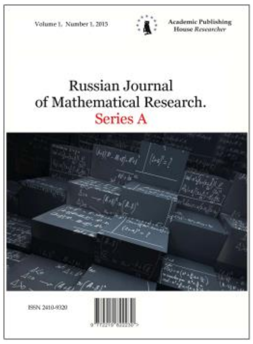
Published in the Russian Federation
Russian Journal of Mathematical Research. Series A
Has been issued since 2015.
ISSN: 2410-9320
E-ISSN: 2413-7529
Vol. 3, Is. 1, pp. 4-8, 2016

DOI: 10.13187/rjmr.a.2016.3.4
www.ejournal30.com



Articles and statements

UDC 517.518

About the Behavior of the Hilbert Operator in Some Spaces of Hölder Type

[1] Oleg V. Grober
[2] Tatyana A. Grober
[3] Andrey B. Bychkov

[1-3] Rostov State University of Civil Engineering, Russian Federation
[1] PhD, associate professor
E-mail: grober71@mail.ru
[2] PhD, associate professor
E-mail: grober71@mail.ru
[3] PhD, associate professor
E-mail: andrewbychkov@mail.ru

Abstract

The paper studies the separable Banach spaces $L^p_{\omega,0}(\mathbb{R})$ of the functions, which satisfy the generalized intensified integral Hölder conditions on the whole real line for the modules of continuity ω of a broad class, and locally convex spaces $L^p_{\to\omega}(\mathbb{R})$, which are the projective limits of the $L^p_{\omega,0}(\mathbb{R})$ spaces. The paper studies the properties of the Hilbert transformations in the mentioned spaces. The invariance of the "reinforced" spaces regarding the Hilbert operator was obtained under certain restrictions on the modulus of continuity.

Keywords: integral Hölder condition, Hilbert operator, modulus of continuity, Banach space, locally convex space, projective limit.

Введение

Пусть $\omega(t)$ – произвольный модуль непрерывности, $f(x) \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$. Интегральным модулем непрерывности функции f принято называть величину

$$\omega_p(\delta, f) = \sup_{|h|<\delta} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Интегральная норма Гёльдера вводится как сумма

$$\|f\|_{p,\omega} = \|f\|_p + |f|_{p,\omega},$$

где второе слагаемое имеет вид

$$|f|_{p,\omega} = \sup_{0<h<\infty} \frac{\|f(x+h) - f(x)\|_p}{\omega(h)}$$

и называется интегральной полунормой Гёльдера.

Через $L^p_\omega(\mathbb{R})$ обозначим пространство функций, удовлетворяющих на всей числовой оси обобщённому интегральному условию Гёльдера, то есть множество тех функций, у которых интегральная норма Гёльдера конечна. Пусть, далее, $L^p_{\omega,0}(\mathbb{R})$ – подпространство функций из $L^p_\omega(\mathbb{R})$, удовлетворяющих на оси усиленному обобщённому интегральному условию Гёльдера

$$\omega_p(\delta, f) = o(\omega(\delta)), \delta \to 0.$$

Известно, что $L^p_\omega(\mathbb{R})$ является несепарабельным банаховым пространством, а $L^p_{\omega,0}(\mathbb{R})$ – его сепарабельным подпространством.

В дальнейшем мы будем накладывать на модуль непрерывности $\omega(t)$ различные ограничения. Если $\omega(t)$ удовлетворяет условию $t = o(\omega(t))$ при $t \to 0$, то говорят, что $\omega(t)$ принадлежит классу Φ. Кроме того, мы будем использовать ставшие уже классическими условия Зигмунда, рассмотренные в [1]:

$$(Z) \qquad \int_0^\delta \frac{\omega(t)}{t}\,dt = O(\omega(\delta)), \quad \delta \to 0;$$

$$(Z1) \qquad \int_\delta^1 \frac{\omega(t)}{t^2}\,dt = O\left(\frac{\omega(\delta)}{\delta}\right), \quad \delta \to 0.$$

Функцию $\omega(t) \in \Phi$, удовлетворяющую условиям (Z) и $(Z1)$, отнесем к классу Φ_* и будем называть допустимым модулем непрерывности. Данная терминология использовалась, например, в работе [2].

Для модулей непрерывности можно ввести отношение порядка. Говорят, что $\omega_1(t) \prec \omega_2(t)$ (ω_1 «меньше», чем ω_2), если $\omega_1(t) = o(\omega_2(t))$ при $t \to 0$. Например, $\omega_1(t) = \sqrt{t} \prec \omega_2(t) = \sqrt[3]{t}$.

Введем в рассмотрение локально выпуклые пространства, являющиеся проективными пределами описанных выше пространств. Для всякой $\omega \in \Phi$ обозначим через $L^p_{\to\omega}(\mathbb{R})$ проективный предел семейства банаховых пространств, удовлетворяющих на всей числовой оси обобщённым интегральным условиям Гёльдера:

$$L^p_{\to\omega}(\mathbb{R}) = \lim_{\varphi \succ \omega, \varphi \in \Phi_*} \mathrm{pr}\; L^p_\varphi(\mathbb{R}).$$

Введенные пространства изучались авторами в [3], [4] и [5].

Предмет и методы исследования

В настоящей работе изучаются свойства преобразований Гильберта в указанных пространствах. Для допустимых модулей непрерывности получена инвариантность пространств $L^p_{\omega,0}(\mathbb{R})$ относительно оператора Гильберта. Далее этот результат обобщен для локально выпуклых пространств $L^p_{\to\omega}(\mathbb{R})$. Поскольку материалы исследования относятся к классическим вопросам функционального анализа, предлагаемые в работе методы исследования являются чисто аналитическими.

Результаты исследования

Нам понадобится следующая лемма из работы [4].

Лемма 1. *Пусть $\omega(t)$ – допустимый модуль непрерывности. Тогда имеет место следующее представление:*

$$L^p_{\to\omega}(\mathbb{R}) = \lim_{\varphi \succ \omega, \varphi \in \Phi_*} \mathrm{pr}\; L^p_{\varphi,0}(\mathbb{R}).$$

Кроме того, мы будем использовать теорему, которая, на наш взгляд, представляет и самостоятельный интерес (работа в печати).

Теорема 1. *Пусть $\omega \in \Phi_*$. Если $f \in L^p_\omega(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, то оператор Гильберта*

$$\tilde{f}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t-x| \geq \varepsilon} \frac{f(t)}{x-t} dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{f(x-t) - f(x+t)}{t} dt$$

существует почти всюду, $\tilde{f} \in L^p_\omega(\mathbb{R})$, и справедлива оценка

$$\|\tilde{f}\|_{p,\omega} \leq K_{p,\omega} \|f\|_{p,\omega}.$$

Вернемся к сравнению различных модулей непрерывности. Очевидно, что если $\omega_1(t) \prec \omega_2(t)$, то справедливы следующие вложения:

$$L^p_{\omega_1}(\mathbb{R}) \subset L^p_{\omega_2}(\mathbb{R}),\ \ L^p_{\omega_1,0}(\mathbb{R}) \subset L^p_{\omega_2,0}(\mathbb{R}).$$

В дальнейшем нам понадобится несколько более тонкое утверждение:

Лемма 2. *Предположим, что $f \in L^p_{\omega_1}(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, $\omega_1(t) \prec \omega(t)$, где $\omega_1, \omega \in \Phi$. Тогда $f \in L^p_{\omega,0}(\mathbb{R})$.*

Получим ещё один вспомогательный факт.

Лемма 3. *Пространство* D *бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем плотно в $L^p_{\omega,0}(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, $\omega \in \Phi$.*

Доказательство. Известно, [6, с.28], что D плотно в $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$. Значит, для произвольной функции $f \in L^p_{\omega,0}(\mathbb{R})$ найдется последовательность $\{f_n\} \subset$ D такая, что

$$\|f - f_n\|_p \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Покажем, что и

$$|f - f_n|_{p,\omega} \to 0. \tag{1}$$

Так как $f \in L^p_{\omega,0}(\mathbb{R})$, то

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0:\ \forall h < \delta \qquad \frac{1}{\omega(h)} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Для оценки полунормы $|f - f_n|_{p,\omega}$ рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $h \geq \delta$. Тогда

$$\frac{1}{\omega(h)} \|f_n(x+h) - f(x+h) - (f_n(x) - f(x))\|_p \leq \frac{1}{\omega(\delta)} 2\|f_n - f\|_p \to 0. \tag{3}$$

Случай 2. Пусть $0 < h < \delta$. Прежде всего заметим, что D $\subset L^p_{\omega,0}(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, $\omega \in \Phi$. С учетом этого и неравенства (2) имеем

$$\frac{1}{\omega(h)} \left\| f_n(x+h) - f(x+h) - \left(f_n(x) - f(x)\right) \right\|_p \leq$$

$$\leq \frac{1}{\omega(h)} \|f_n(x+h) - f_n(x)\|_p + \frac{1}{\omega(h)} \|f(x+h) - f(x)\|_p < \varepsilon.$$

Из последнего неравенства и оценки (3) следует теперь (1). Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть $\omega \in \Phi_*$ и $f \in L^p_{\omega,0}(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$. Тогда $\tilde{f} \in L^p_{\omega,0}(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Так как $f \in L^p_{\omega,0}(\mathbb{R})$, то $\tilde{f} \in L^p_\omega(\mathbb{R})$ в силу теоремы 1. Согласно лемме 3 существует последовательность $\{f_n\} \subset$ D такая что

$$\|f - f_n\|_p \to 0. \tag{4}$$

Тогда, используя теорему 1 и учитывая оценку (4), имеем:

$$\|\tilde{f} - \tilde{f}_n\|_{p,\omega} \leq C_{p,\omega} \|f - f_n\|_{p,\omega} \to 0. \tag{5}$$

Так как $f_n \in$ D, то $f_n \in L^p_{\omega_1}(\mathbb{R})$, где $\omega_1 \prec \omega$. Тогда $\tilde{f}_n \in L^p_{\omega_1}(\mathbb{R})$ согласно теореме 1. Следовательно, $\tilde{f}_n \in L^p_{\omega,0}(\mathbb{R})$ в силу леммы 2.

Теперь из условия (5), с учётом полноты пространства $L^p_{\omega,0}(\mathbb{R})$, следует, что $\tilde{f} \in L^p_{\omega,0}(\mathbb{R})$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть $\omega \in \Phi_*$. Если $f \in L^p_{\to\omega}(\mathbb{R}), 1 < p < \infty$, то $\tilde{f} \in L^p_{\to\omega}(\mathbb{R})$, и для любого допустимого модуля непрерывности $\varphi \succ \omega$ справедлива следующая оценка:*

$$\|\tilde{f}\|_{p,\varphi} \leq \mathrm{M}_{p,\varphi}\|f\|_{p,\varphi},$$

где $\mathrm{M}_{p,\varphi}$ – константа, не зависящая от функции f.

Доказательство следует из леммы 1, теорем 1 и 2.

Обсуждение результатов и выводы

Полученные в работе результаты имеют как самостоятельный интерес, так и могут быть использованы для решения смежных задач теории функций и функционального анализа, в частности, для построения изоморфизмов и базисов в рассмотренных пространствах функций, решения других задач теории аппроксимации.

Примечания:

1. Бари Н.К. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций / Н.К. Бари., С.Б. Стечкин // Тр. Моск. мат. общества / 1956. № 5. С. 483–522.
2. Furlan P. Isomorphie-und Faktorisationssätze für Räume verallgemeinert Lipschitzstetiger Funktionen. Dortmund, Dissertation, 1984.
3. Гробер О.В. Базисы в пространствах функций, связанных с условием Гёльдера на оси и в полуплоскости // Международная школа-семинар по геометрии и анализу, посвящённая памяти чл.-корр. АН СССР Н.В. Ефимова. Тезисы докладов. 1998. с. 95–97.
4. Гробер О.В. О свойствах некоторых локально выпуклых пространств, связанных с обобщёнными усиленными интегральными условиями Гёльдера на оси и в полуплоскости / Гробер О.В., Гробер Т.А., Бычков А.Б. // Научное обозрение. 2014. №7. С. 770–774.
5. Гробер О.В. Сходимость внутренних значений к граничным в топологии проективного предела для пространств, связанных с обобщёнными усиленными интегральными условиями Гёльдера на оси и в полуплоскости / Гробер О.В., Гробер Т.А., Бычков А.Б. // Научное обозрение. 2014. №7. С. 774–778.
6. Стейн И. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. / Стейн И., Вейс Г. М.: «Мир», 1974. 331 с.

References:

1. Bari N.K. Nailuchshie priblizheniya i differentsial'nye svoistva dvukh sopryazhennykh funktsii [Best approximations and differential properties of two conjugate functions] / N.K. Bari., S.B. Stechkin // Tr. Mosk. mat. obshchestva / 1956. № 5. S. 483–522.
2. Furlan P. Isomorphie- und Faktorisationssätze für Räume verallgemeinert Lipschitzstetiger Funktionen. [Isomorphism and factor authorization sets for areas generalized Lipschitz continuous functions]. Dortmund, Dissertation, 1984.
3. Grober O.V. Bazisy v prostranstvakh funktsii, svyazannykh s usloviem Gel'dera na osi i v poluploskosti [Bases in spaces of functions with hölder continuous condition on the axis and in the half-plane]. // Mezhdunarodnaya shkola-seminar po geometrii i analizu, posvyashchennaya pamyati chl.-korr. AN SSSR N.V. Efimova. Tezisy dokladov. 1998. s. 95–97.
4. Grober O.V. O svoistvakh nekotorykh lokal'no vypuklykh prostranstv, svyazannykh s obobshchennymi usilennymi integral'nymi usloviyami Gel'dera na osi i v poluploskosti [On some properties of locally convex spaces associated with generalized reinforced integral conditions are hölder continuous on the axis and in the half-plane] / Grober O.V., Grober T.A., Bychkov A.B. // Nauchnoe obozrenie. 2014. №7. S. 770–774.
5. Grober O.V. Skhodimost' vnutrennikh znachenii k granichnym v topologii proektivnogo predela dlya prostranstv, svyazannykh s obobshchennymi usilennymi integral'nymi usloviyami Gel'dera na osi i v poluploskosti [Convergence of internal values to the boundary in the topology of the projective limit of the spaces associated with generalized reinforced integral Holder condition on the axis and in the half] / Grober O.V., Grober T.A., Bychkov A.B. // Nauchnoe obozrenie. 2014. №7. S. 774–778.

6. Stein I. Vvedenie v garmonicheskii analiz na evklidovykh prostranstvakh [An introduction to harmonic analysis on Euclidean spaces]. / Stein I., Veis G. M.: «Mir», 1974. 331 s.

УДК 517.518

О поведении оператора Гильберта в некоторых пространствах гёльдерового типа

[1] Олег Владимирович Гробер
[2] Татьяна Александровна Гробер
[3] Андрей Борисович Бычков

[1-3] Ростовский государственный строительный университет, Российская Федерация
[1] Доцент
E-mail: grober71@mail.ru
[2] Доцент
E-mail: grober71@mail.ru
[3] Доцент
E-mail: andrewbychkov@mail.ru

Аннотация. В работе рассматриваются сепарабельные банаховы пространства $L^p_{\omega,0}(\mathbb{R})$ функций, удовлетворяющих на всей числовой оси обобщенным усиленным интегральным условиям Гёльдера для достаточно широкого класса модулей непрерывности ω, и локально выпуклые пространства $L^p_{\to\omega}(\mathbb{R})$, являющиеся проективными пределами пространств $L^p_{\omega,0}(\mathbb{R})$. Изучаются свойства преобразований Гильберта в указанных пространствах. При некоторых ограничениях на модуль непрерывности получена инвариантность «усиленных» пространств относительно оператора Гильберта.

Ключевые слова: интегральное условие Гёльдера, оператор Гильберта, модуль непрерывности, банахово пространство, локально выпуклое пространство, проективный предел.