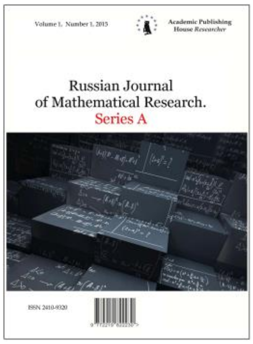
Published in the Russian Federation
Russian Journal of Mathematical Research. Series A
Has been issued since 2015.
ISSN: 2410-9320
E-ISSN: 2413-7529
Vol. 3, Is. 1, pp. 23-37, 2016

DOI: 10.13187/rjmr.a.2016.3.23
www.ejournal30.com



UDC 519.87

Some Marginal Distributions in the Model Kleinrock

[1] Rafik A. Simonyan
[2] Irina P. Lopatina
[3] Nadezhda A. Kornienko

[1] Kuban State University, Russian Federation
Stavropolskaya Str., 149, Krasnodar 350400
Post-graduate student
E-mail: raf55@list.ru
[2] High School, 8
Parkovaya Str., 19, Sochi city, Russia 354000
Teacher
E-mail: iralopatina@rambler.ru
[3] Sochi State University, Russian Federation
Sovetskaya Str., 26 a, Sochi 354000
E-mail: kornienko_nadja@mai.ru

Abstract

In this article we study the virtual waiting times parametric model Kleinrock. The analysis is the development of the idea of the probabilistic interpretation of the integral equation Takacs and nested Markov chains. In the derivation of the main results, we use the method of introducing an additional event, regardless of when the operation of the system assumes that the system receives a Poisson flow of disasters and the Laplace transform is given a probabilistic sense. Further, the unit of analysis is based on the formula of total probability.

Keywords: queueing theory, probability theory, stochastic process, distribution function of the waiting time, the inflow period of employment.

Актуальность работы

Бурное развитие компьютерных систем диктует необходимость разработки и изучения их математических моделей.

По мнению известного в области вычислительных системам Л. Клейнрока “применения теории очередей для анализа распределения ресурсов и решения задач о потоках данных в вычислительных системах является, по-видимому, единственным доступным специалистам по вычислительной технике методом, позволяющим понять сложные связи в таких системах”.

Для применений перспективным считается анализ параметрических дисциплин в системах массового обслуживания (или системах очередей). Разработчик реальной вычислительной системы подбирает параметры так, чтобы адекватно описать ситуацию. В первую очередь ему важны “богатство” дисциплины и простота технической реализации. Для специалиста в области математического моделирования выбор дисциплины и модели определяют аппарат анализа и сложность аппарата. Для обоих на этапе разработки приемлема модель модель $M_r|G_r|1|\infty$.

Модель $M_r|G_r|1|\infty$. В систему массового обслуживания с ожиданием поступают r независимые пуассоновские потоки 1-вызовов, ..., r-вызовов с параметрами $a_1,\cdots,a_r$ соответственно. Длительности обслуживания вызовов независимы, не зависят от процесса поступления и для k-вызовов, , имеют функцию распределения $B_k(x)$, $B_k(+0)=0$.

Теория модели $M_r|G_r|1|\infty$ с классическими приоритетными дисциплинами глубоко разработана ([1-7]).

Параметрическую дисциплину строят таким образом, чтобы её “предельными” случаями были: дисциплина относительных или абсолютных приоритетов и FIFO (first input – first output) или LIFO (last input – first output). Выбор параметров приоритета дает возможность регулировать степень предоставляемого преимущества различным потокам.

В рамках модели $M_r|G_r|1|\infty$ были разработаны различные параметрические дисциплины [1,7-15]).

Дисциплина Клейнрока задается следующим образом: поступивший в момент $\tau>0$ в модель k-вызоу, $k=\overline{1,r}$, в момент $t>\tau$ присвоивают приоритет $q_k(t)=b_k(t-\tau)$, где $b_1\ge b_2\ge\ldots\ge b_r>0$-параметры модели. После очередного завершения обслуживания из очереди на прибор выбирается вызов с наибольшим приоритетом.

Дисциплина Клейнрока является $(r-1)$ - параметрической дисциплиной и зависит от отношений $\left(b_{k+1}/b_k\right)$, $k=\overline{1,r-1}$. Частные случаи $b_1=b_2=\ldots=b_r$ и $\left(b_\kappa/b_{\kappa+1}\right)\to\infty$, $k=\overline{1,r-1}$, соответствуют дисциплинам FIFO (first input - first output) и относительных приоритетов с дисциплиной FIFO внутри потоков.

Главная характеристика – виртуальное время ожидания $w_k(t)$ k-вызова в момент t, $k=\overline{1,r}$, являющаяся аналогом “времени реакции” в вычислительных системах.

С величиной $w_k(t)$, $k=\overline{1,r}, t>0$, тесно связан период занятости $T_k(u)$ с задержкой u, со скоростью роста приоритета b_{k+1}. $T_k(u)$ начинается с задержки u, в начале которой вызовы в модели отсутствуют и за которую вызовы накапливаются, но не обслуживаются.

Он определяется следующим образом.

Пусть: υ - случайное число обслуженных вызовов за общий период занятости модели с задержкой u; внутри него $u=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_\upsilon$ - последовательные моменты окончаний задержки и обслуживаний вызовов.

Полагаем $T_k(u)=t_n$, $n\ge 0$, если при $m=\overline{0,n-1}$ ($\overline{0,-1}$-пусто) в моменты t_m+0 и t_n+0 в модели имеются и отсутствуют вызовы с приоритетом соответственно больше $b_{k+1}t_m$ и $b_{k+1}t_n$.

Сформулируем основные результаты работы.

Пусть $\pi_k(s)$, $k=\overline{1,r}$, $s\ge 0$ - минимальный по абсолютному значению корень среди корней $x=x(s)$ функционального уравнения

$$\sigma_k \cdot x = \sum_{i=1}^{k} a_{ik} \cdot \beta_i(s + \sigma_k - \sigma_k \cdot x), \qquad (1)$$

где $a_{ik} = a_i \cdot \left(1 - \frac{b_{k+1}}{b_i}\right)$, $i = \overline{1,k}$, $\sigma_k = a_{1k} + a_{2k} + \ldots + a_{kk}$, $b_{r+1} = 0$,

$$\beta_k(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dB_k(x), \; s \geq 0.$$

При $k = \overline{1,r}, i = \overline{1,k}$, $s \geq 0$ положим

$$m_k(s) = s + \sigma_k - \sigma_k \pi_k(s), \;\; \pi_{ik}(s) = \beta_i(m_k(s))$$

и введем в рассмотрение функции

$$y_k(s) = s + \sum_{i=1}^{k-1} (a_{ik} - a_{ik-1})(1 - \pi_{ik}(s)) + a_{kk} \cdot (1 - \pi_{kk}(s)).$$

Теорема 1. При любых $s_1 \geq 0, \ldots, s_r \geq 0$ и $0 = u_0 \leq u_1 \leq \ldots \leq u_{r-1}$ справедливо равенство

$$E \exp(-\sum_{i=1}^{r-1} s_i \cdot T_i(u_i)) =$$
$$= \prod_{n=1}^{r-1} \exp(-m_n(s_n + y_{n+1}(s_{n+1} + \ldots y_{r-1}(s_{r-1})\ldots))(u_n - u_{n-1})), \qquad (2)$$

где E – знак математического ожидания. В дальнейшем обозначения для дисциплины относительных приоритетов отличаются от обозначений для дисциплины Клейнрока дополнительным верхним индексом 0. Например, функции $\pi_k^0(s)$, $y_k^0(s)$, $m_k^0(s)$, $k = \overline{1,r}, i = \overline{1,k}$, $s \geq 0$, как и многие другие, те же, что и выше, если положить $(b_i / b_j) = 0$ при $1 \leq j < i \leq r$.

Аналог Теоремы 1. при дисциплине относительных приоритетов получен ранее в [3].

Теорема 1*. При любых $s_1 \geq 0, \ldots, s_r \geq 0$ и $0 = u_0 \leq u_1 \leq \ldots \leq u_{r-1}$ справедливо равенство

$$E \exp(-\sum_{i=1}^{r-1} s_i \cdot T_i^0(u_i)) =$$
$$= \prod_{n=1}^{r-1} \exp(-m_n^0(s_n + y_{n+1}^0(s_{n+1} + \ldots y_{r-1}^0(s_{r-1})\ldots))(u_n - u_{n-1})),$$

где $T_k^0(u)$, $k = \overline{1,r-1}$, $u > 0$, - период занятости обслуживанием $\overline{1,k}$ - вызовов (1-вызовов, …, k-вызовов) с задержкой u.

Пусть $v_k(t)$, $k = \overline{1,r}$, $t > 0$, есть $w_k(t)$ без времен обслуживания тех $\overline{1,k-1}$ - вызовов, которые поступили в модель после момента t и обслужены до момента $t + w_k(t)$.

Нами показано, что для траекторий процесса $\{(v_1(t),\ldots,v_r(t)):t\geq .0\}$ справедливы неравенства $v_1(t)\leq\ldots\leq v_r(t),\ t\geq 0$, и справедливо равенство

$$(w_1(t),w_2(t),\ldots,w_r(t))\overset{d}{=}(v_1(t),T_1(v_2(t)),\ldots,T_{r-1}(v_r(t))),\ t\geq 0, \qquad (3)$$

где при каждом $k=\overline{1,r}$ процессы $T_{k-1}(\cdot)$ и $v_k(t)$ независимы. Символ d указывает на совпадение функции распределения обеих частей случайного равенства.

При $n=\overline{1,r-1}$ и $s_n\geq 0$ обозначим

$$\lambda_r(s_r)=m_{r-1}(s_r),$$
$$\lambda_n(s_n,\ldots,s_r)=m_{n-1}(s_{n-1}+y_{n-1}(s_n+\ldots y_{r-1}(s_r)\ldots))-$$
$$-m_n(s_n+y_n(s_{n+1}+\ldots y_{r-1}(s_r)\ldots)),$$
$$m_0(s)=s,\qquad s\geq 0.$$

Из (3) и Теоремы 1. выводится

Ключевое уравнение. При любых $s_1\geq 0,\ldots,s_r\geq 0$ и $t\geq 0$ справедливо равенство

$$E\exp\{-\sum_{i=1}^{r}s_i\cdot\omega_i(t)\}=E\exp\{-\sum_{i=1}^{r}\lambda_i(s_i,\ldots,s_r)v_i(t)\}. \qquad (4)$$

При дисциплине относительных приоритетов, как правило, используют условное виртуальное время ожидания $\overline{w}_K^0(t),k=\overline{1,r},\ t\geq 0$, k-вызова в момент t при условии прекращения с момента t доступа вызовов в модель. Очевидно, что $\overline{w}_K^0(t)\equiv v_k^0(t),k=\overline{1,r}$, $t\geq 0$.

Известно, что при $s_1\geq 0,\ldots,s_r\geq 0$ и $t\geq 0$ [8]

$$E\exp\{-\sum_{i=1}^{r}s_i\cdot w_i^0(t)\}=E\exp\{-\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^0(s_i,\ldots,s_r)\overline{w}_i^0(t)\}.$$

Пусть $P(u)du,\ u\geq 0$ - вероятность свободного состояния прибора в $[u,u+du)$, а $w(t),\ t\geq 0$,- суммарное время обслуживания вызовов, находящихся в очереди в момент t, плюс остаточное время $w_0(t)$. $w_0(t),\ t\geq 0$, равно части обслуживания вызова на приборе в момент t до завершения обслуживания и нулю, если в момент t прибор свободен.

Величины $P(t)$ и $w(t),\ t\geq 0$, инвариантны в классе консервативных дисциплин модели $M_r|G_r|1|\infty$ и определяются из уравнений [16]

$$\int_0^\infty e^{-st}P(t)dt=(m_r(s))^{-1},s\geq 0, \qquad (5)$$

$$w(s,t)=Ee^{-sw(t)}=e^{p_r(s)t}\cdot\{1-s\cdot\int_0^t e^{-p_r(s)u}P(u)du\},t\geq 0,s\geq 0, \qquad (6)$$

(интегральное уравнение Такача), где обозначено

$$p_k(s)=s-\sum_{i=1}^{k}a_i\cdot(1-\beta_i(s)),\ k=\overline{1,r},\ s\geq 0.$$

При $k=\overline{1,r}$, $j=\overline{k,r}$, $s\geq 0$, $t\geq 0$ обозначим

$$p_k^j(s)=s-\sum_{i=1}^{k}a_{ij}(1-\beta_i(s)),\quad v_k(s,t)=Ee^{-sv_k(t)},\quad \omega_k(s,t)=Ee^{-sw_k(t)}.$$

Теорема 2. При любых $k=\overline{1,r}$, $s\ge 0$, $t\ge 0$ справедливы равенства

$$\omega_k(s,t)=v_k(m_{k-1}(s),t), \tag{7}$$

$$v_k(s,t)=e^{p_k(s)t}\cdot\{1-s\cdot\int_0^t e^{-p_k(s)u}\cdot P(u)du-$$

$$-\sum_{j=k+1}^{r}a_j(1-\beta_j(s))\cdot\int_0^t e^{-p_k(s)v}dv\cdot\int_0^{\frac{b_n}{b_n-b_j}(t-v)} e^{-p_k^{j-1}(s)u}d_uP(w_j(v)<u)\}. \tag{8}$$

Докажем Теорему 1, чему предпошлем

Обсуждение

Пусть $\rho_{k1}=\sum_{i=1}^{k}a_{ik}\beta_{i1}$, $\beta_{k1}=\int_0^\infty xdB_k(x)$, $k=\overline{1,r}$.

Покажем, что если при некотором $k=\overline{1,r-1}$

$$\rho_{k1}\le 1, \tag{9}$$

то при $i=\overline{1,k}$

$$\rho_{i1}\le 1,\quad m_i(0)=0,\quad y_i(0)=0. \tag{10}$$

При $k=\overline{1,r-1}$

$$a_k\left(1-\frac{b_{k+1}}{b_k}\right)<a_k\left(1-\frac{b_{k+2}}{b_k}\right)<\ldots<a_k\left(1-\frac{b_r}{b_k}\right), \tag{11}$$

или

$$a_{kk}<a_{kk+1}<\ldots<a_{kr-1}.$$

Из (9) и (11) следуют первые неравенства (10). Из теории уравнений типа (5) вводной главы [16] следует $\pi_k(0)=1$ при $\rho_{k1}\le 1$ и $\pi_k(0)<1$ при $\rho_{k1}>1$. Тогда из первых неравенств (10) заключаем $\pi_i(0)=1$, $i=\overline{1,k}$, откуда следуют вторые неравенства (10) и

$$\pi_{ji}(0)=\beta_j(m_i(0))=\beta_j(0)=1,\ \ j=\overline{1,i},\quad i=\overline{1,k},$$

что влечет третьи неравенства (10).

Замечание 1. Если $b_k=b_{k+1}$ при некотором $k=\overline{1,r-1}$, то $w_k(t)=w_{k+1}(t)$, $t\ge 0$. Поэтому потоки k-вызовов и (k+1)-вызовов можно объединить в пуассоновский поток с параметром a_k+a_{k+1} и с функцией распределения времени обслуживания

$$\frac{a_k}{a_k+a_{k+1}}B_k(x)+\frac{a_{k+1}}{a_k+a_{k+1}}B_{k+1}(x),\quad x\ge 0.$$

Поэтому без ограничения общности считаем

$$b_1>b_2>\ldots>b_r>0\quad \text{(см. (11))}.$$

Если задержка u в $T_k(u)$ случайна с функцией распределения $B_{(k)}(x)=\sum_{i=1}^{k}(a_{ik}/\sigma_k)B_i(x)$ и $B_i(x), i=\overline{1,k}$, где u и $T_k(\cdot)$ независимы, то $T_k(u)$ соответственно обозначаем T_k и T_{ik}.

Введением дополнительных событий устанавливаем формулы

$$\pi_k(s)=Ee^{-sT_k},\quad \pi_{ik}(s)=Ee^{-sT_{ik}},\quad i=\overline{1,k},\quad k=\overline{1,r-1},\quad s\ge 0.$$

Процесс $\{T_k(u): u \geq 0\}$, $k = \overline{1, r-1}$,- сложный пуассоновский процесс [2 3]. Следовательно, случайный процесс $T_k(u_k)$, $k = \overline{1, r-1}$, $0 = u_0 \leq u_1 \leq \ldots \leq u_{r-1}$, представим в виде суммы независимых процессов

$$T_k(u_k) \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{k} T_k^{(i)}(u_i - u_{i-1}),$$

где $T_k^{(i)}(u)$, $i = \overline{1, k}$, одинаково распределены с $T_k(u)$. Далее, для вектор-процесса (8) справедливо аналогичное представление

$$(T_1(u_1), T_2(u_2), \ldots, T_{r-1}(u_{r-1})) \stackrel{d}{=}$$
$$\stackrel{d}{=} \left(T_1^{(1)}(u_1), T_2^{(1)}(u_1) + T_2^{(2)}(u_2 - u_1), \ldots, \sum_{i=1}^{r-1} T_{r-1}^{(i)}(u_i - u_{i-1}) \right) \quad . \tag{12}$$

При $j = \overline{1, i}$ и фиксированных $u_1, u_2, \ldots, u_{r-1}$ величина $T_i^{(j)}(u_j - u_{j-1})$ составляет часть $T_k^{(j)}(u_j - u_{j-1})$, если $i < k$. Поэтому в правой части (12) при $j \neq l$ и допустимых i и k величины $T_i^{(j)}(u_j - u_{j-1})$ и $T_k^{(l)}(u_l - u_{l-1})$ независимы.

Докажем Теорему 1.

Рассмотрим последовательность моделей $M_k|G_k|1|\infty, k = \overline{1, r-1}$, в k-той из которой параметр i-вызовов, $i = \overline{1, k}$, равен a_{ik}, а функция распределения обслуживания – $B_i(x)$.

Пусть $T_k^0(u)$- период занятости с задержкой u в k-той модели, $k = \overline{1, r-1}$, $u \geq 0$.

Функционирование моделей начинаем с неслучайной задержки $u \geq 0$ и рассмотрим вектор $(T_1^0(u), T_2^0(u), \ldots, T_{r-1}^0(u))$, у которого каждая компонента – часть последующих.

При $u \geq 0$ покажем, что

$$(T_1(u), T_2(u), \ldots, T_{r-1}(u)) \stackrel{d}{=} (T_1^0(u), T_2^0(u), \ldots, T_{r-1}^0(u)). \tag{13}$$

Доказательство (13) проводится аналогично одномерному аналогу (13) (см.[3]).

Покажем, что при $s_1 \geq 0, \ldots, s_{r-1} \geq 0$ и $0 = u_0 \leq u_1 \leq \ldots \leq u_{r-1}$

$$E\exp\left\{-\sum_{k=1}^{r-1} s_k \cdot T_k(u_k)\right\} = \prod_{n=1}^{r-1} E\exp\left\{-\sum_{k=n}^{r-1} s_k \cdot T_k^0(u_n - u_{n-1})\right\}. \tag{14}$$

С учетом (12)-(13), при $s_1 \geq 0, \ldots, s_{r-1} \geq 0$ и $0 = u_0 \leq u_1 \leq \ldots \leq u_{r-1}$ справедливы

$$E\exp\left\{-\sum_{k=1}^{r-1} s_k \cdot T_k(u_k)\right\} = E\exp\left\{-\sum_{k=i}^{r-1} s_k \cdot T_k^{(i)}(u_i - u_{i-1})\right\} =$$

равенства $= E\exp\left\{-\sum_{i=1}^{r-1}\sum_{k=i}^{r-1} s_k \cdot T_k^{(i)}(u_i - u_{i-1})\right\} = \prod_{i=1}^{r-1} E\exp\left\{-\sum_{k=i}^{r-1} s_k \cdot T_k^{(i)}(u_i - u_{i-1})\right\} =$

$$= \prod_{i=1}^{r-1} E\exp\left\{-\sum_{k=i}^{r-1} s_k \cdot T_k(u_i - u_{i-1})\right\} = \prod_{i=1}^{r-1} E\exp\left\{-\sum_{k=i}^{r-1} s_k \cdot T_k^0(u_i - u_{i-1})\right\},$$

приводящие к (14).

Вопрос сводится к вычислению функций

$$E\exp\left\{-\sum_{k=n}^{r-1} s_k \cdot T_k^0(u)\right\}, \quad n=\overline{1,r-1}, \quad u \ge 0, \quad s_n \ge 0,\dots,s_{r-1} \ge 0.$$

Величины $T_k^0(u)$ <u>инвариантны</u> в последовательности моделей, $k=\overline{1,r}$. Выберем «подходящую» для вычислений консервативную дисциплину. При переходе от k-той модели к $(k+1)$-ой к потокам 1-вызовов, ..., k-вызовов с параметрами $a_{1k},\dots,a_{kk}$ присоединяются дополнительные <u>независимые</u> пуассоновские потоки 1-вызовов, ..., k-вызовов, $(k+1)$-вызовов с параметрами $a_{1k+1}-a_{1k},\dots,a_{kk+1}-a_{kk},a_{k+1k+1}$ соответственно. Эти поступающие и необслуженные за $T_k^0(u)$ вызовы будут обслужены за $T_{k+1}^0(u)$. Их мы называем <u>дополнительными</u> в k-той модели.

Предполагаем, что дополнительные в k-той модели вызовы обслуживаются в $\left(T_k^0(u),T_{k+1}^0(u)\right)$ по дисциплине LIFO (last input – first output).

Консервативная дисциплина описана.

С дополнительным в k-той модели i-вызовом, $i=\overline{1,k+1}$, связываем $(i,k+1)$-цикл, то есть промежуток времени, начинающийся с обслуживания этого i-вызова (в свободной от вызовов (k+1)-ой модели) и завершающийся освобождением (k+1)-ой модели от вызовов.

$(i,k+1)$-цикл одинаково распределен с T_{ik+1} и различные циклы, как с различными, так и с одинаковыми i, независимы.

Величина $T_{k+1}^0(u)$ складывается из $T_k^0(u)$ и из независимых циклов, связанных с дополнительными в k-той модели вызовами.

При $m=\overline{2,r-1}, \quad u \ge 0, \quad s_1 \ge 0,\dots,s_m \ge 0$ покажем, что

$$E\exp\left\{-\sum_{k=1}^{m} s_k \cdot T_k^0(u)\right\} = E\exp\left\{-\sum_{k=1}^{m-1} s_k \cdot T_k^0(u) - y_m(s_m)\cdot T_{m-1}^0(u)\right\}. \quad (15)$$

Пусть независимо от функционирования последовательности моделей поступают s_1-катастрофы, ..., s_{r-1}-катастрофы, образующие независимые пуассоновские потоки с параметрами $s_1 \ge 0,\dots,s_{r-1} \ge 0$ соответственно.

Функция $E\exp\left\{-\sum_{k=1}^{m} s_k \cdot T_k^0(u)\right\}$ интерпретируется как вероятность события (за $T_k^0(u)$ не наступают s_k-катастрофы, $k=\overline{1,m}$).

Отсутствие s_m-катастроф за $T_m^0(u)-T_{m-1}^0(u)$ означает, что за циклы, связанные с дополнительными в (m-1)-ой модели вызовами, не наступает s_m-катастрофа. За отдельно взятый (i,m)-цикл, $i=\overline{1,m}$, вероятность наступления s_m-катастрофы равна $1-\pi_{im}(s_m)$, а поток дополнительных в (m-1)-ой модели i-вызовов, за (i,m)-циклы которых наступает s_m-катастрофа, - пуассоновский с параметром $(a_{im}-a_{im-1})\cdot \quad \cdot(1-\pi_{im}(s_m))$ при $i=\overline{1,m-1}$ и $a_{mm}\cdot(1-\pi_{mm}(s_m))$ при $i=m$. Следовательно, при $m=\overline{1,r-1}, \quad u \ge 0, \quad s_1 \ge 0,\dots,s_m \ge 0$

$$E\exp\left\{-\sum_{k=1}^{m} s_k \cdot T_k^0(u)\right\} =$$

$$= \int\limits_{u\le x_1\le\ldots\le x_{m-1}<+\infty} \!\!\!\ldots\int e^{-\sum_{k=1}^{m-1} s_k x_k} E\left(\exp\left\{-s_m \cdot T_m^0(u)\right\} / T_k^0(u) = x_k,\, k=\overline{1,m-1}\right)\cdot$$

$$\cdot\, d_{x_1}\ldots d_{x_{m-1}} P\left(T_1^0(u) < x_1,\ldots,T_{m-1}^0(u) < x_{m-1}\right) =$$

$$= \int\limits_{u\le x_1\le\ldots\le x_{m-1}<+\infty} \!\!\!\ldots\int e^{-\sum_{k=1}^{m-1} s_k x_k} E\left(\exp\left\{-s_m \cdot T_m^0(u)\right\} / T_{m-1}^0(u) = x_{m-1}\right)\cdot$$

$$\cdot\, d_{x_1}\ldots d_{x_{m-1}} P\left(T_1^0(u) < x_1,\ldots,T_{m-1}^0(u) < x_{m-1}\right) =$$

$$= \int\ldots\int\limits_{u\le x_1\le\ldots\le x_{m-1}<+\infty} \exp\left\{-\sum_{k=1}^{m-1} s_k x_k - \begin{pmatrix} s_m + \sum_{i=1}^{m-1}\left(a_{im} - a_{im-1}\right)\left(1-\pi_{im}(s_m)\right) + \\ + a_{mm}\left(1-\pi_{mm}(s_m)\right) \end{pmatrix} x_{m-1}\right\}\cdot$$

$$\cdot\, d_{x_1}\ldots d_{x_{m-1}} P\left(T_1^0(u) < x_1,\ldots,T_{m-1}^0(u) < x_{m-1}\right) =$$

$$= E\exp\left\{-\sum_{k=1}^{m-1} s_k \cdot T_k^0(u) - y_m(s_m)\cdot T_{m-1}^0(u)\right\},$$

откуда следует (15). Здесь P- знак вероятности, E(ξ /A)- условное математическое ожидание случайной величины ξ при осуществлении события A.

При $u \ge 0, \quad s_1 \ge 0,\ldots,s_{r-1} \ge 0$ формула

$$E\exp\left\{-\sum_{k=1}^{r-1} s_k \cdot T_k^0(u)\right\} = \exp\left\{-y_1\left(s_1 + y_2\left(s_2 + \ldots + y_{r-1}\left(s_{r-1}\right)\ldots\right)\right)u\right\}$$

при $r=2$ известна [3], а в общем случае шаг за шагом от $m=r-1$ до $m=1$ выводится из формулы понижения (15). В частности, при $s_1 = \ldots = s_{n-1} = 0, \quad s_n \ge 0,\ldots,s_{r-1} \ge 0, \quad n=\overline{1,r-1}$ и $u \ge 0$ из нее следует

$$E\exp\left\{-\sum_{k=n}^{r-1} s_k \cdot T_k^0(u)\right\} = \tag{16}$$

$$= \exp\left\{-y_1\left(y_2\ldots\left(y_n\left(s_n + y_{n+1}\left(s_{n+1} + \ldots y_{r-1}\left(s_r\right)\ldots\right)\right)\right)\ldots\right)u\right\}.$$

Из (14) и (16) заключаем, что Теорема 1. будет доказана, если справедливо равенство

$$m_n(s) = y_1\left(y_2\ldots\left(y_n(s)\right)\ldots\right), \quad n=\overline{1,r-2}, \quad s\ge 0, \quad ,$$

или

$$m_{n+1}(s) = m_n\left(y_{n+1}(s)\right),$$

или (после несложных преобразований)

$$\sigma_{n+1}\pi_{n+1}(s) = \sigma_n\pi_n\left(y_{n+1}(s)\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(a_{in+1} - a_{in}\right)\pi_{in+1}(s) + a_{n+1n+1}\pi_{n+1n+1}(s). \tag{17}$$

Докажем (17). Пусть задержка u в $T_{n+1}^{0}(u)$ есть случайная величина $\xi_{(n+1)}$ с функцией распределения $B_{(n+1)}(x)$, не зависящая от $T_{n+1}^{0}(\bullet)$. Произведем выкладки, используя формулу (15) при $n=\overline{1,r-2}, \quad s\geq 0$ и учитывая равенства

$$\sigma_{n+1}=\sigma_{n}+\sum_{i=1}^{n}\left(a_{in+1}-a_{in}\right)+a_{n+1n+1},$$

$$\sigma_{n+1}B_{(n+1)}(x)=\sigma_{n}B_{(n)}(x)+\sum_{i=1}^{n}\left(a_{in+1}-a_{in}\right)B_{i}(x)+a_{n+1n+1}B_{(n+1)}(x), x\geq 0.$$

Имеем

$$\pi_{n+1}(s)=E\exp\left\{-s\cdot T_{n+1}^{0}\left(\xi_{(n+1)}\right)\right\}=\int_{0}^{\infty}E\exp\left\{-s\cdot T_{n+1}^{0}(x)\right\}dB_{(n+1)}(x)=$$

$$=\frac{\sigma_{n}}{\sigma_{n+1}}\cdot\int_{0}^{\infty}Ee^{-y_{n+1}(s)\cdot T_{n}^{0}(x)}dB_{(n)}(x)+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{in+1}-a_{in}}{\sigma_{n+1}}\int_{0}^{\infty}Ee^{-s\cdot T_{n+1}^{0}(x)}dB_{i}(x)+$$

$$+\frac{a_{n+1n+1}}{\sigma_{n+1}}\cdot\int_{0}^{\infty}Ee^{-s\cdot T_{n+1}^{0}(x)}dB_{n+1}(x)=\frac{\sigma_{n}}{\sigma_{n+1}}\cdot Ee^{-y_{n+1}(s)\cdot T_{n}^{0}\left(\xi_{(n)}\right)}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{in+1}-a_{in}}{\sigma_{n+1}}Ee^{-s\cdot T_{n+1}^{0}(\xi_{i})}+\frac{a_{n+1n+1}}{\sigma_{n+1}}Ee^{-s\cdot T_{n+1}^{0}(\xi_{n+1})}=$$

$$=\frac{\sigma_{n}}{\sigma_{n+1}}\pi_{n}\left(y_{n+1}(s)\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{in+1}-a_{in}}{\sigma_{n+1}}\pi_{in+1}(s)+\frac{a_{n+1n+1}}{\sigma_{n+1}}\pi_{n+1n+1}(s),$$

откуда следует (17). Здесь случайные величины $\xi_{(n)}$ и ξ_{i}, $i=\overline{1,n+1}$, имеют функции распределения $B_{(n)}(x)$ и $B_{i}(x)$, а $\xi_{(n)}$ и $T_{n}^{0}(\bullet)$, ξ_{i} и $T_{n+1}^{0}(\bullet)$ независимы.

<u>Замечание 2</u>. <u>Обсуждение</u> и <u>Теорема 1</u>. показывают, что

$$\pi\left(s_{1},\ldots,s_{r-1};u_{1},\ldots,u_{r-1}\right)\Big|_{s_{1}=\ldots=s_{r-1}=0}=$$

$$=E\exp\left\{-\sum_{i=1}^{r-1}s_{i}T_{i}\left(u_{i}\right)\right\}\Bigg|_{s_{1}=\ldots=s_{r-1}=0}\begin{cases}=1 & \text{при} \quad \rho_{r-1i}\leq 1,\\ <1 & \text{при} \quad \rho_{r-1i}>1.\end{cases} \blacktriangleright$$

Перейдем к виртуальных времен ожидания $w_k(t)$, $k=\overline{1,r}$, $t\geq 0$, в модели Клейнрока. Анализ производится двумя методами:

а) Развитием идеи вероятностной интерпретации интегрального уравнения Такача;

б) Предлагаемым нами и апробированным в [14] на дисциплине относительных приоритетов модели $M_{r}\left|G_{r}\right|1\left|\infty\right.$ <u>новым</u> методом.

Опишем суть нового метода.

При каждом $k=\overline{0,r-1}$ обозначим через $\eta_{jk}(t)$, $j=\overline{k+1,r}, t\geq 0$, суммарное время обслуживания j-вызовов, находящихся в очереди в момент t, которые обслужены после момента $t+w_k(t)$.

При дисциплине относительных приоритетов $\eta_{jk}(t), k=\overline{1,r}, j=\overline{k+1,r}, t\geq 0$, совпадает с суммарным временем обслуживания всех j-вызовов, находящихся в очереди в момент t, т.е. не зависит от k: $\eta^0_{j\ k}(t)=\eta^0_j(t)$.

Все $(k+1)$-вызовы, $k=\overline{0,r-1}$, находящиеся в очереди в момент t, имеют приоритет больше, чем виртуальный в момент t $(k+1)$-вызов. Поэтому они будут обслужены за

$$(t+w_0(t), t+w_{k+1}(t)).$$

Часть из них включается в $v_k(t)$, а суммарное время обслуживания остальных равно $\eta_{k+1\ k}(t)$ при $k=\overline{1,r-1}$.

При k=0 все $(k+1)$-вызовы (т.е. 1-вызовы) из очереди в момент t включаются в $\eta_{k+1\ k}(t)$.

При заданном $k=\overline{0,r-1}$ ясно, что суммарное обслуживание j-вызовов, $j=\overline{k+2,r}$, которые будут обслужены за

$$(t+w_k(t), t+w_{k+1}(t))$$

(т.е. принадлежат $v_{k+1}(t)$), равно $\eta_{j\ k}(t)-\eta_{j\ k+1}(t)$.

Из определения следует, что величина $v_{k+1}(t)$, $k=\overline{0,r-1}$, складывается из $v_k(t)$ и из обслуживаний всех вышеперечисленных $\overline{k+1,r}$-вызовов. Следовательно, при $k=\overline{0,r-1}$ для траектории вектор-процесса (5) справедливо равенство

$$v_{k+1}(t)=v_k(t)+\eta_{k+1\ k}(t)+\sum_{j=k+2}^{r}\left(\eta_{j\ k}(t)-\eta_{j\ k+1}(t)\right),\ t\geq 0,$$

или

$$v_r(t)=w(t)=v_k(t)+\sum_{j=k+1}^{r}\eta_{j\ k}(t),\ t\geq 0.$$

Отметим, что величина

$$\zeta_k(t)=\eta_{k+1\ k}(t)+\sum_{j=k+2}^{r}\left(\eta_{j\ k}(t)-\eta_{j\ k+1}(t)\right)$$

есть суммарное время обслуживания $\overline{k+1,r}$-вызовов, находящихся в очереди в момент t, которые обслужены за $(t+w_k(t), t+w_{k+1}(t))$.

В случае относительных приоритетов эти равенства при $k=\overline{0,r-1}$ приобретают виды

$$\overline{w}^0_{k+1}(t)=\overline{w}^0_k(t)+\eta^0_{k+1}(t),\ t\geq 0,$$

и

$$\overline{w}^0_r(t)=w(t)=\overline{w}^0_k(t)+\sum_{j=k+1}^{r}\eta^0_j(t),\ t\geq 0,$$

где $\zeta^0_k(t)=\eta^0_{k+1}(t)$.

При переходе от относительных приоритетов к дисциплине Клейнрока усложнение анализа (любым методом), образно говоря, сравнимо с трудностями в теории суммирования независимых случайных величин при переходе от последовательностей к схемам серий.

Новый метод записывает вышеприведенные равенства в терминах преобразований Лапласа-Стилтьеса и технически реализуется с помощью приема введения дополнительных событий.

Докажем Теорему 2.

Пусть независимо от функционирования модели наступают катастрофы, образующие пуассоновский поток с параметром s≥0. Любой j-вызов, $j=\overline{1,r}$, называем "хорошим", если за его обслуживание не наступает катастрофа.

Зафиксируем $k=\overline{1,r}$ и при t≥0 рассмотрим события:

$A_k(t)$=(за (0,t) поступали лишь хорошие $\overline{1,k}$-вызовы);
$B_k(t)$=(за (0,t) и за $v_k(t)$ не наступали катастрофы).
Тогда при t≥0, s≥0

$$P\left(A_k(t)\right)=\exp\left\{-\sum_{i=1}^{k}a_i\left(1-\beta_i(s)\right)t\right\},\ P\left(B_k(t)\right)=e^{-st}\cdot v_k(s,t). \qquad (18)$$

Так как $A_k(t)\supseteq B_k(t)$, то справедливо равенство

$$P\left(A_k(t)\right)=P\left(B_k(t)\right)+P\left(A_k(t)\cap\overline{B_k(t)}\right),\ t\geq 0, \qquad (19)$$

где $\overline{C}$ есть дополнение события C.

Выполнение события $A_k(t)\cap\overline{B_k(t)}$ необходимо влечет наступление <u>первой</u> катастрофы:

1. Либо за (0,t) в момент, когда модель свободна от вызовов;
2. Либо за (0,$t+w_0(t)$), когда некоторый j-вызов, $j=\overline{k+1,r}$, находился на приборе;
3. Либо за ($t+w_{n-1},t+w_n(t)$), $n=\overline{1,k}$, когда некоторый j-вызов, $j=\overline{k+1,r}$, находился на приборе, без учета времен обслуживания $\overline{1,j-1}$-вызовов, которые поступили в модель после момента t и обслужены до начала обслуживания данного j-вызов.

Определим события $R_k(t),R_{jk}(t),R_{njk}(t),j=\overline{k+1,r}$, $n=\overline{1,k}$, t≥0, как пересечение $A_k(t)$ с <u>несовместимыми</u> событиями $F_k(t)$, $F_{jk}(t)$, $F_{njk}(t)$, описанными в 1.,2.,3. соответственно.
В силу (19), при t≥0 имеем

$$P\left(A_k(t)\right)=P\left(B_k(t)\right)+P\left(R_k(t)\right)+\sum_{j=k+1}^{r}P\left(R_{jk}(t)\right)+\sum_{j=k+1}^{r}\sum_{n=1}^{k}P\left(R_{njk}(t)\right). \qquad (20)$$

Известно [17], что при $j=\overline{k+1,r}$ и t≥0

$$P\left(R_k(t)\right)=s\cdot e^{(-s+p_k(s))t}\int_0^t e^{-p_k(s)u}P(u)du, \qquad (21)$$

$$P\left(R_{jk}(t)\right)=a_j\left(1-\beta_j(s)\right)e^{(-s+p_k(s))t}\int_0^t e^{-p_k(s)v}dv\int_0^{t-v}e^{-p_k(s)u}d_uP\left(w_j(v)<u\right). \qquad (22)$$

Нечеткость в определении события $\bigcup_{n=1}^{k}R_{njk}(t)$ привела к ошибке в работе [34].

Вычислим вероятность $P(R_{njk}(t))$, $j=\overline{k+1,r}$, $n=\overline{1,k}$, t≥0.

При $j=\overline{k+1,r}$, $n=\overline{1,k}$, t≥0 введем события $C_{njk}(t)$=(первая катастрофа наступила за обслуживание j-вызова в ($t+w_{n-1},t+w_n(t)$)) и условие A_{nj}: обслуживание этого j-вызова (скажем, меченого j-вызова) началось в момент

$$u+v\in(t+w_{n-1},t+w_n(t)), \qquad (23)$$

где $v\in(0,t)$ – момент его поступления в модель (вероятность $a_jd_uP\left(w_j(v)<u\right)dv$).

При условии $A_{n\,j}$ события $F_{n\,j\,k}(t)$, $R_{n\,j\,k}(t)$ и $C_{n\,j\,k}(t)$, $j=\overline{k+1,r}$, $n=\overline{1,k}$, $t\geq 0$, соответственно обозначим $F_{n\,j\,k}(t,u,v)$, $R_{n\,j\,k}(t,u,v)$ и $C_{n\,j\,k}(t,u,v)$. Тогда

$$P\left(C_{n\,j\,k}(t,u,v)\right)=e^{-s\cdot(u+v)}\cdot\left(1-\beta_j(s)\right),\ s\geq 0, \tag{24}$$

(не зависит от n и k непосредственно).

Ограничение (23) на величину u уточним из условий совпадения приоритетов меченого j-вызова и виртуальных в момент t (n-1)-вызова и n-вызова соответственно.

$$x\cdot b_{n-1}=(t-v+x)b_j \qquad \text{и} \qquad x'\cdot b_n=(t-v+x')b_j,$$

где величины

$$x=\frac{b_j}{b_{n-1}-b_j}(t-v) \text{ и } \qquad x'=\frac{b_j}{b_n-b_j}(t-v)$$

определяют моменты $t+x$ и $t+x'$ совпадений упомянутых приоритетов. Тогда включение (23) эквивалентно неравенствам

$$x+t-v\leq u\leq x'+t-v$$

или неравенствам

$$\frac{b_n}{b_{n-1}-b_j}(t-v)\leq u\leq\frac{b_n}{b_n-b_j}(t-v) \tag{25}$$

Рис. 1 интерпретирует неравенства (25), где x_i, $i=\overline{1,k}$, есть момент поступления в модель виртуального i-вызова, достигающего в момент $u+v$ приоритета меченого j-вызова. При этом из равенства

$$ub_j=(u+v-x_i)b_i,\ i=\overline{1,k},$$

получаем

$$x_i=v+u\left(1-\frac{b_j}{b_i}\right),\ i=\overline{1,k}, \tag{26}$$

и легко устанавливаем эквивалентность неравенств $x_n\leq t\leq x_{n-1}$ и (25).

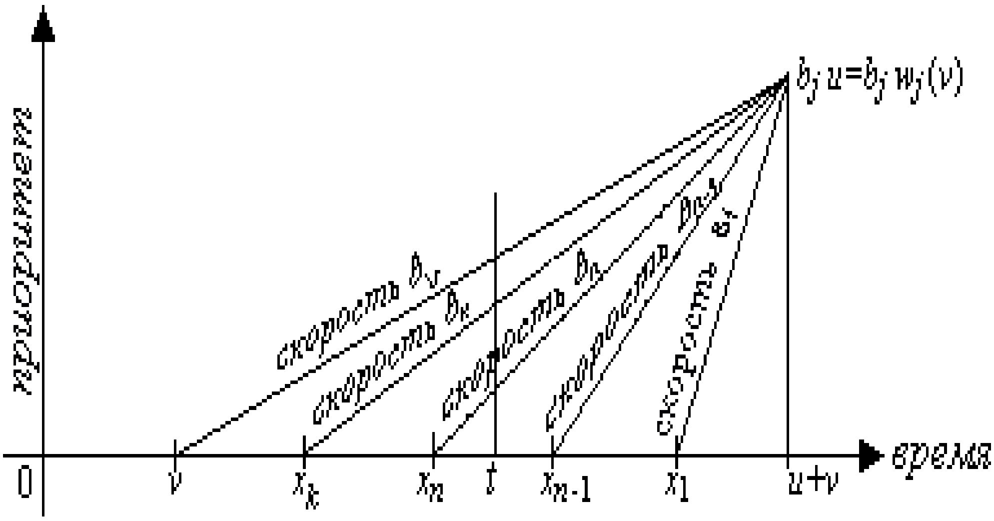


Рис. 1. Интерпретация неравенства (25)

Принимая во внимание эквивалентность условий (23) и (25) с $v\in(0,t)$, по формуле полной вероятности, при $j=\overline{k+1,r}$, $n=\overline{1,k}$, $t\geq 0$ записываем равенство

$$P\left(R_{n\,j\,k}(t)\right)=a_j\int_0^t\int_{\frac{b_{n-1}}{b_{n-1}-b_j}(t-v)}^{\frac{b_n}{b_n-b_j}(t-v)}P\left(R_{n\,j\,k}(t,u,v)\right)d_uP\left(w_j(v)<u\right)dv. \quad (27)$$

При условии $A_{n\,j}$ для событий

$E_{nk}(t,u,v)$=(за (t,x_i) поступали лишь хорошие i-вызовы при $i=\overline{1,n-1}$),

$D_{nk}(t,u,v)$=(за (x_i,t) поступали лишь хорошие i-вызовы при $i=\overline{n,k}$)

выполнено, как легко видеть, с учетом (26), равенство

$$\frac{P\left(D_{nk}(t,u,v)\right)}{P\left(E_{nk}(t,u,v)\right)}=\exp\left\{-\sum_{i=1}^{k}a_i\left(1-\beta_i(s)\right)\left(t-v-u\left(1-\frac{b_j}{b_i}\right)\right)\right\} \quad (28)$$

(не зависит от n).

При условии $A_{n\,j}$ справедливы равенства:

$$R_{n\,j\,k}(t,u,v)=F_{n\,j\,k}(t,u,v)\cap A_k(t)=F_{n\,j\,k}(t,u,v)\cap D_{n\,k}(t,u,v),$$

поскольку выполнение события $F_{n\,j\,k}(t,u,v)$ влечет отсутствие катастроф за обслуживания m-вызовов, $m=\overline{n,k}$, поступающих за $(0,x_m)$, и за обслуживание l-вызовов $l=\overline{1,n-1}$, поступающих за $(0,t)$.

При условии A_{nj} также справедливо равенство

$$C_{njk}(t,u,v)=F_{njk}(t,u,v)\cap E_{nk}(t,u,v).$$

Следовательно, при условии $A_{n\,j}$ справедливо равенство

$$E_{n\,k}(t,u,v)\cap R_{n\,j\,k}(t,u,v)=D_{n\,k}(t,u,v)\cap C_{n\,j\,k}(t,u,v),$$

что из-за независимости событий $E_{nk}(t,u,v)$ и $R_{njk}(t,u,v)$, $D_{nk}(t,u,v)$ и $C_{njk}(t,u,v)$, в силу (24) и (28), дает

$$P\left(R_{n\,j\,k}(t,u,v)\right)=\frac{P\left(D_{n\,k}(t,u,v)\right)}{P\left(E_{n\,k}(t,u,v)\right)}\cdot P\left(C_{n\,j\,k}(t,u,v)\right)=$$

$$=\left(1-\beta_j(s)\right)e^{(-s+p_k(s))t}e^{-p_k(s)v}e^{-p_k^{j-1}(s)u}.$$

Отсюда и из (27) при $j=\overline{k+1,r}$, $n=\overline{1,k}$ и $t\geq 0$ находим

$$P\left(R_{n\,j\,k}(t)\right)=a_i\left(1-\beta_j(s)\right)\cdot$$

$$\cdot e^{(-s+p_k(s))t}\int_0^t e^{-p_k(s)v}\int_{\frac{b_{n-1}}{b_{n-1}-b_j}(t-v)}^{\frac{b_n}{b_n-b_j}(t-v)}e^{-p_k^{j-1}(s)u}d_uP\left(w_j(v)<u\right). \quad (29)$$

Подставляя $P(A_k(t))$, $P(B_k(t))$, $P(R_k(t))$, $P(R_{jk}(t))$ и $P(R_{njk}(t))$, $j=\overline{k+1,r}$, $n=\overline{1,k}$ и $t\geq 0$, из (18), (21), (22) и (29) в (20), после преобразований получаем формулу (8).

Заключение

В статье получены новые неасимптотические результаты для периодов занятости и времен ожидания в модели Клейнрока на языке преобразований Лапласа-Стилтьеса.

Благодарности

Исследование при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 15-01-99482-а.

Примечания:

1. Бронштейн О.И., Духовный И.М. Модели приоритетного обслуживания в информационно-вычислительных системах. М.: Наука, 1976, 220 с.
2. Гнеденко Б.В., Даниелян Э.А. и др. Приоритетные системы обслуживания. М.: МГУ, 1973, 279 с.
3. Даниелян Э.А. Математическая теория приоритетных моделей. Дисс. на соиск. уч. степени докт. физ.–мат. наук, М.: МГУ, 1981, 257 с.
4. Малинковский Ю.В. Стационарное функционирование приоритетных систем массового обслуживания. Дисс. на соиск. уч. степени канд. физ. – мат. наук, Вильнюс, 1980, 133 с.
5. Ушаков В.Г. Аналитические Методы исследования приоритетных систем обслуживания. Дисс. на соиск. Уч. степени доктора физ.-мат. Наук, М.: МГУ, 1999, 278с.
6. Джейсуол Н.К. Очереди с приоритетами. М.: Мир, 1973, 279 с.
7. Григорян Г.С. Многомерные предельные теоремы в стуктурно-сложных приоритетных моделях. Дисс. на соиск. уч. степени канд. физ.-мат. наук. М.: МИЭМ, 1982, 113 с.
8. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями. М.: Мир, 1979, 600 с.
9. Прабху Н.У. Стохастические процессы теории запасов. М.: Мир, 1984, 184 с.
10. Симонян А.Р., Симонян Э.А. Оптимальное упорядочение параметров модели Клейнрока. // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2003. Т. 10. С. 23.
11. Симонян А.Р., Улитина Е.И. О параметрических моделях массового обслуживания. // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2005. Т. 12. С. 184.
12. Симонян А.Р., Улитина Е.И. Нестационарные характеристики в модели Клейнрока с нелинейной функцией приоритета. // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2010. Т. 17. № 2. С. 57.
13. Симонян А.Р. Предельные теоремы в модели Прабху при фиксированных загрузках. Дисс. на соиск. уч. степени канд. физ.-мат. наук, Ереван, 1991, 119 с.
14. Simonyan A.R., Simonyan R.A., Ulitina E.I. About nested circuits Markov in the one parametric queueing model // European researcher. Series A. 2013. № 5-1. C. 119.
15. Симонян А.Р., Симонян Р.А., Улитина Е.И., Ушаков В.Г. Стационарные времена ожидания в модели Клейнрока с нелинейной функцией приоритета. // Известия Сочинского государственного университета. 2013. № 1-2. С. 26-42.
16. Климов Г.П. Стохастические системы обслуживания. М.: Наука, 1966, 243 с.
17. Danielian E.A., Lieze F. The analysis of model with time dependent priorities. // Rostock Math. Kollog., 43, 1991, p. 39-54.

References:

1. Bronshtein O.I., Dukhovnyi I.M. Modeli prioritetnogo obsluzhivaniya v informatsionno-vychislitel'nykh sistemakh [Models of priority service in the information and computer systems]. M.: Nauka, 1976, 220 s.
2. Gnedenko B.V., Danielyan E.A. i dr. Prioritetnye sistemy obsluzhivaniya [Priority of service system]. M.: MGU, 1973, 279 s.
3. Danielyan E.A. Matematicheskaya teoriya prioritetnykh modelei [Mathematical theory of priority models]. Diss. na soisk. uch. stepeni dokt. fiz.–mat. nauk, M.: MGU, 1981, 257 s.
4. Malinkovskii Yu.V. Statsionarnoe funktsionirovanie prioritetnykh sistem massovogo obsluzhivaniya [Stationary operation of the priority queueing systems]. Diss. na soisk. uch. stepeni kand. fiz. – mat. nauk, Vil'nyus, 1980, 133 s.
5. Ushakov V.G. Analiticheskie Metody issledovaniya prioritetnykh sistem obsluzhivaniya [Methods of the study of priority queueing systems]. Diss. na soisk. Uch.stepeni doktora fiz.-mat. Nauk, M.: MGU, 1999, 278s.
6. Dzheisuol N.K. Ocheredi s prioritetami [Priority queue]. M.: Mir, 1973, 279 s.
7. Grigoryan G.S. Mnogomernye predel'nye teoremy v stukturno-slozhnykh prioritetnykh modelyakh [Multidimensional limit theorems in stucture-complex priority models.]. Diss. na soisk. uch. stepeni kand. fiz. - mat. nauk., M.: MIEM, 1982, 113 s.
8. Kleinrok L. Vychislitel'nye sistemy s ocheredyami [Computing systems with queues]. M.: Mir, 1979, 600 s.
9. Prabkhu N.U. Stokhasticheskie protsessy teorii zapasov [Stochastic processes theory of reserves]. M.: Mir, 1984, 184 s.

10. Simonyan A.R., Simonyan E.A. Optimal'noe uporyadochenie parametrov modeli Kleinroka [The optimal regularization of the Kleinrock model parameters]. // Obozrenie prikladnoi i promyshlennoi matematiki. 2003. T. 10. S. 23.
11. Simonyan A.R., Ulitina E.I. O parametricheskikh modelyakh massovogo obsluzhivaniya. [Parametric queueing models] // Obozrenie prikladnoi i promyshlennoi matematiki. 2005. T. 12. S. 184.
12. Simonyan A.R., Ulitina E.I. Nestatsionarnye kharakteristiki v modeli Kleinroka s nelineinoi funktsiei prioriteta [Non-stationary characteristics in the model Kleinrock with non-linear priority function]. // Obozrenie prikladnoi i promyshlennoi matematiki. 2010. T. 17. № 2. S. 57.
13. Simonyan A.R. Predel'nye teoremy v modeli Prabkhu pri fiksirovannykh zagruzkakh [Limit theorems in the model Prabhu at fixed downloads]. Diss. na soisk. uch. stepeni kand. fiz.-mat. nauk, Erevan , 1991, 119 s.
14. Simonyan A.R., Simonyan R.A., Ulitina E.I. About nested circuits Markov in the one parametric queueing model // European researcher. Series A. 2013. № 5-1. S. 119.
15. Simonyan A.R., Simonyan R.A., Ulitina E.I., Ushakov V.G. Statsionarnye vremena ozhidaniya v modeli Kleinroka s nelineinoi funktsiei prioriteta [Stationary waiting times in the model Kleinrock with non-linear priority function]. // Izvestiya Sochinskogo gosudarstvennogo universiteta. 2013. № 1-2. S. 26-42.
16. Klimov G.P. Stokhasticheskie sistemy obsluzhivaniya [Stochastic service systems]. M.: Nauka, 1966, 243 s.
17. Danielian E.A., Lieze F. The analysis of model with time dependent priorities. // Rostock Math. Kollog., 43, 1991, p. 39-54.

УДК 519.87

О некоторых маргинальных распределениях в модели Клейнрока

[1] Рафик Арсенович Симонян
[2] Ирина Павловна Лопатина
[3] Надежда Андреевна Кориниенко

[1] Кубанский государственный университет, Российская Федерация
ул. Ставропольская, 149, г. Краснодар, 350040
Аспирант
E-mail: raf55@list.ru
[2] Гимназия №8
ул. Парковая, 19, г. Сочи 354000
Преподаватель
E-mail: iralopatina@rambler.ru
[3] Сочинский государственный университет, Российская Федерация
ул. Советская, 26А, г. Сочи, 354000
Студент
E-mail: kornienko_nadja@mai.ru

Аннотация. В настоящей работе изучаются виртуальные времена ожидания параметрической модели Клейнрока. Анализ производится развитием идеи вероятностной интерпретации интегрального уравнения Такача и методом вложенных цепей Маркова. При выводе основных результатов мы применяем метод введения дополнительного события, когда независимо от функционирования системы предполагается, что в систему поступают пуассоновские потоки катастроф и преобразованию Лапласа дается вероятностный смысл. Далее аппарат исследования основан на формулах полной вероятности.

Ключевые слова: теория массового обслуживания, теория вероятностей, случайный процесс, функция распределения, время ожидания, входящий поток, период занятости.