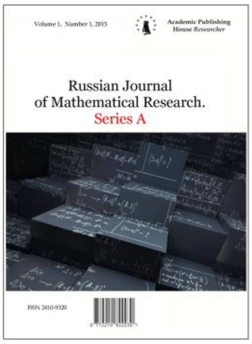
Published in the Russian Federation
Russian Journal of Mathematical Research. Series A
Has been issued since 2015.
ISSN: 2410-9320
E-ISSN: 2413-7529
Vol. 3, Is. 1, pp. 38-42, 2016

DOI: 10.13187/rjmr.a.2016.3.38
www.ejournal30.com



UDC 519.87

New Submission of Multidimensional Limit Laws in Prabkhu's Model

[1] Arsen R. Simonyan
[2] Elena I. Ulitina
[3] Simon Zh. Simavoryan

[1-3] Sochi State University, Russian Federation
Sovetskaya Str. 26 a, Sochi city 354000
[1] PhD (physics and mathematical), associate Professor
E-mail: oppm@mail.ru
[2] PhD (physics and mathematical), associate Professor
E-mail: ulitinaelena@mail.ru
[3] PhD (technical), associate Professor
E-mail: simsim58@mail.ru

Abstract

The article investigates the multidimensional laws limiting waiting times for virtual models Prabhu. It assumes that the system load is greater than unity. Thus, the system is in a transient mode. For non-stationary mode to obtain accurate results is not easy, so the asymptotic results were obtained under certain restrictions on the admission process.

Keywords: queuing system, stochastic process, probability, the waiting time, distribution function.

Введение

Системы массового обслуживания образуют специальный класс математических моделей, описывающих поведение огромного множества разнообразных сложных систем. Их теоретический анализ необходим на этапе проектирования таких сложных систем, как информационные сети, в частности, интернет-сети, автоматизированные вычислительные системы, системы снабжения, транспортные сети, медицинское обслуживание и т.д.

Во многих трудах по теории массового обслуживания [1-8] обосновано, что для прикладных задач наиболее подходящим является модель $\mathrm{M_r}|\mathrm{G_r}|1|\infty$.

Модель $\mathrm{M_r}|\mathrm{G_r}|1|\infty$ – В одноканальную систему (систему с одним прибором) обслуживания с ожиданием поступают независимые пуассоновские потоки $1-$вызовов$,\cdots,r-$вызовов с параметрами $a_1>0,\cdots,a_r>0$ соответственно. Длительности обслуживания вызовов независимы, не зависят от процесса поступления и для $k-$вызовов$, k=\overline{1,r}$, имеют функцию распределения $B_k(x), B_k(+0)=0$. В момент $t=0$, в системе вызовов нет.

Дисциплина Прабху [7]. Поступая в момент t в модель, $k-$вызовов$, (k=\overline{1,r})$ приобретает индекс $t+u_k$, где $0=u_1\leq\cdots\leq u_r$. В любой момент времени на приборе находится вызов с минимальным индексом. Прерванный индекс дообслуживается.

Дисциплину определяют параметры $v_k = u_k - u_{k-1}$ $(k = \overline{2,k})$. $v_k = 0$ и $v_k = +\infty (k = \overline{2,r})$ соответствуют дисциплинам FIFO (прямой порядок обслуживания) и абсолютных приоритетов. Модель Прабху определяется как модель $M_r|G_r|1|\infty$ с дисциплиной Прабху.

Характеристики. $\overline{w_k}\,(t)$ $(k = \overline{1,r}; t \geq 0)$ – условное виртуальное время ожидания (УВВО) k – вызова в момент t , при условии прекращения с момента t доступа вызовов в модель; $\rho_{k1} = \sum_{i=1}^{k} \int_0^{+\infty} t dB_k(t)$ – загрузка модели 1 –вызовами,$\cdots$, k –вызовами ($\overline{1,k}$ – вызовами); $\rho_k = 1 - \rho_{k1}$.

Цель работы

При фиксированных k, $k < r$, загрузках $0 < \rho_1 < \cdots < \rho_r$, где $\rho_{r1} \geq 1$ и $t \to +\infty$ асимптотический анализ вектор процесса $(k = \overline{1,r})$

$$(\overline{w_k}\,(t - \alpha_{2k}), \cdots, \overline{w_k}\,(t - \alpha_{kk}), \qquad (1)$$

где $\alpha_{jk} = v_j + \cdots + v_k$ $(j = \overline{2,k})$.

Предполагается, что при $s \downarrow 0$ имеют место представления

$$\sum_{m=1}^{i} a_m \int_0^{+\infty} e^{-sx} dB_m(x) = \sigma_i - \rho_{i1} s + B_i s^{\gamma}(1 + o_s(1)), \quad i = \overline{k,r}. \qquad (2_k)$$

где $\sigma_i = a_1 + \cdots + a_r$, $1 < \gamma \leq 2$, $) < B_k \leq \cdots \leq B_r \overset{\text{def}}{=} B$.

Метод анализа основан на уравнениях в терминах случайных величин (СВ), которые связывают $\overline{w_k}\,(t)$ в модели Прабху со следующими процессами в модели $M_r|G_r|1|\infty$ с абсолютными приоритетами $(k = \overline{1,r}, 0 \leq u \leq t)$:

- $b_k(u,t)$ – время обслуживания поступивших $\overline{1,k}$ – вызовов за $[u,t)$;
- $\pi_k(t)$ – период занятости (ПЗ) $\overline{1,k}$ – вызовов с задержкой t;
- $I_k^u(t)$ – время из $[u,t)$, когда система свободна от $\overline{1,k}$ – вызовов, при наличии начальной задержки t;
- $\overline{w}_k^0(t)$ – УВВО k – вызова в момент t.

Метод использует:

- асимптотические результаты для перечисленных процессов;
- прием «отбрасывания» малых величин;
- прием «склеивания» предельных функций распределения (ФР);
- метод математической индукции.

О предельных ФР. Возникшие многомерные ФР обладают многомерной плотностью, поскольку такое семейство имеют известные одномерные ФР, с помощью которых они строятся.

Перечислим упомянутые одномерные ФР $(1 < \alpha \leq 2)$:

1. $\tilde{G}_{\gamma}(x)$. $\tilde{G}_{\gamma}(x) = 0$ при $x \leq 0$ и

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} d\tilde{G}_{\gamma}(x) = e^{s^{\gamma}} \left\{1 - \frac{s}{\Gamma(1/\gamma)} \int_0^1 e^{-s^{\gamma} u} u^{-(1-1/\gamma)} du\right\}, \quad s \geq 0,$$

где $\Gamma(\cdot)$ - гамма-функция.

2. $G_{1/\gamma}(x)$. $G_{1/\gamma}(x) = 0$ при $x \leq 0$ и

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} dG_{1/\gamma}(x) = \exp\{-s^{1/\gamma}\}, \quad s \geq 0.$$

3. $G_{\gamma}(x)$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau x} dG_{\gamma}(x) = exp\{-(-i\tau)^{\gamma}\}, \quad i = \sqrt{-1}, \ \tau \in (-\infty, +\infty).$$

Все ФР имеют плотности, обозначаемые малыми буквами с теми же индексами.

Основные результаты

В условиях (2_r) и $\rho_{r1} \geq 1$ опишем предельные распределения вектора

$$\left(\overline{w_k}(t - \alpha_{2k}), \cdots, \overline{w_k}(t - \alpha_{kk}), \overline{w_k}(t)\right) \text{ при } k \leq r. \qquad (3)$$

Формулировки указывают сходство случаев $\rho_{r1}=1$ и $\rho_{r1}>1$.

Пусть существуют пределы

$$\lim_{t\to+\infty}(v_n/t_{nk})=d_n,\qquad n=\overline{2,k}, \tag{4}$$

где $t_{nk}=t-\alpha_{n+1k}$, а последовательность $d_2,\cdots,d_k$ имеет $s-1$ единиц на местах с номерами $m_1<\cdots<m_{s-1}$. Множество индексов $\{1,\cdots,k\}$ подразделим на группы

$P_1=\{1,2,\cdots,m_1-1\},P_2=\{m_1,m_1+1,\cdots,m_2-1\},\cdots,P_s==\{m_{s-1},m_{s-1}+1,\cdots,k\}$.

Обозначим: $\overline{w_r^*}(t)=\frac{\overline{w_r}(t)-\rho_r t}{(Bt)^{1/\gamma}}$.

Теорема 1. При условиях $\rho_{r1}\geq 1$, (2_r) и (4) существует предел

$$F_\gamma(x_i,d_{i+1}:i=\overline{1,k})\stackrel{\text{def}}{=}\lim_{t\to+\infty}P\{\overline{w_r^*}(t-\alpha_{jk})<x_j,\ j=\overline{1,k}\}=$$

$$=\prod_{i=1}^{s}\lim_{t\to+\infty}P\{\overline{w_r^*}(t-\alpha_{jk})<x_j,\qquad j\in P_i\},$$

Где предельная ФР бесконечно дифференцируема по каждой переменной.

ФР $F_\gamma(x_j,d_{j+1}:j\in P_i)$ для групп P_i однотипны: зависят от γ, числа индексов и констант d группы.

Опишем ФР одной группы, положив без ограничения общности $P_1=\{1,2,\cdots,k\}$.

Пусть последовательность $d_2,\cdots,d_k$ имеет $m-1$ чисел $e_1,\cdots,e_{m-1}$ из (0,1) на местах с номерами $r_1<\cdots<r_{m-1}$. Множество индексов $\{1,\cdots,k\}$ подразделим на группы

$Q_1=\{1,2,\cdots,r_1\},Q_2=\{r_1+1,\cdots,r_2\},\cdots,Q_{m+1}=\{r_m+1,\cdots,k\}$, и положим $(n=\overline{1,m+1})$:

$y_n=\min_{i\in Q_n}x_i$.

Введем ФР: а) для любого $u>0$

$$\tilde G_\gamma^u(x)=G_\gamma(x-u)-\int_0^1[G_\gamma-\tilde G_\gamma]\left(x(1-w)^{-\frac{1}{\gamma}}\right)d_wG_{1/\gamma}(wu^{-\gamma}),x\geq 0;$$

б) для $u\in(-\infty,+\infty)$

$G_\gamma^u(x)=G_\gamma(x-u),\ x\in(-\infty,+\infty)$.

Пусть $\tilde g_\gamma^u(x)$ и $g_\gamma^u(x)$ соответствующие плотности и

$$f_\gamma(x)=\begin{cases}\tilde g_\gamma(x) & \text{при}\quad \rho_{r1}=1,\\ g_\gamma(x) & \text{при}\quad \rho_{r1}>1,\end{cases}$$

$$f_\gamma^u(x)=\begin{cases}\tilde g_\gamma^u(x) & \text{при}\quad \rho_{r1}=1,\\ g_\gamma^u(x) & \text{при}\quad \rho_{r1}>1.\end{cases}$$

Теорема 2. При условиях $\rho_{r1}\geq 1$, (2_r), (4) и $P_1=\{1,2,\cdots,k\}$.

$$F_\gamma\left(x_i,d_{i+1}:i=\overline{1,k}\right)=\int_{-\infty}^{y_1}\cdots\int_{-\infty}^{y_{m+1}}f_\gamma(u_1)\cdot$$

$$\cdot\left\{\prod_{j=2}^{m+1}e_{j-1}^{-1/\gamma}\cdot f_\gamma^{u_{j-1}\left(e_{j-1}^{-1}\right)^{1/\gamma}}\left(u_je_{j-1}^{-1/\gamma}\right)\right\}du_1\cdots du_{m+1}.$$

Схема доказательств теорем 1 и 2 аналогична доказательству подобных теорем для модели M|G|1|∞ (см.[9, 10]).

Заключение

В работе впервые получены условия независимости и предельные распределения для многомерного распределения виртуальных времен ожидания в модели Прабху в нестационарном режиме.

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 15-01-99482-а.

Примечания:

1. Гнеденко Б.В., Даниелян Э.А. и др. Приоритетные системы обслуживания. М.: МГУ, 1973, 447с.
2. Симонян А.Р., Улитина Е.И. О параметрических моделях массового обслуживания. // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2005. Т. 12. С. 184.
3. Симонян А.Р., Симонян Р.А., Улитина Е.И., Ушаков В.Г. Стационарные времена ожидания в модели Клейнрока с нелинейной функцией приоритета. // Известия Сочинского государственного университета. 2013. № 1-2. С. 26-42.
4. Симонян А.Р., Улитина Е.И. Нестационарные характеристики модели Клейнрока с нелинейной функцией приоритета. // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2010. Т. 17. № 2. С. 57.
5. Симонян А.Р., Симонян Э.А. Оптимальное упорядочение параметров модели Клейнрока. // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2003. Т. 10. С. 23.
6. Даниелян Э.А. Математическая теория приоритетных моделей $M_r|G_r|1|\infty$. Дисс. на соиск. уч. степени докт. физ.-мат. наук, М.: МГУ, 1981, 257 с.
7. Симонян А.Р. Предельные теоремы в модели Прабху при фиксированных загрузках. Дисс. на соиск. уч. степени канд. физ.-мат. наук, Ереван , 1991, 119 с.
8. Simonyan A.R., Simonyan R.A. Modern trends in the study of single-channel parametric models of queuing// Modeling of Artificial Intelligence. 2014. № 4 (4). С. 184-188.
9. Симонян А.Р. Новое представление многомерных предельных законов в модели $M|G|1|\infty$.//Вероятность и оптимизация. 1991. С.77-94.
10. Simonyan A.R., Ulitina E.I. A theorm on the cjnvergence to stable lawin the $M|G|1|\infty$ model.// Russian Mathematical Surveys. 2004. Т. 59. № 3. С. 589-590.

References:

1. Gnedenko B.V., Danielyan E.A. i dr. Prioritetnye sistemy obsluzhivaniya [Priority queuing systems]. M.: MGU, 1973, 447 c.
2. Simonyan A.R., Ulitina E.I. O parametricheskikh modelyakh massovogo obsluzhivaniya [Parametric queueing models]. // Obozrenie prikladnoi i promyshlennoi matematiki. 2005. T. 12. S. 184.
3. Simonyan A.R., Simonyan R.A., Ulitina E.I., Ushakov V.G. Statsionarnye vremena ozhidaniya v modeli Kleinroka s nelineinoi funktsiei prioriteta [Stationary waiting times in the model Kleinrock with non-linear priority function]. // Izvestiya Sochinskogo gosudarstvennogo universiteta. 2013. № 1-2. S. 26-42.
4. Simonyan A.R., Ulitina E.I. Nestatsionarnye kharakteristiki modeli Kleinroka s nelineinoi funktsiei prioriteta [Non-stationary characteristics of the model Kleinrock with non-linear priority function]. // Obozrenie prikladnoi i promyshlennoi matematiki. 2010. T. 17. № 2. S. 57.
5. Simonyan A.R., Simonyan E.A. Optimal'noe uporyadochenie parametrov modeli Kleinroka [The optimal regularization of the model parameters Kleinrock]. // Obozrenie prikladnoi i promyshlennoi matematiki. 2003. T. 10. S. 23.
6. Danielyan E.A. Matematicheskaya teoriya prioritetnykh modelei $M_r|G_r|1|\infty$ [Mathematical theory of priority models $M_r|G_r|1|\infty$]. Diss. na soisk. uch. stepeni dokt. fiz.–mat. nauk, M.: MGU, 1981, 257 s.
7. Simonyan A.R. Predel'nye teoremy v modeli Prabkhu pri fiksirovannykh zagruzkakh [Limit theorems in the model Prabhu at fixed downloads]. Diss. na soisk. uch. stepeni kand. fiz. – mat. nauk, Erevan , 1991, 119 s.
8. Simonyan A.R., Simonyan R.A. Modern trends in the study of single-channel parametric models of queuing.// Modeling of Artificial Intelligence. 2014. № 4 (4). S. 184-188.
9. Simonyan A.R. Novoe predstavlenie mnogomernykh predel'nykh zakonov v modeli $M|G|1|\infty$ [A new view of multidimensional limit laws in the model $M|G|1|\infty$]. // Veroyatnost' i optimizatsiya. 1991. S.77-94.
10. Simonyan A.R., Ulitina E.I. A theorm on the cjnvergence to stable lawin the $M|G|1|\infty$ model. // Russian Mathematical Surveys. 2004. T. 59. № 3. S. 589-590.

УДК 519.87

Новое представление многомерных предельных законов в модели Прабху

[1] Арсен Рафикович Симонян
[2] Елена Ивановна Улитина
[3] Симон Жоржевич Симаворян

[1-3] Сочинский государственный университет, Российская Федерация
354000 Краснодарский край, г. Сочи, ул. Советская, 26 а
[1-2] Кандидат физико-математических наук, доцент
[1] E-mail: oppm@mail.ru
[2] E-mail: ulitinaelena@mil.ru
[3] Кандидат технических наук
E-mail: simsim58@mail.ru

Аннотация. В статье исследуются многомерные предельные законы для виртуальных времен ожидания модели Прабху. Предполагаются, что загрузки системы больше единицы. Тем самым система находится в нестационарном режиме. Для нестационарного режима получение точных результатов непросто, поэтому были получены асимптотические результаты при определенных ограничениях на процессы поступления.

Ключевые слова: система массового обслуживания, случайный процесс, вероятность, время ожидания, функция распределения.