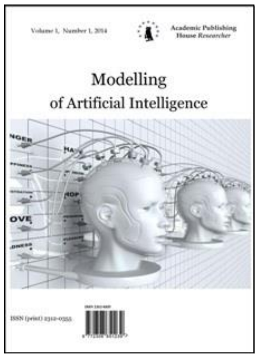
Published in the Russian Federation
Modeling of Artificial Intelligence
Has been issued since 2014.
ISSN: 2312-0355
E-ISSN: 2413-7200
Vol. 7, Is. 3, pp. 204-211, 2015

DOI: 10.13187/mai.2015.7.204
www.ejournal11.com



UDC 519.2

The Fair Price Calculation for the (B,S)-Market Model in the Case of Non Self-Financing Strategies

[1] Ekaterina N. Galicina
[2] Natalia V. Danilova

[1-2] Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences, Russian Federation
[1] E-mail: katrin.2310@mail.ru
[2] PhD (physical and mathematical sciences), assistant professor
E-mail: danilova198686@mail.ru

Abstract

The algorithm of fair price calculation in discrete and continuous time for the (B,S)-market model in the case of European option is presented. The optimal capital and the optimal strategy are investigated. In discrete time the recurrent formulas on the binary tree are used. In the continuous time Black-Scholes formula and Monte-Carlo method are applied. The comparison of the results is also presented.

Keywords: Fair price, Wiener process, dividend, market, martingale.

Введение

Будем рассматривать вероятностное пространство (Ω, F, P). Мы будем предполагать, что пространство элементарных событий Ω конечное множество, а точки множества Ω будем трактовать как элементарные события, происходящие на финансовом рынке. Под F будем понимать σ-алгебру всех подмножеств Ω и каждое событие из F будем трактовать как событие, могущее произойти на финансовом рынке. P – множество вероятностных мер на F.

Сформулируем следующие определения.

<u>Определение 1.[2]</u> (B,S)-рынком называется объект, состоящий из последовательности строго положительных чисел $B_0, B_1, \ldots, B_N$, интерпретируемых как цены банковского счёта в моменты времени $0,1,2,\ldots,N$, и последовательностей строго положительных случайных величин $S_0^{(k)}, S_1^{(k)}, \ldots, S_N^{(k)}$, интерпретируемых как цены акций (k-го типа) в моменты времени $0,1,2,\ldots,N$.

Определение 2.[2] Портфелем ценных бумаг называется объект $\pi = (\beta_n, \gamma_n)_{n=0}^{N}$, состоящий из последовательности случайных величин $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N$, где каждое β_n интерпретируется как число единиц банковского счёта в момент времени n, и последовательности случайных векторов

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \gamma_0^{(1)} \\ \gamma_0^{(2)} \\ \dots \\ \gamma_0^{(l)} \end{pmatrix}, \gamma_1 = \begin{pmatrix} \gamma_1^{(1)} \\ \gamma_1^{(2)} \\ \dots \\ \gamma_1^{(l)} \end{pmatrix}, \dots, \gamma_N = \begin{pmatrix} \gamma_N^{(1)} \\ \gamma_N^{(2)} \\ \dots \\ \gamma_N^{(l)} \end{pmatrix},$$

где каждое $\gamma_n^{(k)}$ интерпретируется как число акций k-го типа в момент времени n ($k = 1, 2, \dots, l$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$).

Определение 3.[2] Случайный процесс $W_t, t \in [0, T]$ согласованный с F_t называется винеровским, если выполняются следующие условия:

1) $W_0 = 0$

2)процесс W_t имеет независимые приращения

3) $W_t - W_u \sim N(0, t-u)$ $\forall t, u$ $0 < u < t < \infty$ случайные величины $W_t - W_u$ имеют нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $t - u$

4) траектории W_t непрерывны.

Будем рассматривать два физических или юридических лица, которые действуют на финансовом рынке. Одно из них – покупатель – приобретает какой-нибудь контракт, платя за это величину C – цену контракта. Получив деньги C, другое лицо – продавец – должен гарантировать покупателю выполнение этого контракта в какой-то момент времени N. Для этого он создаёт портфель $\pi = (\beta_n, \gamma_n)_{n=0}^{N}$ с начальным капиталом $X_0^{\pi} = C$ и задается целью получить максимальный финальный капитал X_N^{π}. Сумма X_N^{π} должна быть по меньшей мере такова, чтобы обязательства по контракту могли быть выполнены.

Контракты европейского типа характеризуются тем, что они исполняются точно в финальный момент времени N.

Опционы-call, то есть опционы на покупку акций, предполагают следующую ситуацию. Покупателю опциона нужно в момент времени N иметь акцию определённого типа, однако в настоящий момент приобрести эту акцию он не может, но в момент N он хочет купить эту акцию по заранее оговорённой цене K – цена контракта. За выполнение этого контракта покупатель сразу платит продавцу деньги C. Основной момент данного вида сделки состоит в том, что продавец обязан в момент N выполнить условия контракта в то время, как покупатель имеет право не предоставлять контракт к исполнению.

Возможны два варианта развития событий.

1. Стоимость акции в момент N меньше (или равна) контрактной, то есть $S_N \le K$. Тогда покупателю не выгодно предъявлять контракт к исполнению, так как он может купить эту акцию на рынке по более низкой цене.

2. Стоимость акции в момент N больше контрактной, то есть $S_N > K$ Тогда покупатель предъявляет контракт к исполнению, покупает акцию по цене K, после чего сразу же продает эту акцию по рыночной цене S_N и получает прибыль $S_N - K$

Запишем в общем виде.

$$f_N = (S_N - K)^+ = \begin{cases} S_N - K, \text{если}\, S_N > K \\ 0, \quad\quad \text{если}\, S_N \le K \end{cases}.$$

Рассмотрим (B,S) – рынок.

Ценные бумаги можно разделить на два класса активов: безрисковые и рисковые.

Безрисковые активы ведут себя как банковский счет. Рисковые эволюционируют как акции. Такая двойственность легла в основу математического названия (B,S) – рынка.

Модель (B,S) – рынка в случае дискретного времени выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} S_n = S_{n-1}\left(1+\mu_n+\delta_n\varepsilon_n\right) \\ B_n = B_{n-1}(1+r_n) \end{cases}$$

Процесс $(S_n)_{n=0}^N$ описывает стоимость акции, процесс $(B_n)_{n=0}^N$ описывает величину банковского счёта. Значения S_0, B_0 известны. Источником случайности является последовательность независимых случайных величин $(\varepsilon_n)_{n=1}^N$ таких, что $\varepsilon_n \in \{-1,1\}$. Рассматривается естественная фильтрация $F_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ $F_n = \sigma(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)$. Параметры модели: r_n – процентная ставка, $\delta_n > 0$ – волатильность, μ_n – снос.

Рассмотрим портфель с дивидендами в случае дискретного времени:

$$\Delta\left(\frac{X_n}{B_n}\right) = \gamma_n\left(\Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right) + \frac{\Delta D_n}{B_n}\right), \; n = 1,2,\ldots,N.$$

$$\Delta D_n = cS_{n-1}, \; c \equiv const$$

Задача для расчёта справедливой цены X_0 имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \min\limits_{\gamma} X_0 \\ \Delta\left(\frac{X_n}{B_n}\right) = \gamma_n\left(\Delta\left(\frac{X_n}{B_n}\right) + c\frac{S_n}{B_n}\right) \\ X_N \ge f_N \end{cases}$$

Если p – такая мера, относительно которой процесс $\left(\frac{X_n}{B_n}\right)_{n=1}^N$ является мартингалом, то рекуррентная формула для расчета оптимального капитала портфеля имеет вид:

$$X_N = f_N,$$

$$X_{n-1} = \frac{1}{1+r_n}E^*\left(X_n \mid F_n\right),$$

$$X_0 = \frac{B_0}{B_N}E^* f_{N.}$$

Найдем меру p из условия:

$$E^*\left(\Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right)+c\frac{S_n}{B_n}\mid F_{n-1}\right)=0,$$

$$E^*\left(\frac{1+\mu_n+\delta_n\varepsilon_n}{1+r_n}-1+c\frac{1+\mu_n+\delta_n\varepsilon_n}{1+r_n}\right)=0,$$

$$\mu_n-r_n+c(1+\mu_n)+\delta_n\varepsilon_n(1+c)=0,$$

ε_n принимает два значения: -1 и 1, $\delta_n>0, c>-1$. Учитывая, что сумма вероятностей равна единице, а также используя мартингальное равенство, имеем:

$$\begin{cases}-\delta_n(1+c)p(\varepsilon_n=-1)+\delta_n(1+c)p(\varepsilon_n=1)=r_n-\mu_n-c(1+\mu_n)\\ p(\varepsilon_n=-1)+p(\varepsilon_n=1)=1\end{cases}$$

$$p\left(\varepsilon_n=1\right)=p=\frac{r_n-\mu_n-c(1+\mu_n)}{2\delta_n(1+c)}+\frac{1}{2}$$

$$p\left(\varepsilon_n=-1\right)=1-p=q=\frac{1}{2}-\frac{r_n-\mu_n-c(1+\mu_n)}{2\delta_n(1+c)}$$

Ограничения на параметры:

$$\max\left(-\delta_n+\frac{r_n-c}{1+c},\delta_n-1\right)<\mu_n<\delta_n+\frac{r_n-c}{1+c}$$

Формула для решения:

$$X_N=f_N=g_N(S_N)$$

$$X_{n-1}=g_{n-1}(S_{n-1})=\frac{1}{1+r_n}\{g_n(S_{n-1}(1+\mu_n+\delta_n))p+g_n(S_{n-1}(1+\mu_n-\delta_n))q\}$$

Аналогично рассмотрим модель (B,S)–рынка в случае непрерывного времени:

$$\begin{cases}dS_t=S_t(\tilde{\mu}dt+\tilde{\delta}dW_t)\\ dB_t=B_t(\tilde{r}dt)\end{cases} t\in[0,T]$$

W_t – винеровский процесс по исходной мере P. Фильтрация имеет следующий вид: $F_0=(\Omega,\varnothing), F_t=\sigma(W_s;s\le t)$. Процесс $\left(\frac{S_t}{B_t}\right)_{t\in[0,T]}$ является мартингалом относительно единственной маргинальной меры P, порождаемой винеровским процессом и естественной фильтрацией. При этом рынок является безарбитражным и полным.

Рассматривается следующая задача:

$$\begin{cases}\min\limits_{\gamma} X_0\\ d\left(\frac{X_t}{B_t}\right)=\gamma_t\left(d\left(\frac{X_t}{B_t}\right)+\tilde{c}\frac{S_t}{B_t}dt\right)\\ X_T\ge f_T\end{cases}$$

Зависимость параметров дискретного и непрерывного времени выглядит следующим образом: $\mu=\tilde{\mu}h$, $r=\tilde{r}h$, $c=\tilde{c}h$, $\delta=\tilde{\delta}\sqrt{h}$, где $h=\frac{T}{N}$.

Формула для решения задачи была разработана Фишером Блэком и Майроном Шоулзом [3]:

$$X_0 = S_0 \exp(-\tilde{\delta}T)\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)+T\left(\tilde{r}-\tilde{c}+\frac{\tilde{\delta}^2}{2}\right)}{\tilde{\delta}\sqrt{T}}\right) - K\exp(-\tilde{r}T)\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)+T\left(\tilde{r}-\tilde{c}-\frac{\tilde{\delta}^2}{2}\right)}{\tilde{\delta}\sqrt{T}}\right)$$

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – функция Лапласа.

Аналогично эту задачу можно решить методом Монте-Карло.

Пусть провели L экспериментов. Рассмотрим алгоритм с номером i.

1) $S_n^i = S_{n-1}^i \exp\left(\left(\tilde{r}-\frac{\tilde{\delta}^2}{2}\right)h + \tilde{\delta}\sqrt{h}\varepsilon_n\right), \varepsilon_n \sim N(0,1)$

2) $B_n^i = B_{n-1}^i \exp(\tilde{r}h)$

3) $f_N^i = \max(S_N^i - K, 0)$

Справедливая цена вычисляется по формуле

$$X_0 = B_0 E^*\left(\frac{f_T}{B_T}\right) \approx B_0 \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\frac{f_T^i}{B_T^i}$$

Пусть $M_1 < M_2$. Введем два барьера $\overline{M}_1, \overline{M}_2$:

$$\overline{M_1}(ih) = M_1\exp(dih)$$
$$\overline{M_2}(ih) = M_2\exp(dih)$$

Тогда параметры модели вычисляются следующим образом:

$$r_i = \tilde{r}_1 I_{\{S_{i-1}<\overline{M_1}((i-1)h)\}} + \tilde{r}_2 I_{\{\overline{M_1}((i-1)h)<S_{i-1}<\overline{M_2}((i-1)h)\}} + \tilde{r}_3 I_{\{S_{i-1}\ge\overline{M_2}((i-1)h)\}}$$

$$\mu_i = \tilde{\mu}_1 I_{\{S_{i-1}<\overline{M_1}((i-1)h)\}} + \tilde{\mu}_2 I_{\{\overline{M_1}((i-1)h)<S_{i-1}<\overline{M_2}((i-1)h)\}} + \tilde{\mu}_3 I_{\{S_{i-1}\ge\overline{M_2}((i-1)h)\}}$$

$$\delta_i = \tilde{\delta}_1 I_{\{S_{i-1}<\overline{M_1}((i-1)h)\}} + \tilde{\delta}_2 I_{\{\overline{M_1}((i-1)h)<S_{i-1}<\overline{M_2}((i-1)h)\}} + \tilde{\delta}_3 I_{\{S_{i-1}\ge\overline{M_2}((i-1)h)\}}$$

Пусть задано следующее разбиение: $0=T_0<T_1<...<T_N=T$.

Формула для решения имеет следующий вид:

$$V(x,t) = \exp(-\tilde{r}(T-t))\times$$
$$\times Ef\left(x\exp\left(\left(\tilde{r}-\frac{\tilde{\sigma}^2}{2}\right)(T-t) - \sum_{i=1}^{N}\frac{g(S_{T_{i-1}})}{S_{T_{i-1}}}(T_i - T_{i-1}) + \tilde{\sigma}\sqrt{T-t}\xi\right)\right)$$

где $x = S_0, t = 0, g(S_{i-1}) = \Delta x^{\alpha}, \alpha \in [0,1], \xi \sim (0,1)$.

Рассмотрим реализацию метода вычисления справедливой цены европейского опциона-колл для модели с дивидендами.

Для исходных данных T := 1; K := 6; S_0 := 6; delta := 0.1e-1; r := 0.5; N := 10

Поведение справедливой цены убывает с ростом c – это вполне реалистично, так как от дивидендов мы получаем прибыль, поэтому можем позволить себе иметь меньшую справедливую цену. Если портфель самофинансируемый, то есть дивидендов нет, то мы от них прибыли не получаем, следовательно нам необходимо платить большую справедливую цену. В таблице 1 представлена зависимость справедливой цены от c, хорошо видно, что при $c = 0$ у нас самая большая справедливая цена, которая совпадает со справедливой ценой самофинансируемого портфеля. При увеличении c видно, что справедливая цена уменьшается. В таблице 1 получены данные при расчете справедливой цены в непрерывном (X_0^c) и дискретном (X_0^d) времени.

c	X₀ᵈ	X₀ᶜ
0	0.391	0.391
0.005	0.376	0.374
0.01	0.362	0.361
0.015	0.347	0.345
0.02	0.332	0.331
0.025	0.318	0.319
0.03	0.304	0.302
0.035	0.291	0.29
0.04	0.276	0.275

Табл. 1. Зависимость справедливой цены от параметра c в непрерывном и дискретном времени.

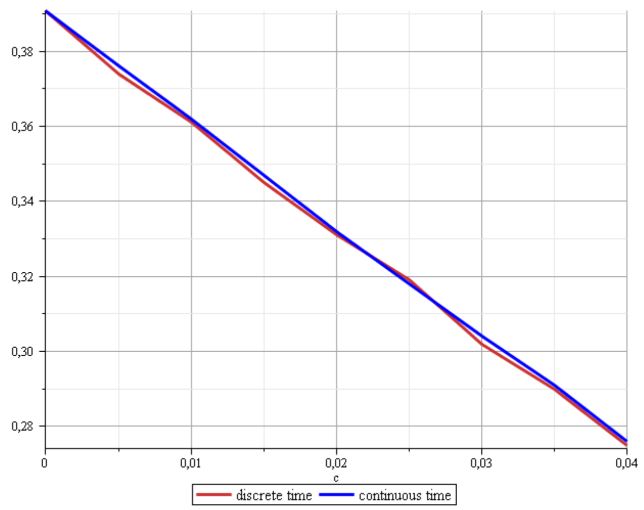


Рис. 1. Графики зависимости справедливой цены от параметра c в непрерывном и дискретном времени.

Рассмотрим пример с участием двух барьеров. Пусть $N=5, S_0=4; K=6, r_1=0.2, r_2=0.3, \delta_1=0.1, \delta_2=0.2$.

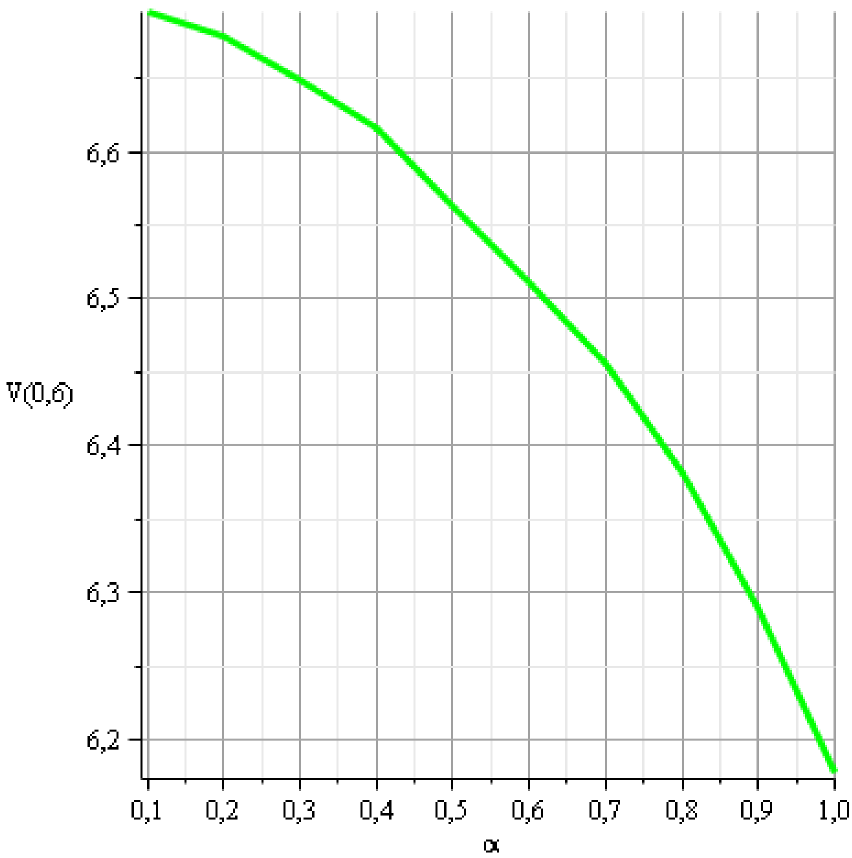


Рис. 2. График зависимости справедливой цены от параметра α .

На рис. 2 представлен график зависимости справедливой цены от параметра α . При значении $\alpha = 0$ значение справедливой цены совпадает со значением справедливой цены, вычисленной ранее для случая постоянных дивидендов.

Примечания:

1. Мельников А.В. Финансовые рынки: стохастический анализ и расчёт производных ценных бумаг. М.: ТВП, 1997.
2. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Том 1.Факты модели. М.: Фазис, 1998.
3. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Том 2.Теория. М.: Фазис, 1998.
4. Белявский Г.И., Данилова Н.В. Диффузионные модели со случайным переключением параметров. Расчеты и финансовые приложения. Lambert Academic Publishing, 2002.
5. Фёльмер Г., Шид А. Введение в стохастические финансы. Дискретное время. М.: МЦНМО, 2008.
6. Джекел П. Применение методов Монте-Карло в финансах. М.: Интернет-трейдинг, 2004.
7. Галиц Л. Финансовая инженерия. Инструменты и способы управления финансовым риском. М.: ТВП, 1998.
8. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005.
9. Ширяев А.Н. Вероятность-1. М.:МЦНМО, 2004.
10. Ширяев А.Н. Вероятность-2. М.:МЦНМО, 2004.

References:

1. Mel'nikov A.V. Finansovye rynki: stokhasticheskii analiz i raschet proizvodnykh tsennykh bumag. M.: TVP, 1997.
2. Shiryaev A.N. Osnovy stokhasticheskoi finansovoi matematiki. Tom 1.Fakty modeli. M.: Fazis, 1998.
3. Shiryaev A.N. Osnovy stokhasticheskoi finansovoi matematiki. Tom 2.Teoriya. M.: Fazis, 1998.
4. Belyavskii G.I., Danilova N.V. Diffuzionnye modeli so sluchainym pereklyucheniem parametrov. Raschety i finansovye prilozheniya. Lambert Academic Publishing, 2002.
5. Fel'mer G., Shid A. Vvedenie v stokhasticheskie finansy. Diskretnoe vremya. M.: MTsNMO, 2008.
6. Dzhekel P. Primenenie metodov Monte-Karlo v finansakh. M.: Internet-treiding, 2004.
7. Galits L. Finansovaya inzheneriya. Instrumenty i sposoby upravleniya finansovym riskom. M.: TVP, 1998.
8. Bulinskii A.V., Shiryaev A.N. Teoriya sluchainykh protsessov. M.: Fizmatlit, 2005.
9. Shiryaev A.N. Veroyatnost'-1. M.:MTsNMO, 2004.
10. Shiryaev A.N. Veroyatnost'-2. M.:MTsNMO, 2004.

УДК 519.2

Расчет справедливой цены для модели (B,S)-рынка в случае несамофинансируемых стратегий

[1] Екатерина Николаевна Галицына
[2] Наталья Викторовна Данилова

[1-2] Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Российская Федерация
[1] E-mail: katrin.2310@mail.ru
[2] E-mail: danilova198686@mail.ru

Аннотация. В работе производится алгоритм расчета справедливой цены на (B,S)-рынке. Расчёт справедливой цены производится для случая Европейского опциона в дискретном и непрерывном времени. В результате находится капитал оптимального портфеля, а также оптимальная стратегия. Расчёты задаются с помощью рекуррентных формул и производятся на бинарном дереве в случае дискретного времени. В непрерывном времени справедливая цена вычисляется методом Монте Карло и по формуле Блэка-Шоулза. Производится сравнение полученных данных.

Ключевые слова: справедливая цена, винеровский процесс, дивиденд, рынок, мартингал.