РАЗДЕЛ 4 АВТОМАТИКА, КОМПЬЮТЕРНЫЕ И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 519.216.1

Г.М. Востров, А. Атіє, К.А. Левенець
Одеський національний політехнічний університет, пр. Шевченка 1, м. Одеса, 65044

ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ РЕАЛЬНИХ ВИПАДКОВИХ ЯВИЩ

У статті розглянуто опис випадкового процесу в контексті його застосування для моделювання реальних випадкових явищ. Особливу увагу приділено комплексу умов і питання його зв'язку з поняттям регулярності. Висвітлено ключові недоліки у застосуванні формального поняття випадкового процесу для реальних задач обробки даних.
Ключові слова: *Випадковий процес, множина елементарних подій, комплекс умов.*

Г.Н. Востров, А. Атие, К.А. Левенец
Одесский национальный политехнический университет, пр. Шевченко, 1, г. Одесса, 65044

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ РЕАЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ЯВЛЕНИЙ

В статье рассмотрено описание случайного процесса в контексте его применения для моделирования реальных случайных явлений. Особое внимание уделено комплексу условий и вопросу его связи с понятием регулярности. Освещены ключевые недостатки в применении формального понятия случайного процесса для реальных задач обработки данных.
Ключевые слова: *Случайный процесс, множество элементарных событий, комплекс условий.*

G.N. Vostrov, A. Atie, K.A. Levenets
Odessa National Polytechnic University, Boulevard of Shevchenko, 1, Odessa, 65044

CONSTRUCTION OF MATHEMATICAL MODELS FOR REAL RANDOM PHENOMENA BASED ON RANDOM PROCESSES

Article contains description of random process in context of applying to models of real world processes. Especial attention is spared on condition`s complex and its connection to regularity. The key limitations in formal definition of random process usage for real data analysis problem are highlighted.
Keywords: *Random process, set of elementary events, condition`s complex.*

I. ВСТУП

Області застосування випадкових процесів досить великі. До їх числа можна віднести виробничі процеси, що супроводжуються випадковими флуктуаціями, також процеси, що зустрічаються в геофізиці (напр., варіації земного магнітного поля, морське хвилювання, чи мікросейсми, - високочастотні безладні коливання рівня земної поверхні), біофізиці (напр., зміни біоелектричних потенціалів мозку, що реєструються на електроенцефалограмі) і економіці (напр. зміна цін з часом).

Математична теорія випадкових процесів розглядає миттєвий стан системи, про яку йде мова, як точку деякого фазового простору (простору становищ) R; при цьому випадковий процес представляється функцією $\gamma(t)$ часу t із значеннями з R.

Передбачається, що стан процесу в поточний момент часу $t\in R^1$ є векторна або скалярна випадкова величина $\xi(t,\omega)$. Простір елементарних подій (випадків) Ω передбачається вимірюваним, тобто на ньому визначена σ-алгебра його підмножин $\mathcal{F}$. Крім того, передбачається, що на вимірюваному просторі $\{\Omega,\mathcal{F}\}$ задана імовірнісна міра P, тобто для будь-якої множини $A\in\mathcal{F}$ визначена його ймовірність $P\{A\}$. Тим самим, задано ймовірнісний простір $\{\Omega,\mathcal{F},P\}$, і поняття випадкового процесу визначається наступним чином: Випадковий процес є сімейство (дійсних або комплексних) випадкових величин $\{\xi(t,\omega),t\in T\}$, визначених на $\{\Omega,\mathcal{F},P\}$, де множина параметрів $T\subseteq R^1$ [1].

II. ВИЗНАЧЕННЯ ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ

Наведене визначення потребує певних уточнень. Для багатьох цілей корисно вважати, що області значень випадкових елементів, над якими описаний випадковий процес, загалом різні. Тоді у випадку нестаціонарних процесів можна буде виявляти відрізки часу де множина Ω та міра P змінюються. Будемо вважати заданим сімейство вимірних просторів $(S_t,B_t),t\in T$. Тоді сімейство $\xi=\{\xi(t),t\in T\}$ можна розглядати як функцію $X=X(t,\omega)$ яка визначена на $T\times\Omega$, що приймає при кожному $t\in T$ значення з S_t і яка є $\mathcal{F}|B_t$-вимірюваним відображенням $X(t,\omega):\Omega\rightarrow S_t$.

Уточнену таким чином функцію $X=X(t,\omega)$ прийнято називати випадковою функцією асоційованою з вимірюваними просторами $(\Omega,\mathcal{F})$ і (S_t, B_t).

Елементарний приклад випадкової функції $X=\{x(t),t\in T\}$ що приймає при кожному $t\in T$ дійсні значення, отримаємо, поклавши $X(t,\omega)=\xi(\omega)f(t)$, де ξ дійсна випадкова величина, задана на деякому векторному просторі $(\Omega,\mathcal{F},P)$, а детермінована функція $f:T\rightarrow R$. Доведено, що ряд, складений з такого роду функцій, може бути використаний для опису броунівського руху.

Однак таке суто математичне визначення не дає уявлення про змістовну сторону фізичного процесу. Ймовірнісний простір в реальних випадках найчастіше не має точного формального представлення. Так наприклад множина Ω може мати:

- скінченна множина елементів $\Omega=\{\omega_1,\dots,\omega_n\}$;
- зліченна множина елементів $\Omega=\{\omega_1,\dots,\omega_n,\dots\}$;
- незліченна множина елементів $\Omega=\{\omega_{\alpha 1},\dots\omega_{\alpha k},\dots\}$, $\{\alpha 1,\dots,\alpha k,\dots\}=R$.

Якщо множина Ω скінченна, то залежність ξ від цієї множини елементарних подій може носити невідому форму залежності, навіть при невеликій кількості елементів в Ω. При цьому в незалежності від складності можна побудувати якусь наближену апроксимацію цієї залежності [2]. У випадку коли ξ залежить від зліченої або незліченної множини елементарних випадкових подій, а як правило, реальні випадкові процеси такими і є, знаходження залежності має алгоритмічно нерозв'язний характер.

Для випадку нестаціонарних процесів також важливо не тільки сама множина Ω, але і те як вона змінюється в часі залежно від комплексу умов G, який описує умови проведення експерименту або запису сигналу. У тих випадках, коли комплекс умов можна описати предикатом нечіткої та багатозначної логіки $\Phi(x_{i1},\dots,x_{in},\dots,a_{j1},\dots,a_{jk},\dots)$, де $\{x_{i1},\dots,x_{in},\dots\}$ - множина всіх властивостей елементарних випадкових подій виділеної підмножини, а $\{a_{j1},\dots,a_{jk},\dots\}$ - множина параметрів, з певним ступенем наближення безліч Ω потенційно може бути описано.

По суті випадковий процес (випадкова функція) виникає і розвивається на основі деякої закономірності, яка виникає в імовірнісному просторі в результаті взаємодії і еволюційного розвитку в часі деякої множини (потенційно нескінченної) випадкових величин що сформувалися в предметній області як стохастичні самоорганізовані, структурно самовдосконалювана нелінійна динамічна система, фазовий портрет якої як в ретроспективі так і перспективі визначає закони розвитку предметної області відповідно до її особливостей.

III. КОМПЛЕКС УМОВ

В основі стохастичних властивостей предметних областей знаходиться цілий ряд понять, починаючи з базових і закінчуючи поняттями максимального рівня складності. Базовим поняттям є випадковість. Наступним рівнем за складністю є елементарне випадкова подія. При цьому здавалося б виконується невеликий крок між цими поняттями, проте сформулювати як саме пов'язані випадковість як абстрактне поняття, та випадковою подією, що фактично є матеріальним проявом випадковості - складна задача. Прийнято вважати, що кожна випадкова подія є результатом випробування проведеного шляхом реалізації комплексу умов G [3]. При цьому передбачається, що комплекс умов G задовольняє наступним умовам:

1) Комплекс умов може бути реалізований будь-яку кількість разів;

2) Будь яка реалізація комплексу умов G в незначній мірі відрізняється від будь-якої іншої його реалізації. При кожній реалізації комплексу його вплив на наступ будь-якої елементарної події носить настільки незначний характер, що її величина залишається практично незмінною, це стосується виняткових подій $A_1,\dots,A_n,\dots$ визначених як підмножини повної множини елементарних подій Ω. Сенс впливу полягає в тому, що комплекс умов змінюється настільки незначно, що ймовірність елементарних випадкових подій при цьому змінюється також в незначній мірі. Розглянемо випадок, коли множина елементарних подій Ω скінченна $\{\omega_1,\dots,\omega_n\}$. Ці елементарні події незалежні. І передбачається що $\sum_{k=1}^{n}P(\omega_i)=1$. У той же час у відповідності зі статистичним підходом для кожної ω_i має місце певна ступінь нестійкості. Приклади стійкості та нестійкості імовірності представлені на рисунку 1.

3) Кожна послідовність реалізацій G утворює статистично незалежну послідовність при будь-якій кількості випробувань;

4) Результатом реалізації комплексу умов G є результат випробування ω_i, який прийнято називати елементарною випадковою подією;

5) Імовірність настання ω_i практично не залежить від послідовності реалізації G;

6) У відповідності з теорією описаною в [4] статистичний метод, заснований на стійкості частот, не може повністю відображати поняття випадковості, а, отже, комплекс умов G не забезпечує стійкість частот послідовності елементарних випадкових подій $\omega_1,\dots,\omega_n,\dots$ які мають великий обсяг послідовності;

7) Якщо $\omega_1,...,\omega_n,...$ послідовність елементарних випадкових подій, то розглядаючи їх як явища, ми повинні мати можливість спостерігати та перевіряти чи володіють вони властивістю регулярності. Згідно Колмогорова [5] регулярність повинна дозволяти нам точно передбачати результат такого явища. Не ясно, про яку точність взагалі кажучи йдеться. Певно, регулярність за Колмогоровим повинна проявлятися в існуванні комплексу G, який за властивостями його проявів повинен бути еквівалентний властивостям регулярності;

8) У теж час між регулярністю і комплексом умов існує значна різниця. Комплекс умов G зводиться по суті до того, що G може бути представлений деяким предикатом, який включає елементи випадковості або більш точно це означає, що деякі властивості предиката можуть з'являтися або зникати в ньому випадково. Такого роду властивості не повинні істотно впливати на його істинність або хибність. Властивості, що порушують закономірності прояву істинності повинні виявлятися з спадною частотою їх прояву. Це властивість повинна мати або постійний характер збігання у всіх варіантах прояву G або для різних G прояв процесу убування частоти порушення істинності може носити різноманітний характер, тобто стабільність може бути відсутня.

9) У разі відсутності стабільності в стійкості частоти настання елементарних випадкових подій не буде задовольняти стохастичній незалежності. ω_i елементарна випадкова подія - результат випробування шляхом перевірки виконуваності комплексу умов G може бути причиною появи в послідовності випадкових подій $A=\{\omega_1,...,\omega_n,...\}$ підпослідовності $\{\omega_{j1},...,\omega_{jk}\}\subseteq A$ такої, що для будь-якої пари j_l і $j_k\in\{j_1,...,j_n\}$ відмінності між ω_{jl} і ω_{jk}, будуть дуже незначними або несуттєвими щодо ймовірнісної міри P. По суті це означає, що ці події будуть залежними. Тобто для кожної пари з множини $\{\omega_{j1},...,\omega_{jk}\}$ буде мати місце стохастична залежність. Наявність цієї залежності, насамперед, може бути обумовлено тим, що комплекс умов на цьому елементарній випадковій події володіє певним ступенем відхилення від істинності, і можна говорити про деяку форму нестійкості.

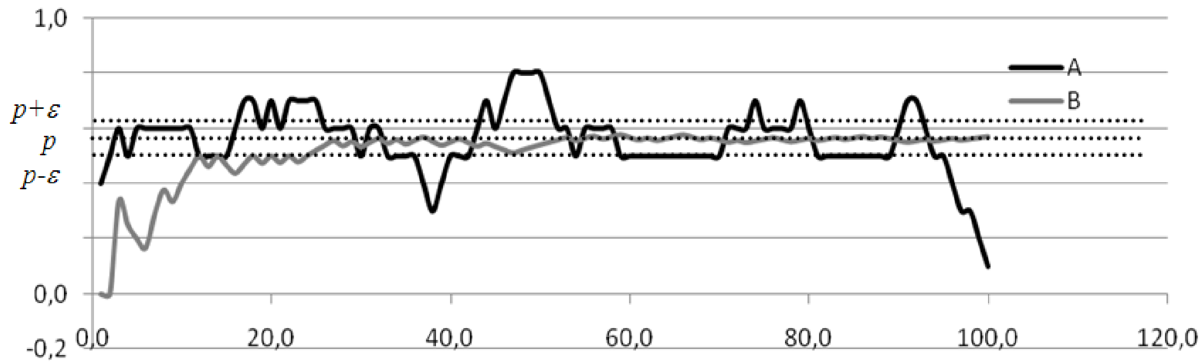

Рисунок 1. Приклад зміни оцінки ймовірності настання події ω, у разі статистичної A - нестійкості і B - стійкості ймовірності із зростанням числа випробувань. Вертикальна вісь - ймовірність, горизонтальна - число випробувань.

Як уже згадувалося вище, комплекс умов G може бути описаний за допомогою понять теорії числення предикатів на множині всіх випадкових подій у термінах їх властивостей. На всіх елементарних випадкових подіях предикат повинен бути істинним, або відхилення від істинності має бути обумовлено незначною множиною властивостей випадкових подій, які потенційно не роблять істотного впливу на стійкість щодо частоти, тобто $\forall x_{i_1}, x_{i_2}\ \exists x_{i_s} ... x_{i_n} ... \Phi(x_{i_1},...,x_{i_n},...,a_{j_1},...,a_{j_k},...)$ – істина.

Функціонал $\Phi(x_{i_1},...,x_{i_n},...,a_{j_1},...,a_{j_k},...)$ при конкретних значеннях індивідуальних змінних $\{x_{i1},...,x_{in},...\}$ конкретної елементарної події приймає значення істина.

Слід звернути увагу на той факт, що індивідуальні змінні предиката мають різну ступінь важливості щодо істинності. Без істотного впливу на побудову множини елементарних випадкових подій може існувати дуже значну кількість властивостей. Однак якщо функціонал залежить від нескінченної множини властивостей або кінцевої, але досить великої потужності вибір істотних індивідуальних параметрів може бути алгоритмічно нерозв'язною проблемою.

Повний аналіз поняття комплексу умов, при здійсненності якого згідно з твердженням Гнеденко [3], носить фундаментальний характер не тільки в теорії ймовірностей, математичної статистики, але і у всьому різноманітті випадкових процесів, випадкових функцій, теорії інформації, обробки сигналів. Окремий клас утворюють проблеми побудови формальної теорії стохастичних предметних областей як самоорганізованих нелінійних динамічних систем, в загальній теорії систем, при моделюванні випадкових явищ будь-якого рівня складності.

IV. СТРУКТУРА ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ

Зазвичай вважається, що область значень випадкового процесу R - векторний простір, причому найбільш вивченим (і в той же час найбільш важливим з точки зору додатків) є ще більш вузький випадок, коли точки R задаються одним або декількома числовими параметрами (узагальненими координатами системи), тобто випадковий процес розглядається як числова функція часу $\xi(t)$, що в залежності від випадку приймає різні значення, тобто допускає різні реалізації $\xi(t)$ (одномірна), або як подібна векторна функція $\xi(t)=\{\xi_1(t),...,\xi_k(t)\}$ (багатовимірна, або векторна). Вивчення багатовимірних випадкових процесів, з точки зору теорії, можна звести до вивчення одномірних випадкових процесів за допомогою переходу від $X(t)$ до допоміжного процесу.

$$\xi_a(t) = (\xi(t), a) = \sum_{j=1}^{k} a_j \xi_j(t)$$

де $a=(a_1,...,a_k)$ - довільний k-мірний вектор; тому центральне місце в теорії випадкових процесів займає дослідження одновимірних процесів $\xi(t)$[6].

Слабкою стороною такого підходу є те, що на практиці різні виміри багатовимірного випадкового процесу можуть бути взаємозалежними, при цьому не тільки лінійно. В даному випадку припускається, що з лінійної комбінації ми завжди зможемо однозначно відновити вихідні вимірювання.

У такому випадку більш конструктивним може виявитися підхід при якому багатовимірний випадковий процес $\xi(\omega,t)$ розглядається в наступній ієрархії залежностей:

$\xi(\omega,t)$ - залежність від однієї елементарної події;

$\xi(x(t),t)$ - залежність від однієї випадкової величини;

$\xi(\omega_1,...,\omega_k,t)$ - залежність від множини елементарних випадкових подій;

$\xi(x_1(t),...,x_k(t),t)$ - залежність від множини випадкових величин;

$\xi(\omega_1,...,\omega_k,x_1(t),...,x_k(t),t)$ - залежність і від множини елементарних подій і від множини випадкових величин;

$\xi(\omega_1,...,\omega_k,x_1(t),...,x_n(t),f_1(x_{i1}),...,f_k(x_{ik}),t)$ - залежність від множини елементарних подій, випадкових величин і функцій випадкових величин.

Але навіть і при такому поданні випадкового процесу, для реальних процесів всі параметри і характер залежності між процесом і параметрами є об'єктом пошуку та оцінювання. У загальному випадку при аналізі процесів на практиці доводиться констатувати невизначеність математичної моделі опису випадкового процесу. Єдиним рішенням у таких випадках є формування апріорних припущень та гіпотез або перебір кінцевого набору можливих припущень. На підставі цих припущень з'являється можливість зробити висновки про моделі, що вимагає в свою чергу, глибокого занурення в специфіку предметної області що породжує випадковий процес.

Якщо множини $\{\omega_1,...,\omega_k\}$ і $\{x_1,...,x_n\}$ кінцеві, то, як доведено в [2] вибір найбільш суттєвих індивідуальних факторів носить в загальному випадку перебірний характер. Це випливає з теорії групового обліку аргументів, що в даний час стала одним з перспективних підходом для пошуку ефективних процедур виявлення найбільш важливих базисних компонент що утворюють випадковий процес або різноманіття процесів.

У згаданому методі вибору базисних змінних випадкового процесу залишається не менш важлива невирішена проблема. А саме проблема змістовної інтерпретацією отриманої математичної моделі випадкового процесу.

При будь-якому фіксованому значенні параметра $t \in T$ випадкова функція $\xi(\omega,t)$, $t \in T$, є випадковим вектором, так званим перетином цього випадкового процесу. Якщо зафіксувати елементарну подію $\omega \in \Omega$, то в цьому випадку $\xi(\omega,t)$ є (невипадковою) функцією параметра t, яку називають траєкторією випадкового процесу $\xi(\omega,t)$, $t \in T$, або його реалізацією. Отже якщо вважати, що деякий виміряний часовий ряд є реалізацією випадкового процесу, то елементарна подія, що відповідає цьому ряду має бути статичною протягом всього часу вимірювання. Таким чином якщо нас цікавлять динамічні властивості процесу, то з'являється необхідність вводити приналежність кожного елементу ряду до деякої реалізації зі своєю ω.

Якщо для випадкового процесу $\xi(\omega,t)$, $t \in T$, зафіксувати довільне значення параметра t, то отримаємо n-вимірний випадковий вектор $\xi(\omega,t)$, що є перетином випадкового процесу. Закон розподілу ймовірностей цього випадкового вектора називають одномірним законом розподілу випадкового процесу $\xi(\omega,t)$, $t \in T$.

Якщо зафіксувати значення t_k параметра $t_k \in T$, $k=1\ldots n$, то приходимо до сукупності з N випадкових n-мірних векторів $\{\xi(t_k,\omega)\}_{k=1}^{N}$ з функцією розподілу ймовірностей:

$$F_\xi(x_1,...,x_N \mid t_1,...,t_N) \triangleq P[\xi(t_k,\omega)<x_k, k=1...N)]$$

що зветься скінчено мірною (N-мірною) функцією розподілу випадкового процесу $\xi(\omega,t)$, $t \in T$.

Фактично випадковий процес $\xi(\omega,t)$, $t \in T$, можна розглядати як сукупність всіх його можливих перетинів. Таким чином, у загальному випадку процес $\xi(\omega,t)$, $t \in T$, що є випадковим, не може бути повністю визначеним, оскільки він може бути представлений нескінченною сукупністю своїх перетинів і неможливо побудувати спільний закон розподілу всіх його перетинів. Тому будь-який випадковий процес $\xi(\omega,t)$, $t \in T=[a,b]$, в загальному випадку не є повністю визначеним і при вирішенні різних завдань, як теоретичного, так і прикладного характеру, доводиться обмежуватися використанням скінченновимірних законів розподілу [7].

V. ВИСНОВКИ

Можна бачити, що практичне застосування математичного апарату випадкових процесів накладає свої обмеження на формалізацію поняття випадкового процесу. Виникає необхідність суміщення емпіричних відомостей про об'єкт дослідження і точних визначень математики. Особливо різко це проявляється щодо комплексу умов G і множини елементарних подій Ω. Набір параметрів, аргументів першого і елементи другого, як правило, будуються на підставі апріорних відомостей, об'єктивність яких залежить від рівня підготовки дослідника і його технічних можливостей. Ще однією важливою особливістю практичного аналізу є те, що всі числові показники повинні бути кінцевими — через обмеженості обчислювальних ресурсів. Така сама ситуація складається і з кількістю вимірювань реалізацій випадкового процесу. Крім того в кожному з перерахованих випадків з'являється задача виділення не просто кінцевого набору властивостей, а такого який буде достатній для чисельного аналізу та формування достовірних висновків як про сам випадковому процесі так і про об'єкт який він характеризує.

Якщо ж вдасться мінімізувати суб'єктивний внесок дослідника, то тим самим будуть підвищені надійність і якість одержуваних результатів. Викладений аналіз є кроком у напрямку побудови точної формальної бази для поняття випадкового процесу. І хоча остаточних практичних інструментів не представлено, проте виділені основні недоліки та окреслені завдання, вирішення яких дозволить створити такі інструменти надалі.

ЛІТЕРАТУРА

1. **Миллер Б.М., Панков А.Р.** Теория случайных процессов в примерах и задачах. Москва – ФИЗМАТЛИТ – 2002 г. – ISBN 5-9221-0206-0.

2. **Ивахненко А. Г.** Долгосрочное прогнозирование и управление сложными системами. Киев – "ТЕХНІКА" – 1975 г.

3. **Гнеденко Б.В.**. Курс теории вероятностей. Москва – УРСС – 2005г. – ISBN 5-354-01091-8.

4. **Шень А.Х.** Частотный подход к определению понятия случайной последовательности / А.Х. Шень // Семиотика и информатика. – 1982 г – №18 – С. 14 – 42.

5. **Колмогоров А.Н.** On logical foundation of Probability Theory,. USSR–Japan Symposium – 1982г.

6. Математическая энциклопедия / гл. ред. И. М. Виноградов. – М. : Совет. энцикл., 1977 – . Т. 5 — 1985 – 623 стр.

7. **Волков И.К., Зуев С.М., Цветкова Г.М.** Случайные процессы. Москва МГТУ им. Н. Э. Баумана – 1999 г. – ISBN 5-7038-1270-4.

REFERENCES

1. **Miller B.M., Pankov A.R.** Teoriya sluchainih processov v primerah i zadachah [Theory of random processes in samples and tasks]. Moscow – Fizmatlit – 2002 – ISBN 5-9221-0206-0.

2. **Ivahnenko A.G.** Dolgosrochnoe prognozirovanie i upravlenie slognimi systemami [Long term forecasting and managing of complex systems] Kyiv – "Technika" – 1975.

3. **Gnedenko B.V.** Curs teoriy veroyatnostey [Course of probability theory]. Moscow – URSS – 2005 – ISBN 5-354-01091-8.

4. **Shen A.Kh.** Chastotniy podhod k opredeliniyu ponyatiya sluchaynoi poslodovatelnosti [The frequency approach to the notion of random sequence] – Semiotika i informatika – M.:VINITI – 1982, 18, p. 14-42.

5. **Kolmogorov A.N.** On logical foundation of Probability Theory,. USSR – Japan Symposium – 1982.

6. Matematichescaya encyclopedia / red. I.M. Vinogradov [Mathematical encyclopedia] — Moscow, Sov. Encyclopedia 1977 – vol 5 – 623 p.

7. **Volkov I.K., Zuev S.M, Cvetkova G.M.** Sluchainie process [Random processes] – Moscow MSTU named. N.E. Bauman – 1999 – ISBN 5-7038-1270-4.

Получена в редакции 02.08.2013, принята к печати 04.09.2013