. На базе численного анализа безразмерных результатов решения делаются качественные заключения.

Ключевые слова: ортотропия, круглая пластинка, шарнирное опирание, осесимметричный изгиб, упругое основание, поперечный сдвиг, обжатие.